LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME.

17773 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME,

PAR

P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
ET DE CRISTALLOGRAPHIE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

TOME III.

LES COURANTS LINÉAIRES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1892

PRÉFACE.

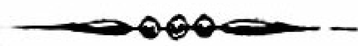
Le plan du présent Volume semblera, au lecteur, conçu autrement que le plan des Volumes qui l'ont précédé. Dans les théories exposées aux Tomes I et II, je me suis efforcé de respecter, au moins dans ses grandes lignes, l'ordre traditionnel. Je ne l'ai pas fait ici, et je dois, en quelques mots, en dire la raison.

En Électrodynamique, il n'existe pas, à proprement parler, d'ordre traditionnel; chaque auteur qui a introduit des idées nouvelles dans cette partie de la science les a démontrées d'une manière différente, souvent sans se soucier beaucoup de les relier aux idées émises par ceux qui l'avaient précédé. Force m'a donc été de construire mon Livre sur un plan entièrement nouveau. Ce plan choquera peut-être les habitudes d'esprit de quelques lecteurs; j'ai expliqué dans un des Chapitres de l'Ouvrage (Livre XIV, Chap. V) les raisons qui m'ont amené à l'adopter.

Ne pouvant me laisser guider par la tradition comme dans les Volumes précédents, il ne m'a pas été possible d'indiquer d'une manière aussi précise la part de chaque physicien dans la constitution des théories que j'expose. Lorsque je rencontre un théorème qui a été formellement énoncé par un auteur, j'ai toujours soin de citer cet auteur. Mais je n'ai pas toujours pu marquer d'une manière aussi nette ceux dont les idées ont inspiré ou pénétré mes raisonnements. Je supplie le lecteur de ne point voir dans cette

omission, à laquelle je n'aurais pu remédier que par des discussions historiques trop longues, le désir de m'attribuer les découvertes d'autrui. Du reste, je réparerai en grande partie cette omission en citant les noms de ceux dont les Ouvrages ont le plus influé sur la direction de mes recherches; ce sera en outre pour moi le moyen de témoigner mon admiration pour ceux qui ont le plus contribué, depuis vingt ans, aux progrès de l'Électrodynamique; j'ai nommé M. H. von Helmholtz et M. Carl Neumann.

Lille, 15 février 1892.



LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME.

TOME III.

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE

A L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DES INTÉGRALES CURVILIGNES ([1]).

---

§ 1. — Paramètres qui définissent la situation relative de deux éléments linéaires.

En étudiant l'Électrodynamique et l'Électromagnétisme, on fait constamment appel à un certain nombre de propositions de Géométrie analytique peu employées en dehors du domaine de ces sciences. Nous allons réunir ici les plus importantes parmi ces propositions.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires ([2]) d'un point M

([1]) *Voir*, au sujet des intégrales curvilignes et des intégrales de surface, le Tome I du *Traité d'Analyse* de M. É. Picard. Dans ce bel Ouvrage, la théorie de ces intégrales est traitée avec de grands développements et par des méthodes souvent différentes de celles qui sont exposées ici.

([2]) Dans tout ce qui va suivre, sauf indication contraire, il ne sera jamais fait usage de coordonnées non rectangulaires.

d'une courbe sur laquelle un sens de parcours a été choisi. Soit MM′ un élément de cette courbe, issu du point M, et ayant pour longueur ds. Le point M′ a pour coordonnées

$$x' = x + \frac{dx}{ds} ds,$$

$$y' = y + \frac{dy}{ds} ds,$$

$$z' = z + \frac{dz}{ds} ds.$$

Soit MT la tangente en M à la courbe considérée, dirigée dans le sens de parcours qui a été choisi sur la courbe. Cette demi-droite MT fait, avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, des angles α, β, γ et l'on sait que l'on a

$$(1) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

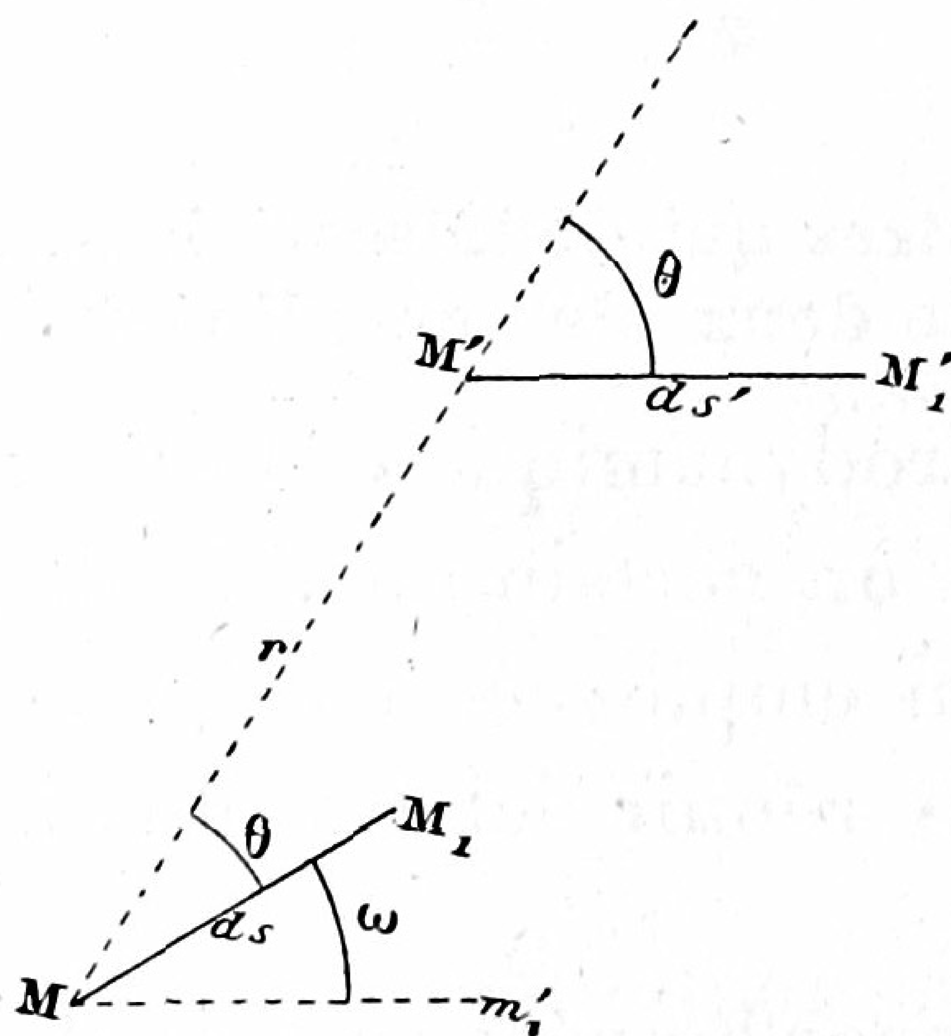
On a souvent à considérer le système formé dans l'espace par deux éléments linéaires

$$MM_1 = ds, \qquad M'M'_1 = ds'.$$

Un semblable système (*fig.* 1) est évidemment défini par les paramètres suivants :

1° Les longueurs ds, ds' des deux éléments ;

Fig. 1.



2° La distance r de l'origine M du premier à l'origine M′ du second ;

3° Les trois angles θ, θ', ω, lesquels sont eux-mêmes définis de la manière suivante :

θ est le plus petit des angles que la direction MM_1 de l'élément

ds fait avec la direction MM' de la droite qui joint l'origine de l'élément ds à l'origine de l'élément ds';

θ' est le plus petit des angles que la direction $M'M'_1$ de l'élément ds' fait avec la même direction MM';

ω est le plus petit des deux angles que font entre elles les directions MM_1, $M'M'_1$.

La connaissance des paramètres r, ds, ds', θ, θ', ω ne définit pas *sans ambiguïté* le système des deux éléments MM_1, $M'M'_1$; l'élément MM_1 étant arbitrairement placé dans l'espace, la connaissance de ces paramètres définit, pour l'élément $M'M'_1$, deux positions possibles, symétriques par rapport au plan M_1MM'. Mais, dans un grand nombre de cas, la fonction du système des deux éléments que nous aurons à considérer aura la même valeur pour ces deux systèmes distincts. Dans ces cas, on pourra regarder le système de deux éléments comme complètement défini par la connaissance des paramètres

$$ds, \quad ds', \quad r, \quad \theta, \quad \theta', \quad \omega.$$

Les trois angles θ, θ', ω étant, par définition, compris entre o et π, sont définis par leurs cosinus. On peut donc dire, dans le cas dont nous venons de parler, qu'une fonction du système des deux éléments est définie lorsque l'on connaît les paramètres

$$ds, \quad ds', \quad r, \quad \cos\theta, \quad \cos\theta', \quad \cos\omega.$$

Ces paramètres, dont la considération revient à chaque instant dans les Chapitres suivants, sont susceptibles de plusieurs expressions qu'il est indispensable de connaître.

Soient x, y, z les coordonnées du point M, et x', y', z' les coordonnées du point M'. Nous aurons, en premier lieu,

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2. \tag{2}$$

Soient α, β, γ les angles de la direction MM_1 avec les axes Ox, Oy, Oz et α', β', γ' les angles de la direction $M'M'_1$ avec les mêmes axes. Nous aurons, d'après les égalités (1),

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$\cos\alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \qquad \cos\beta' = \frac{dy'}{ds'}, \qquad \cos\gamma' = \frac{dz'}{ds'}.$$

Or, on sait que

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

On a donc

$$\cos\omega = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}. \tag{3}$$

La droite MM′ fait avec Ox, Oy, Oz des angles λ, μ, ν, et l'on a

$$\cos\lambda = \frac{x'-x}{r}, \qquad \cos\mu = \frac{y'-y}{r}, \qquad \cos\nu = \frac{z'-z}{r}.$$

Or

$$\cos\theta = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma,$$
$$\cos\theta' = \cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma'.$$

On a donc

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x'-x}{r}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{y'-y}{r}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{z'-z}{r}\dfrac{dz}{ds}, \\[2ex] \cos\theta' = \dfrac{x'-x}{r}\dfrac{dx'}{ds'} + \dfrac{y'-y}{r}\dfrac{dy'}{ds'} + \dfrac{z'-z}{r}\dfrac{dz'}{ds'}. \end{cases}$$

L'égalité (2) donne

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = -\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x'-x}{r},$$
$$\frac{\partial r}{\partial y'} = -\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y'-y}{r},$$
$$\frac{\partial r}{\partial z'} = -\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z'-z}{r},$$

relations moyennant lesquelles les égalités (4) deviennent

$$\cos\theta = -\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right),$$
$$\cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial x'}\frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial r}{\partial y'}\frac{dy'}{ds'} + \frac{\partial r}{\partial z'}\frac{dz'}{ds'}$$

ou bien

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}. \tag{5}$$

L'ensemble des égalités (4) et (5) donne

$$\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}.$$

On déduit aisément de là

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = -\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz}{ds}\right)$$
$$\times\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}\right).$$

Si l'on tient compte des égalités (3) et (4), cette égalité devient

$$\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r} - \frac{\cos\omega}{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} \tag{6}$$

ou bien, en tenant compte des égalités (5),

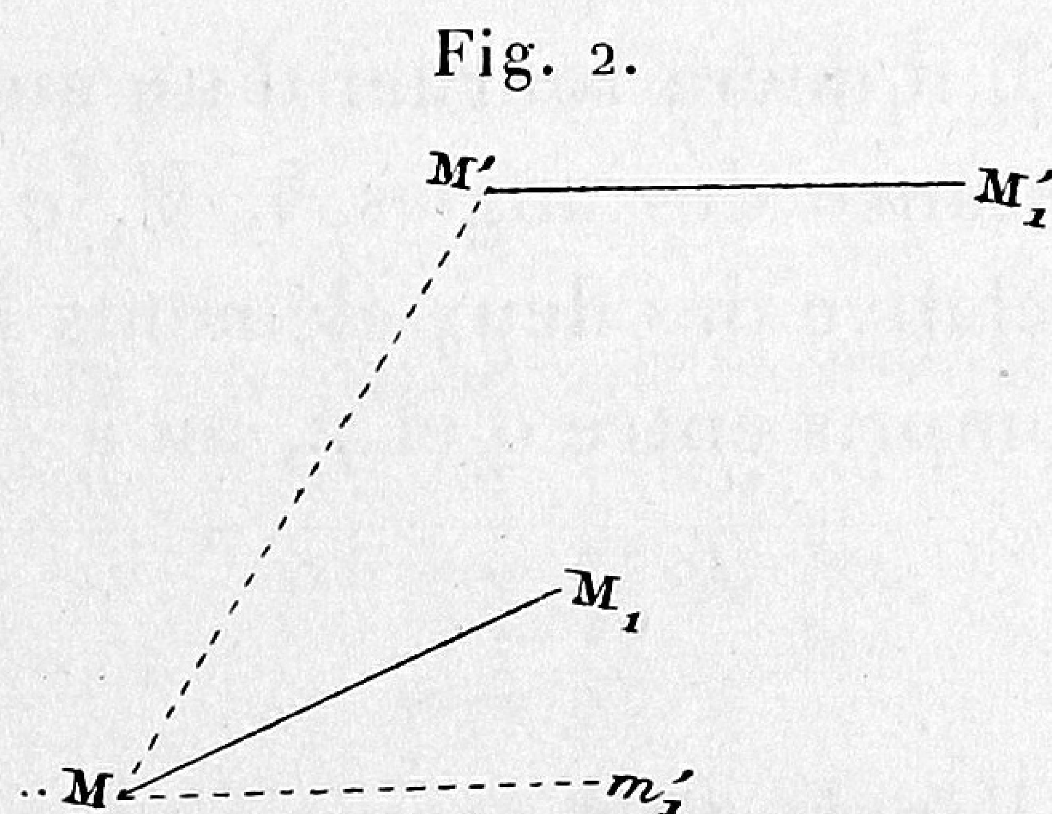
$$\cos\omega = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right). \tag{7}$$

La droite indéfinie MM′ et la demi-droite MM_1 déterminent un premier demi-plan. La droite indéfinie MM′ et la demi-droite $M'M'_1$ déterminent un second demi-plan.

Soit ε le plus petit des dièdres formés par ces deux demi-plans. Cet angle étant, par définition, compris entre o et π, est déterminé par son cosinus.

Par M, menons une parallèle Mm'_1 à $M'M'_1$ (*fig.* 2). Dans le

Fig. 2.



trièdre $MM_1m'_1M'$, l'angle ε est le dièdre opposé à l'angle $M_1Mm'_1$ ou ω ; il est compris entre les faces $M'MM_1$, ou θ et $M'Mm'_1$, ou θ'. On a donc

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon. \tag{8}$$

Cette égalité nous montre que, si une fonction dépendant de la position relative des deux éléments ds et ds' dépend, d'une manière uniforme, des paramètres

$$\theta, \quad \theta', \quad \omega,$$

elle dépend d'une manière uniforme des paramètres

$$\theta, \quad \theta', \quad \varepsilon$$

et réciproquement ; d'ailleurs ces angles θ, θ', ω, ε sont tous compris entre o et π et, partant, définis d'une manière uniforme par leurs cosinus.

La comparaison des égalités (6) et (8) donne

$$\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}. \tag{9}$$

Les diverses égalités que nous venons d'écrire sont d'un continuel usage dans l'étude de l'Électrodynamique.

Nous avons vu que la connaissance des angles θ, θ', ω, ou bien, ce qui revient au même, des angles θ, θ', ε, ne définissait pas sans ambiguïté la direction relative des deux éléments MM_1, $M'M'_1$. Mais on peut trouver un système d'angles qui définisse sans ambiguïté la direction relative des deux éléments MM_1, $M'M'_1$.

Qu'on imagine un demi-plan, limité par la droite MM', et tournant de gauche à droite autour de cet axe. Que ce demi-plan coïncide d'abord avec le demi-plan $M'MM_1$. Pour venir coïncider avec le plan $MM'M'_1$, il devra tourner d'un angle e, compris entre o et 2π. La connaissance des angles θ, θ', e définit *sans ambiguïté* la direction relative des deux éléments MM_1, $M'M'_1$.

Si l'angle e est compris entre o et π, on a

$$\varepsilon = e.$$

Si, au contraire, l'angle e est compris entre π et 2π, on a

$$\varepsilon = 2\pi - e.$$

§ 2. — De l'intégrale curviligne. Définition. Théorème fondamental.

Soient U, V, W trois fonctions uniformes et continues des variables suivantes :

$$x, \quad y, \quad z,$$

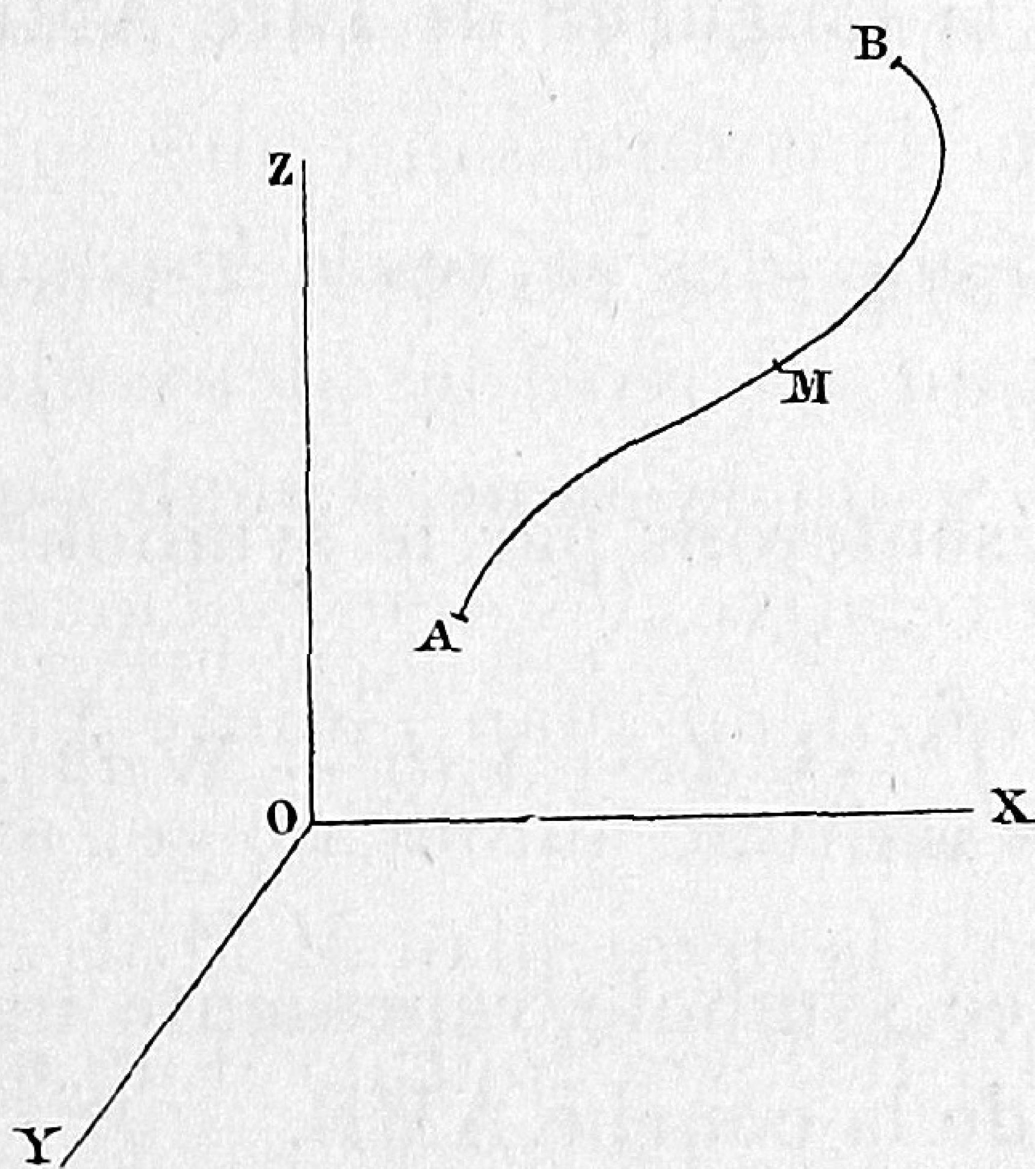
$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \ldots, \quad \ldots,$$

$$\ldots, \quad \ldots, \quad \frac{d^n z}{ds^n}.$$

Imaginons que x, y, z soient les coordonnées d'un point variable M d'une courbe AMB (*fig.* 3). Soit s l'arc AM. On pourra

Fig. 3.



toujours imaginer que la courbe soit représentée par les équations

$$x = f(s),$$
$$y = g(s),$$
$$z = h(s),$$

f, g, h étant des fonctions finies, uniformes et continues de s, dont les dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre n existent, sont uniformes, et sont des fonctions finies et continues de s, sauf en un nombre limité de points de la courbe.

Moyennant ces relations, les quantités

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$
$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \ldots, \quad \ldots,$$
$$\ldots, \quad \ldots, \quad \frac{d^n z}{ds^n}.$$

vont devenir des fonctions uniformes de s, ces fonctions pouvant être infinies ou discontinues en certains points ou en certaines régions de la courbe AMB. Il en sera de même des fonctions $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$, obtenues en remplaçant les variables qui figurent dans les fonctions U, V, W par leurs expressions en fonction de s.

Soient

$$\frac{dx}{ds} = \varphi(s), \qquad \frac{dy}{ds} = \psi(s), \qquad \frac{dz}{ds} = \theta(s).$$

Soit, en outre, S la longueur de l'arc AMB. Si l'intégrale définie

$$\int_0^S [u(s)\,\varphi(s) + v(s)\,\psi(s) + w(s)\,\theta(s)]\,ds$$

existe, nous la représenterons par le symbole

$$\int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz),$$

et nous dirons que ce symbole représente une *intégrale curviligne* prise le long de la courbe AMB.

Il faut bien remarquer que ce symbole n'a aucun sens, en général, si l'on ne suppose pas l'arc AMB complètement connu ; c'est seulement lorsqu'on suppose cet arc connu qu'il prend un sens, celui d'une intégrale définie, et à chaque arc différent joignant le point A au point B correspond un sens différent de ce symbole, ce sens étant traduit par une intégrale définie différente.

Pour définir cette intégrale, nous avons supposé les coordonnées d'un point de la courbe AMB exprimées au moyen de l'arc s de cette courbe; mais nous aurions pu tout aussi bien les supposer exprimées au moyen d'un paramètre t variable d'une manière continue le long de la courbe AMB.

Presque toutes les propriétés des intégrales curvilignes se déduisent d'une proposition fondamentale que nous allons démontrer.

Supposons que les trois fonctions U, V, W dépendent seulement de x, y, z et, de plus, que l'on ait

$$U = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x},$$

$$V = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y},$$

$$W = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z},$$

F étant, dans tout l'espace, une fonction uniforme, finie et continue de x, y, z.

Considérons une courbe AMB quelconque, donnée par les équations

$$x = f(s),$$

$$y = g(s),$$

$$z = h(s).$$

Si dans $F(x, y, z)$ on remplace x, y, z par ces fonctions uniformes, finies et continues de s, $F(x, y, z)$ va se transformer en une fonction uniforme, finie et continue de s

$$F[f(s), g(s), h(s)] = \Phi(s).$$

L'intégrale curviligne

$$\int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz)$$

sera égale, par définition, à

$$\int_0^S \left[\frac{\partial F}{\partial f(s)} \frac{df(s)}{ds} + \frac{\partial F}{\partial g(s)} \frac{dg(s)}{ds} + \frac{\partial F}{\partial h(s)} \frac{dh(s)}{ds}\right] ds,$$

ou bien à

$$\int_0^S \frac{d\Phi(s)}{ds} ds.$$

$\Phi(s)$ étant une fonction uniforme, finie et continue de s, cette dernière quantité a pour valeur

$$\Phi(S) - \Phi(0).$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point B. Nous aurons

$$\Phi(0) = F(x_0, y_0, z_0),$$
$$\Phi(S) = F(x_1, y_1, z_1)$$

et, par conséquent,

$$\int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz) = F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0).$$

Ainsi l'intégrale curviligne considérée dépend exclusivement de l'origine et de l'extrémité de la courbe le long de laquelle elle est prise et point de la forme de cette courbe.

Dans ce cas particulier, on voit que l'on peut attribuer un sens au symbole

$$\int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz),$$

pourvu seulement que l'on connaisse les deux points A et B, sans qu'il soit nécessaire de connaître la courbe AMB. Ce sens est celui de la différence

$$F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0).$$

Supposons que la courbe AMB soit une courbe fermée ; le point B coïncidant avec le point A, les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont respectivement identiques aux coordonnées x_0, y_0, z_0. Comme, d'ailleurs, la fonction $F(x, y, z)$ est une fonction uniforme, finie et continue de x, y, z, on aura assurément

$$F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Ainsi, lorsque U, V, W sont les trois dérivées partielles d'une même fonction uniforme, finie et continue de x, y, z, l'intégrale curviligne

$$\int (U\,dx + V\,dy + W\,dz),$$

étendue à une courbe fermée quelconque, est égale à 0.

Avant de démontrer la réciproque de cette proposition, une remarque est nécessaire.

Si, pour toute courbe ouverte AMB, dont l'origine A a pour coordonnées x_0, y_0, z_0 et dont l'extrémité B a pour coordonnées

x_1, y_1, z_1, une certaine intégrale curviligne vérifie la relation

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) = \text{F}(x_1, y_1, z_1) - \text{F}(x_0, y_0, z_0);$$

$\text{F}(x, y, z)$ étant une fonction uniforme, finie et continue de x, y, z, on aura, pour toute courbe fermée,

$$\int (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) = 0.$$

Inversement, considérons une intégrale curviligne telle que, pour toute courbe fermée, on ait

$$\int (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) = 0,$$

et cherchons la valeur de l'intégrale

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) = [\text{AMB}].$$

Pour obtenir cette valeur, nous remarquerons en premier lieu que l'intégrale AMB change de signe, sans changer de valeur, lorsqu'on conserve la courbe AMB en renversant son sens de parcours : relation qui peut s'écrire symboliquement

$$[\text{AMB}] + [\text{BMA}] = 0.$$

En effet, la somme que nous venons d'écrire n'est autre que la valeur de l'intégrale curviligne considérée le long de la courbe fermée particulière AMBMA, et nous savons que cette valeur est o.

En second lieu, nous remarquerons que la valeur de l'intégrale curviligne le long d'un arc de courbe quelconque AMB dépend uniquement de la position des points A et B et du sens de parcours de l'arc de courbe, mais nullement de la forme même de l'arc de courbe.

En effet, soient AMB, AM'B deux arcs de courbe différents unissant le point A au point B. La courbe AMBM'A étant une courbe fermée, on a

$$[\text{AMBM'A}] = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$[\text{AMB}] + [\text{BM'A}] = 0.$$

Mais, d'après la remarque précédente,

$$[\text{BM'A}]+[\text{AM'B}]=0.$$

On a donc, comme nous l'avions annoncé,

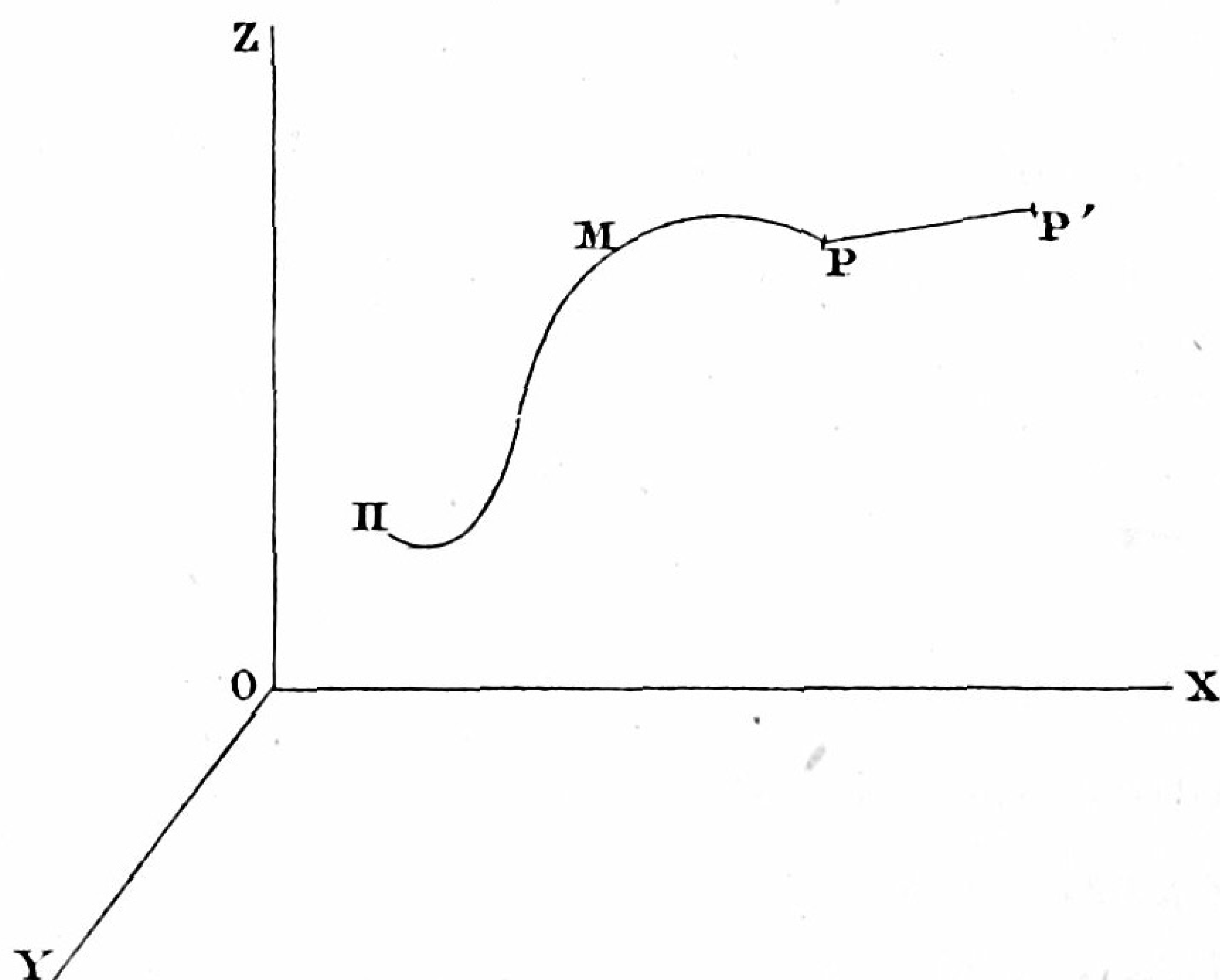
$$[\text{AMB}]+[\text{AM'B}].$$

Ces deux remarques faites, choisissons arbitrairement (*fig.* 4) un point Π, de coordonnées α, β, γ. Soit $P(x, y, z)$ un autre point du plan. L'intégrale

$$\int_{\Pi\text{MP}} (\text{U}\,dx+\text{V}\,dy+\text{W}\,dz),$$

prise le long d'une courbe quelconque ΠMP joignant le point Π au point P, aura une valeur indépendante de la forme de cette courbe et dépendant seulement de la position des points Π et P.

Fig. 4.



D'ailleurs, la position du point Π étant supposée prise arbitrairement une fois pour toutes, on voit que la valeur en question définit une fonction uniforme des coordonnées x, y, z du point P. Désignons cette valeur par $F(x, y, z)$.

Si les fonctions U, V, W sont des quantités finies, il est aisé de voir que cette quantité est finie. Il est aisé, de plus, de voir qu'elle est continue. Soit, en effet, $P'(x', y', z')$ un point voisin du point P. La fonction $F(x', y', z')$ est la valeur de l'intégrale curviligne prise le long d'une courbe quelconque joignant le point Π au point P'. Or, comme telle courbure, on peut prendre la courbe ΠMP suivie de la droite PP'. On voit alors aisé-

ment que

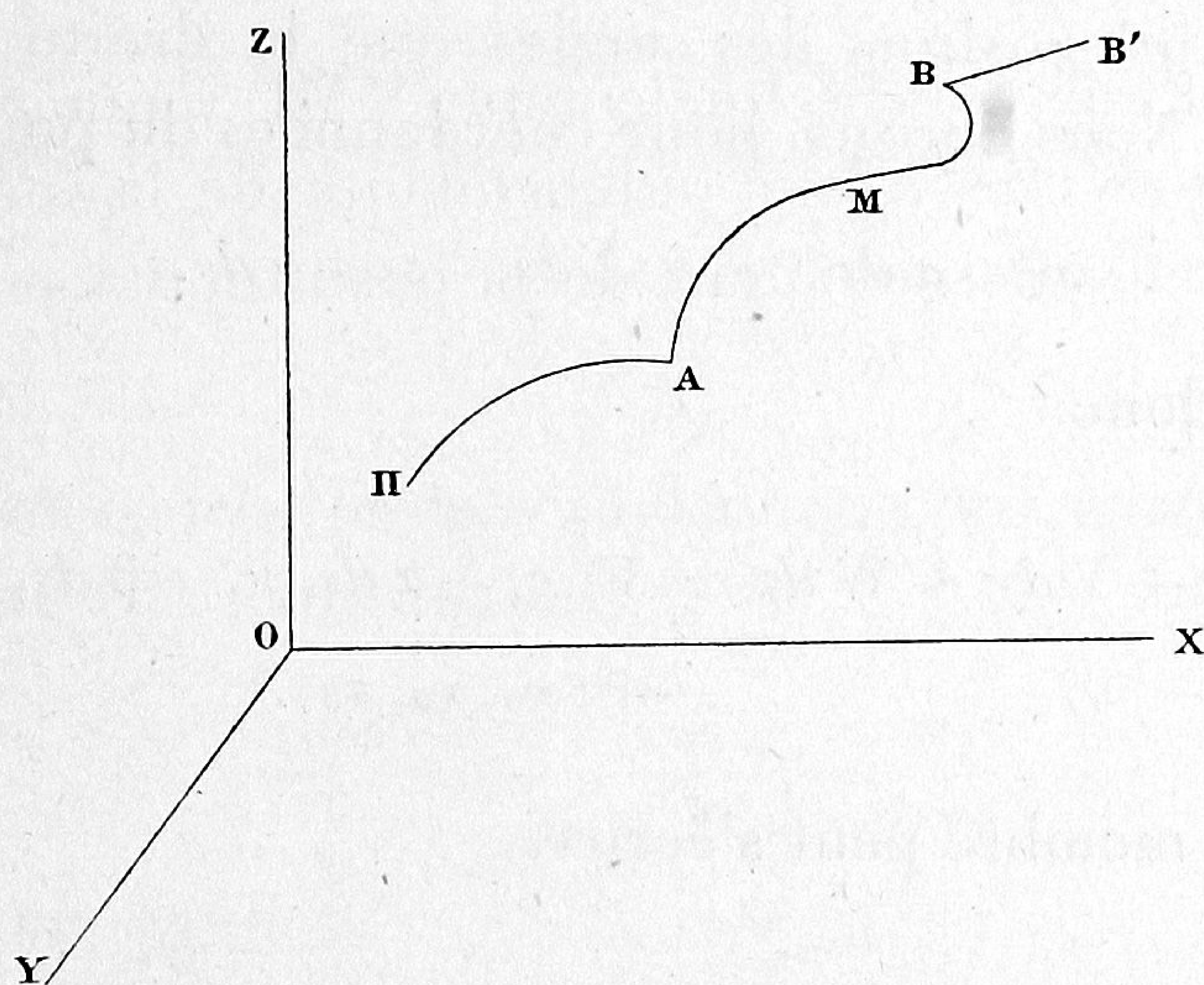
$$F(x', y', z') = F(x, y, z) + \int_{PP'} (U\,dx + V\,dy + W\,dz),$$

et l'intégrale qui figure au second membre est évidemment infiniment petite avec PP', ce qui démontre le théorème énoncé.

Ayant ainsi défini la fonction uniforme, finie et continue de x, y, x que nous avons désignée par $F(x, y, z)$, arrivons à l'évaluation de [AMB].

Si nous remarquons que ΠAMB (*fig.* 5) est une ligne qui mène

Fig. 5.



du point Π au point B, nous trouverons

$$[\Pi AMB] = F(x_1, y_1, z_1).$$

D'ailleurs,

$$[\Pi AMB] = [\Pi A] + [AMB]$$

et

$$[\Pi A] = F(x_0, y_0, z_0).$$

Nous trouvons donc

$$[AMB] = \int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz) = F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0).$$

Ainsi : *dire que l'intégrale curviligne*

$$\int (U\,dx + V\,dy + W\,dz)$$

étendue à un contour fermé quelconque est égale à o, *ou bien*

dire que la même intégrale étendue à une courbe quelconque est la différence des valeurs que prend, aux deux extrémités de la courbe, une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées, c'est énoncer deux propositions équivalentes.

Cherchons maintenant quelle forme doivent présenter les quantités U, V, W pour que l'on puisse énoncer ces deux propositions.

Nous avons

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) = \text{F}(x_1, y_1, z_1) - \text{F}(x_0, y_0, z_0).$$

Soit B′ un point situé à une distance infiniment petite ds du point B. Soient α, β, γ les cosinus des angles que la droite BB′ fait avec Ox, Oy, Oz. Nous aurons, pour coordonnées du point B,

$$x_1 + \alpha\,ds, \quad y_1 + \beta\,ds, \quad z_1 + \gamma\,ds.$$

Nous aurons donc

$$\int_{\text{AMBB}'} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) = \text{F}(x_1 + \alpha\,ds, y_1 + \beta\,ds, z_1 + \gamma\,ds) - \text{F}(x_0, y_0, z_0).$$

Or le premier membre peut s'écrire

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) + (\text{U}_1\alpha + \text{V}_1\beta + \text{W}_1\gamma)\,ds,$$

U_1, V_1, W_1 étant les valeurs de U, V, W en un certain point de la ligne BB′. On a donc

$$\text{U}_1\,dx + \text{V}_1\,dy + \text{W}_1\,dz = \text{F}(x_1 + dx, y_1 + dy, z_1 + dz) - \text{F}(x_1, y_1, z_1),$$

c'est-à-dire

$$\text{U} = \frac{\partial \text{F}}{\partial x}, \qquad \text{V} = \frac{\partial \text{F}}{\partial y}, \qquad \text{W} = \frac{\partial \text{F}}{\partial z}.$$

Si l'on rapproche ce résultat de celui que nous avons obtenu au commencement de ce paragraphe, on voit que :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne

$$\int (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz),$$

étendue à une courbe fermée quelconque, soit égale à o, *est que les trois quantités* U, V, W *soient les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une même fonction uniforme, finie et continue de x, y, z.*

Tel est le théorème fondamental sur lequel repose la théorie des intégrales curvilignes.

Donnons immédiatement une application de ce théorème.

La quantité

$$\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}$$

est une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x, y, z d'un point de la courbe s. Donc l'intégrale

$$\int \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\, ds,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, est égale à o.

Or l'égalité (6) nous donne

$$\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r} - \frac{\cos\omega}{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}.$$

Nous aurons donc

$$\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\, ds = \int \frac{\cos\omega}{r}\, ds,$$

les deux intégrales s'étendant à une même courbe fermée.

A fortiori, si s et s' sont deux courbes fermées quelconques, nous aurons

$$(10) \qquad \int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\, ds\, ds' = \int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds'.$$

Cette égalité joue, en Électrodynamique, un rôle important; elle a été démontrée, en 1847, par M. F.-E. Neumann [1], dans le but de comparer les résultats de sa théorie de l'Induction avec la théorie donnée par W. Weber.

---

[1] F.-E. NEUMANN, *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme*. Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 9 août 1847.

§ 3. — Théorème de M. Bertrand.

Le théorème fondamental que nous venons de démontrer va nous fournir une proposition dont nous aurons souvent à faire usage. Cette proposition a été donnée par M. J. Bertrand ([1]) au cours de ses belles recherches sur la loi d'Ampère.

Cette proposition s'énonce ainsi :

Si l'intégrale curviligne

$$\int G\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds,$$

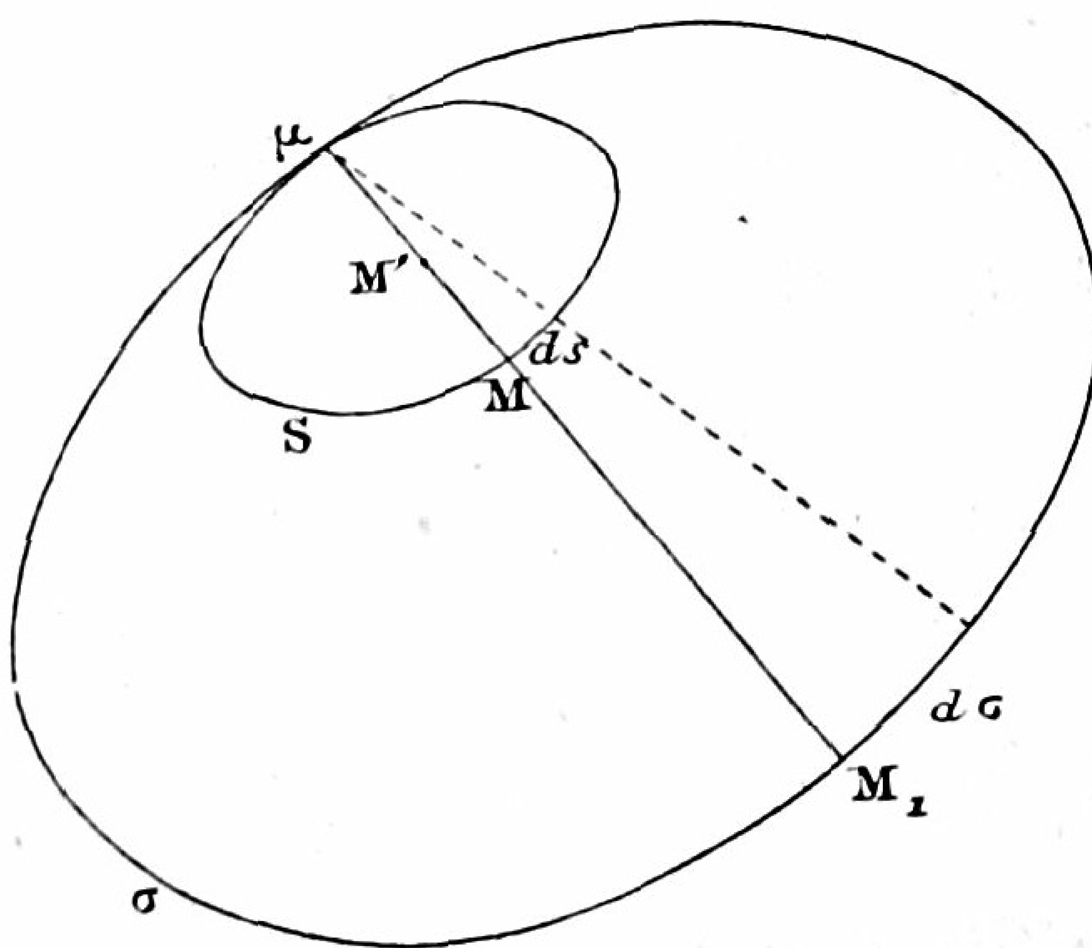
étendue à un contour fermé, est un infiniment petit du second ordre toutes les fois que

$$\int ds$$

est un infiniment petit du premier ordre, la fonction G *est linéaire et homogène en* $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Considérons, en effet, un contour fermé infiniment petit (*fig.* 6). Soit μ (ξ, η, ζ) un point fixe, pris arbitrairement sur ce contour.

Fig. 6.



Soit $M(x, y, z)$ un point variable de ce contour. Soit $M'(x', y', z')$ un certain point convenablement choisi entre les deux précédents

([1]) J. Bertrand, *Sur la démonstration de la formule qui représente l'action élémentaire de deux courants* (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 733; 1872.)

sur la ligne qui les joint. Nous aurons

$$\int G\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$$

$$= \int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$$

$$+ \int \Big[(x' - \xi) \frac{\partial}{\partial x'} G\left(x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$$

$$+ (y' - \eta) \frac{\partial}{\partial y'} G\left(x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$$

$$+ (z' - \zeta) \frac{\partial}{\partial z'} G\left(x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\Big] ds.$$

L'intégrale qui figure au premier membre est, par hypothèse, infiniment petite, par rapport à $\int ds$. Les quantités $(x' - \xi)$, $(y' - \eta)$, $(z' - \zeta)$ étant infiniment petites, la dernière intégrale qui figure au second membre est aussi infiniment petite par rapport à $\int ds$. Par conséquent, la quantité

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$$

doit être au moins un infiniment petit du second ordre lorsque

$$\int ds$$

est un infiniment petit du premier ordre.

Imaginons un contour fermé σ quelconque et, sur ce contour, un point fixe quelconque $M(\xi, \eta, \zeta)$. Soit $M_1(x_1, y_1, z_1)$ un point variable de ce contour. Je dis que l'intégrale

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dy_1}{d\sigma}, \frac{dz_1}{d\sigma}\right) d\sigma,$$

étendue à ce contour, est nécessairement égale à o.

Imaginons, en effet, que l'on forme un contour s homothétique du précédent, le centre d'homothétie étant en μ et le rapport d'homothétie ayant pour valeur $\frac{1}{\lambda}$, la quantité λ pouvant croître au delà de toute limite.

Le contour s est infiniment petit.

Si nous remarquons qu'aux points homologues de deux courbes

homothétiques les tangentes à ces deux courbes sont parallèles; si nous désignons par $M(x, y, z)$ le point du contour s homologue du point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ du contour σ; si ds et $d\sigma$ sont les éléments homologues de ces deux contours, nous aurons

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{dx}{ds},$$
$$\frac{dy_1}{d\sigma} = \frac{dy}{ds},$$
$$\frac{dz_1}{d\sigma} = \frac{dz}{ds},$$
$$d\sigma = \lambda\, ds.$$

Posons

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dy_1}{d\sigma}, \frac{dz_1}{d\sigma}\right) d\sigma = A,$$

et nous aurons les deux égalités

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dy_1}{d\sigma}, \frac{dz_1}{d\sigma}\right) d\sigma = \lambda \int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds,$$
$$\int d\sigma = \lambda \int ds;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dy_1}{d\sigma}, \frac{dz_1}{d\sigma}\right) d\sigma$$

par A,

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds = \frac{A}{\int d\sigma} \int ds.$$

D'après cette égalité, l'intégrale qui figure au premier membre serait, contrairement à ce qui doit être, de l'ordre de $\int ds$.

Nous sommes donc obligé d'admettre que l'intégrale

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds,$$

dans laquelle (ξ, η, ζ) est un point fixe du contour fermé *quelconque* auquel s'étend l'intégrale et (x, y, z) un point variable du même contour, est égale à 0.

D'après la proposition fondamentale démontrée au paragraphe

précédent, il faut et il suffit pour cela qu'il existe une fonction uniforme, finie et continue de x, y, z, telle que l'on ait

$$G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Le premier membre ne dépendant pas de x, y, z, il doit en être de même du second. Les quantités $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ doivent donc être de simples fonctions, quelconques d'ailleurs, de ξ, η, ζ. Nous devons donc avoir

$$\begin{aligned} G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = \; & P(\xi, \eta, \zeta)\frac{dx}{ds} \\ & + Q(\xi, \eta, \zeta)\frac{dy}{ds} \\ & + R(\xi, \eta, \zeta)\frac{dz}{ds}; \end{aligned}$$

et, par conséquent, ξ, η, ζ étant quelconques,

$$\begin{aligned} G\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = \; & P(x, y, z)\frac{dx}{ds} \\ & + Q(x, y, z)\frac{dy}{ds} \\ & + R(x, y, z)\frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

La proposition de M. Bertrand est ainsi démontrée.



CHAPITRE II.

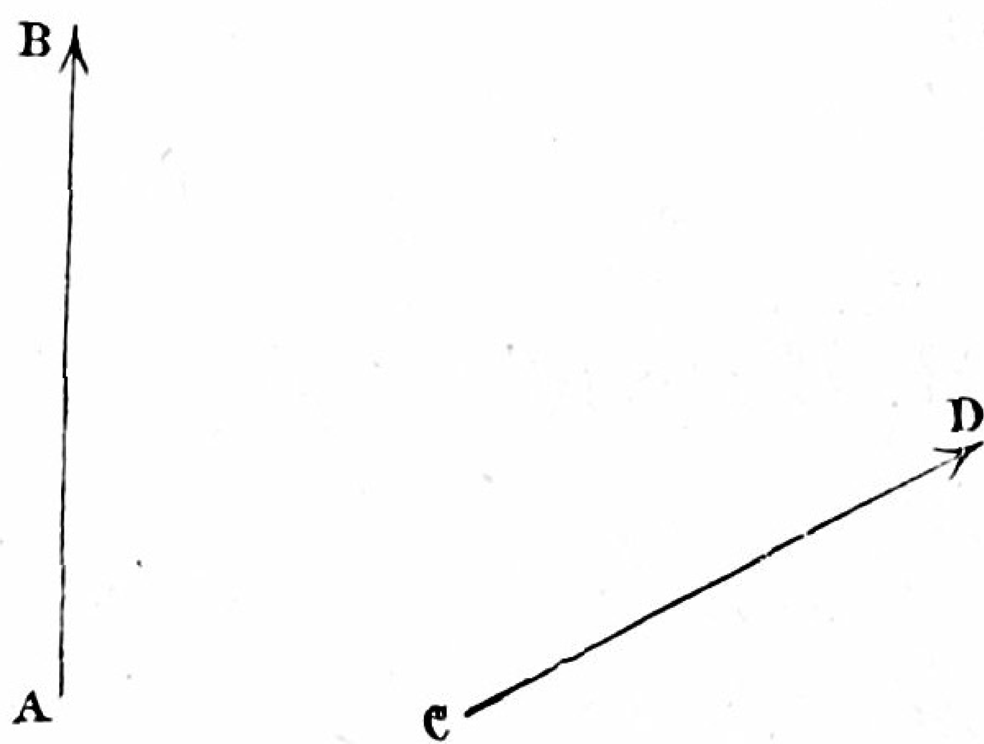
THÉORÈMES DE STOKES ET D'AMPÈRE (¹).

§ 1. — Quelques définitions et quelques lemmes de Géométrie.

Nous allons examiner, dans le présent Chapitre, une nouvelle propriété générale des intégrales curvilignes; mais cette étude sera précédée de l'énoncé de quelques définitions et de l'exposé de quelques lemmes de Géométrie générale.

Soient AB, CD (*fig.* 7) deux demi-droites qui ne se rencontrent pas et sont rectangulaires entre elles.

Fig. 7.

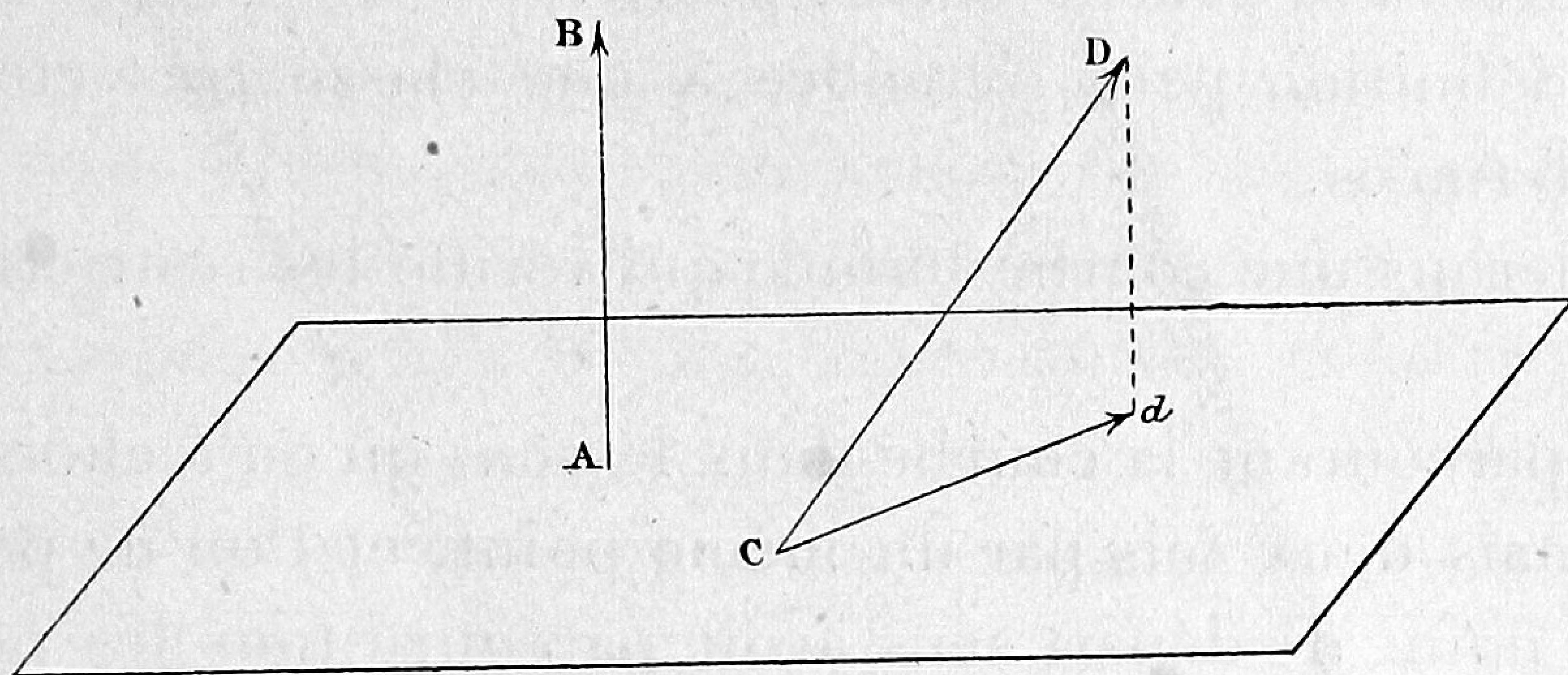


Supposons qu'un observateur, placé selon AB et regardant le point C, voie la demi-droite CD se diriger vers sa gauche; un observateur, placé selon CD et regardant le point A, verrait alors la demi-droite AB se diriger aussi vers sa gauche. Dans ces conditions, le système des deux directions AB, CD forme un système dont le *sens de rotation est positif*. Dans les conditions inverses, le sens de rotation est négatif.

(¹) Plusieurs parties de ce Chapitre sont extraites, presque textuellement, du remarquable Ouvrage de M. Carl Neumann : *Die elektrischen Kräfte*. Leipzig, 1873.

Cette définition s'étend à deux demi-droites qui ne sont pas rectangulaires. Le sens de rotation du système des deux demi-droites AB, CD (*fig.* 8) sera, par définition, le sens de rotation

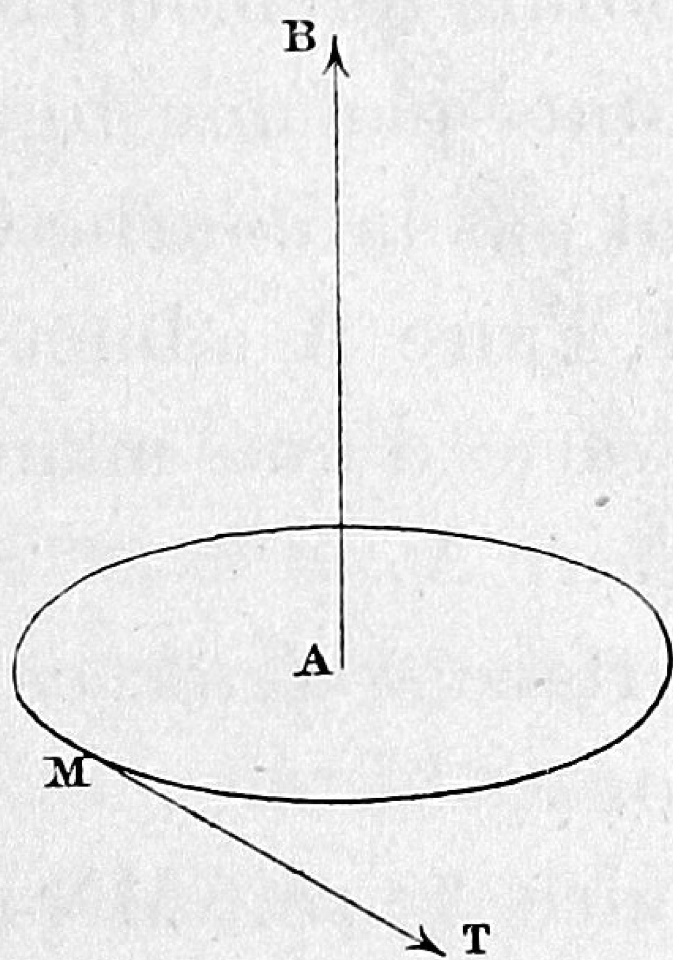
Fig. 8.



du système formé par la demi-droite AB, et par la demi-droite C*d*, projection de CD sur un plan perpendiculaire à AB.

Considérons un cercle (*fig.* 9) et une demi-droite AB, normale au plan de ce cercle et issue de son centre. Le côté du plan

Fig. 9.



de ce cercle où se trouve la demi-droite AB est ce que l'on nomme le *côté supérieur* de ce plan. La circonférence de ce cercle sera parcourue *dans un sens positif,* si la tangente MT, dirigée dans le sens du parcours, forme avec AB un système à rotation positive. On voit que, si un observateur, debout sur la face supérieure du plan, marchait sur la circonférence en la parcourant dans le sens positif, il aurait à sa gauche l'aire du cercle.

Un sens de parcours étant choisi sur une circonférence de cercle, on pourra toujours faire que ce sens de parcours devienne positif, en choisissant convenablement la face supérieure du plan.

Le côté du plan qu'il faut alors choisir pour face supérieure prend le nom de *face positive*. On voit qu'un observateur qui serait couché suivant la tangente MT à la circonférence de cercle, dans le sens de parcours choisi, et qui regarderait le centre du cercle, aurait à sa gauche la face positive.

Cette définition peut s'étendre à une classe très étendue de courbes fermées.

Considérons une courbe fermée qui vérifie les restrictions suivantes :

1° En parcourant la courbe dans le sens qu'on a choisi, on ne passe jamais deux fois par un même point, et l'on ne peut revenir à son point de départ sans avoir parcouru tous les points intermédiaires.

2° Par la courbe C, on peut faire passer une surface S telle que la courbe C forme, sur cette surface, le *contour d'une aire* A *fermée et linéairement connexe.*

Ces derniers mots nécessitent quelques explications.

L'aire fermée A, ayant pour contour C, est dite *linéairement connexe,* lorsque deux points quelconques, M, M', appartenant à l'aire A, peuvent être joints par une ligne située en entier dans l'aire A et ne rencontrant pas la courbe C.

3° En chaque point M, l'aire A admet un et un seul plan tangent dont l'orientation varie d'une manière continue lorsque le point M se déplace sur l'aire A.

4° L'aire A est une surface *à deux côtés*. Ce dernier mot nécessite quelques définitions.

Soit M un point de l'aire A; soit MN une demi-droite normale à ce plan, et invariablement liée à ce plan.

Déplaçons le point M à la surface de l'aire A. Il entraîne avec lui le plan tangent et la normale MN, qui se déplacent d'un mouvement continu.

Si, après un certain déplacement sur l'aire A, le point M revient à sa position primitive, le plan tangent reprendra, lui aussi, sa position primitive. Mais, pour la normale MN, deux cas peuvent se présenter :

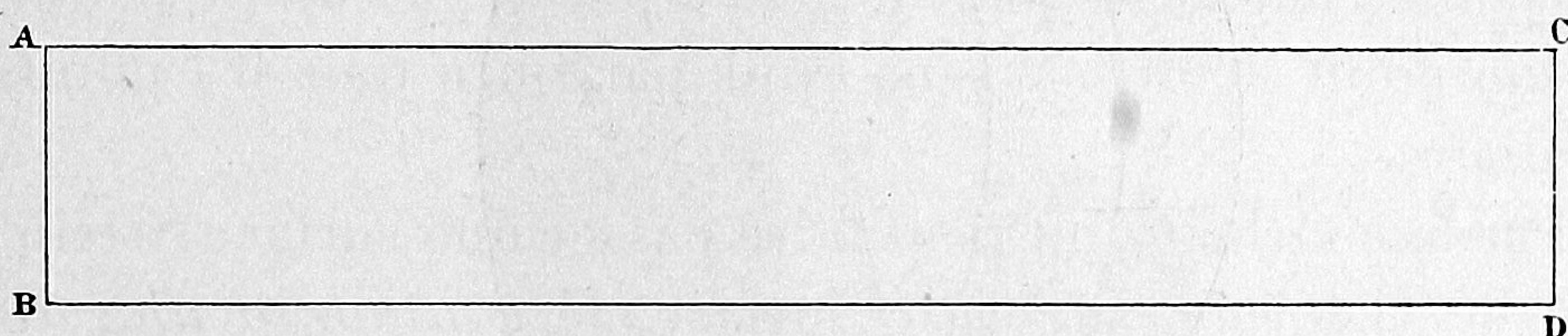
Ou bien la demi-droite MN reprend sa position primitive, quel qu'ait été le déplacement du point M. On dit alors que *l'aire* A *présente deux côtés.*

Ou bien, pour certains déplacements convenablement choisis du point M, la demi-droite MN viendra coïncider, non plus avec sa direction primitive, mais avec la direction inverse. On dit alors que *l'aire* A *présente un seul côté*.

On a longtemps admis, *a priori*, que toute aire close, linéairement connexe, présentait nécessairement deux côtés. Mœbius a, le premier, signalé l'existence paradoxale de surfaces *à un seul côté*.

On réalise aisément une semblable surface en prenant une bande rectangulaire ABCD (*fig.* 10) en papier, et en en recollant

Fig. 10.



les extrémités de manière que le point A vienne au point D, et le point B au point C. On obtient ainsi la surface figurée ci-contre (*fig.* 11).

Il est aisé de voir que, si l'on fait suivre au point M le chemin MPQRSM, la demi-droite MN viendra se replacer suivant MN'.

Certaines surfaces minima fournissent encore des exemples remarquables d'aires à un seul côté.

Nous supposerons donc que l'aire A soit une aire à deux côtés.

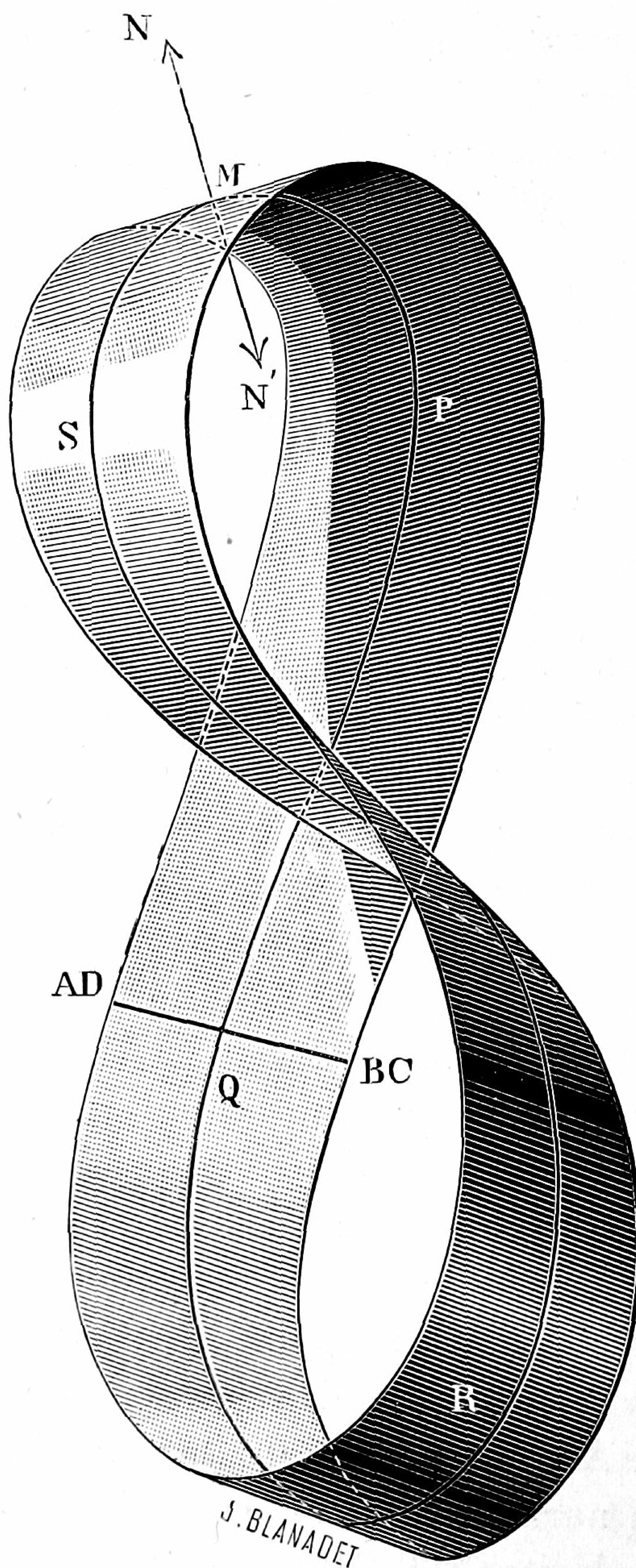
Sur la courbe C (*fig.* 12), choisissons un sens de parcours, et proposons-nous, par rapport à ce sens de parcours, de définir la *face positive* de l'aire A.

Prenons, sur la courbe C, un point M, et, en ce point, menons la tangente MT à cette courbe dans le sens du parcours choisi. Prenons sur l'aire A un point M', infiniment voisin du point M, et, en M', menons la normale M'N à l'aire A dans un sens tel que le système des deux droites MT, M'N forme un système dont le sens de rotation soit positif.

Cela fait, si nous déplaçons le point M' sur l'aire A, nous pourrons l'amener successivement à coïncider avec chacun des points μ de cette aire, puisque cette aire est linéairement connexe par hypothèse.

Si nous amenons le point M′ au point μ par un chemin déterminé M′Pμ, la demi-droite M′N variera d'une manière continue, de manière à venir occuper une position parfaitement déterminée μν.

Fig. 11.

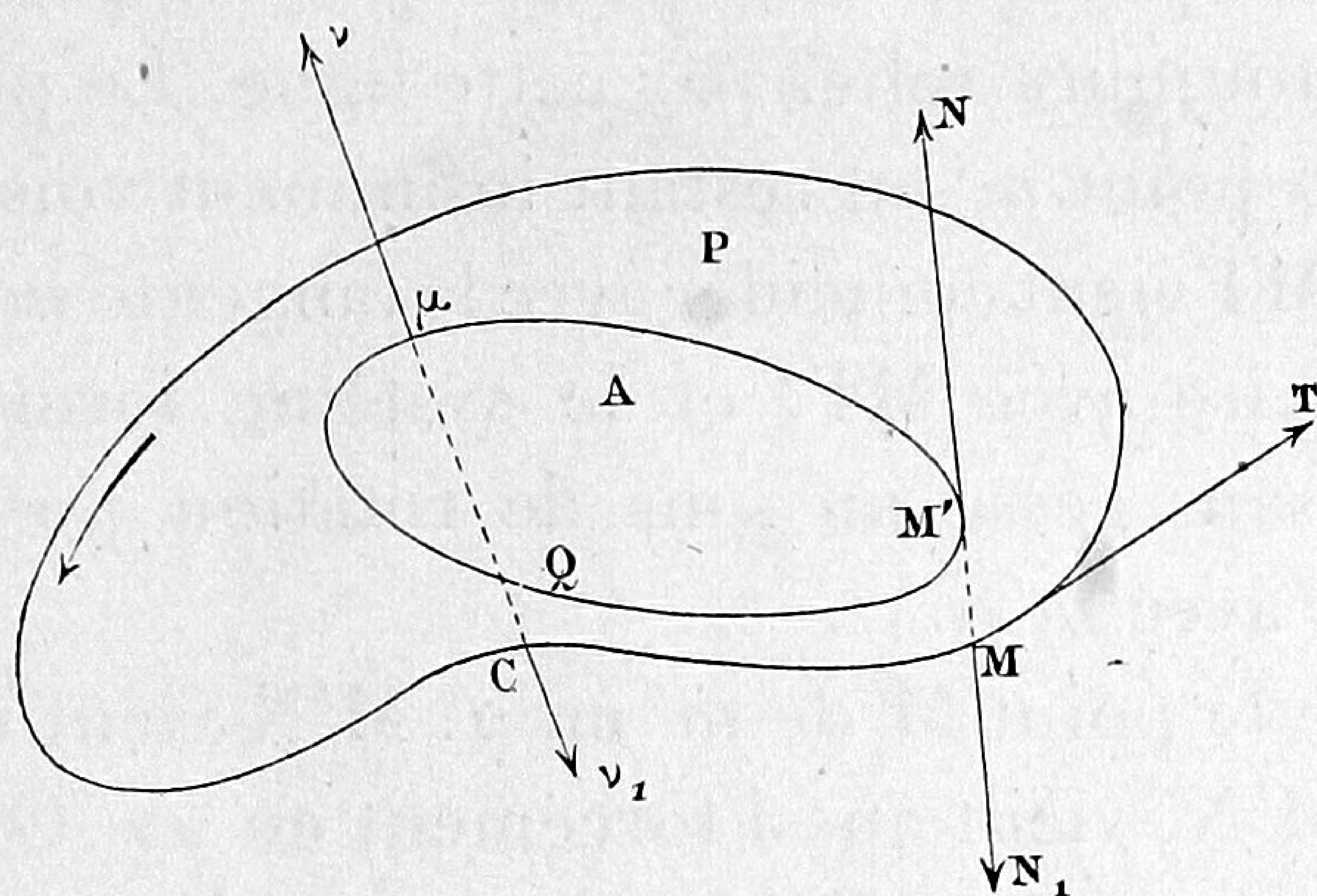


En premier lieu, on peut montrer que la droite M′N vient encore se placer suivant μν, si le point M′ vient au point M par un autre chemin M′Qμ.

En effet, le plan tangent au point μ à l'aire A étant unique, la droite M′N ne peut venir prendre que l'orientation μν ou l'orien-

tation directement opposée $\mu\nu_1$. Supposons que, lorsque le point M′ vient en μ, suivant le chemin M′Qμ, la droite M′N vienne se placer suivant $\mu\nu_1$. Inversement, le point μ venant en M′ suivant le chemin μQM′, la droite $\mu\nu_1$ viendrait se placer suivant M′N, et la droite $\mu\nu$ suivant la direction M′N_1 directement opposée à M′N.

Fig. 12.

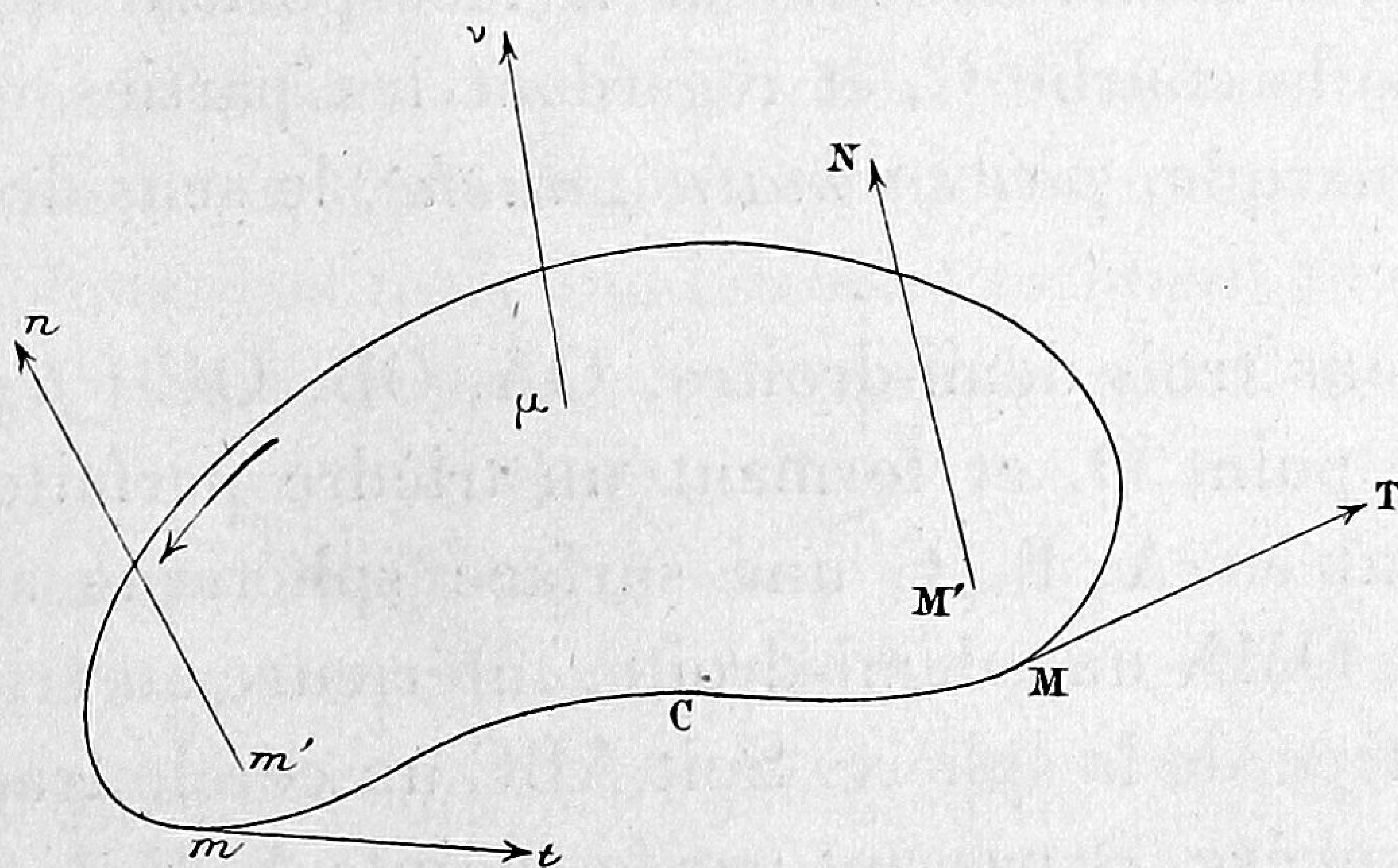


Cela posé, imaginons que l'on fasse suivre au point M′ le chemin fermé M′PμQM′. On voit que la droite M′N viendrait, après ce parcours, se placer suivant M′N_1, ce qui est impossible, puisque l'aire est, par hypothèse, une aire à deux côtés.

En second lieu, on peut prouver que la direction $\mu\nu$, ainsi déterminée sur la normale en μ, demeure la même, quelle que soit la position du point M sur la courbe C.

Supposons, en effet (*fig.* 13), qu'au lieu de choisir initiale-

Fig. 13.



ment le système à sens de rotation positif, formé par la tangente MT et la normale M′N, on ait choisi le système à sens de rotation positif formé par la tangente *mt* et la normale *m′n*.

De quelque manière que l'on amène le point M' au point μ de l'aire A, la demi-droite M'N viendra prendre une direction déterminée $\mu\nu$.

Or on peut supposer que l'on amène le point M' au point μ par l'itinéraire suivant :

1° Le point M va au point m en suivant la courbe C, ce qui est toujours possible, puisque deux points quelconques de la courbe C sont supposés toujours reliés par cette ligne. Le point M' vient en même temps au point m' en restant infiniment voisin de M.

La tangente MT vient coïncider avec la tangente mt. La droite M'N reste rectangulaire avec MT, et le système formé par ces deux droites garde sans cesse un sens de rotation positif. Donc M'N vient coïncider avec $m'n$.

2° On amène le point M' de m' en μ. M'N vient en $\mu\nu$; $m'n$, qui coïncide avec M'N, vient aussi forcément en $\mu\nu$. On obtient donc, pour la demi-normale au point μ, la même direction $\mu\nu$, que l'on ait pris pour point de départ le point m ou le point M.

Nous avons ainsi défini, sans aucune ambiguïté, un certain côté de l'aire A limitée par la courbe C. Ce côté se nomme la *face positive de l'aire* A.

D'après ce que nous venons de dire, cette face positive est toujours reconnaissable aux caractères suivants :

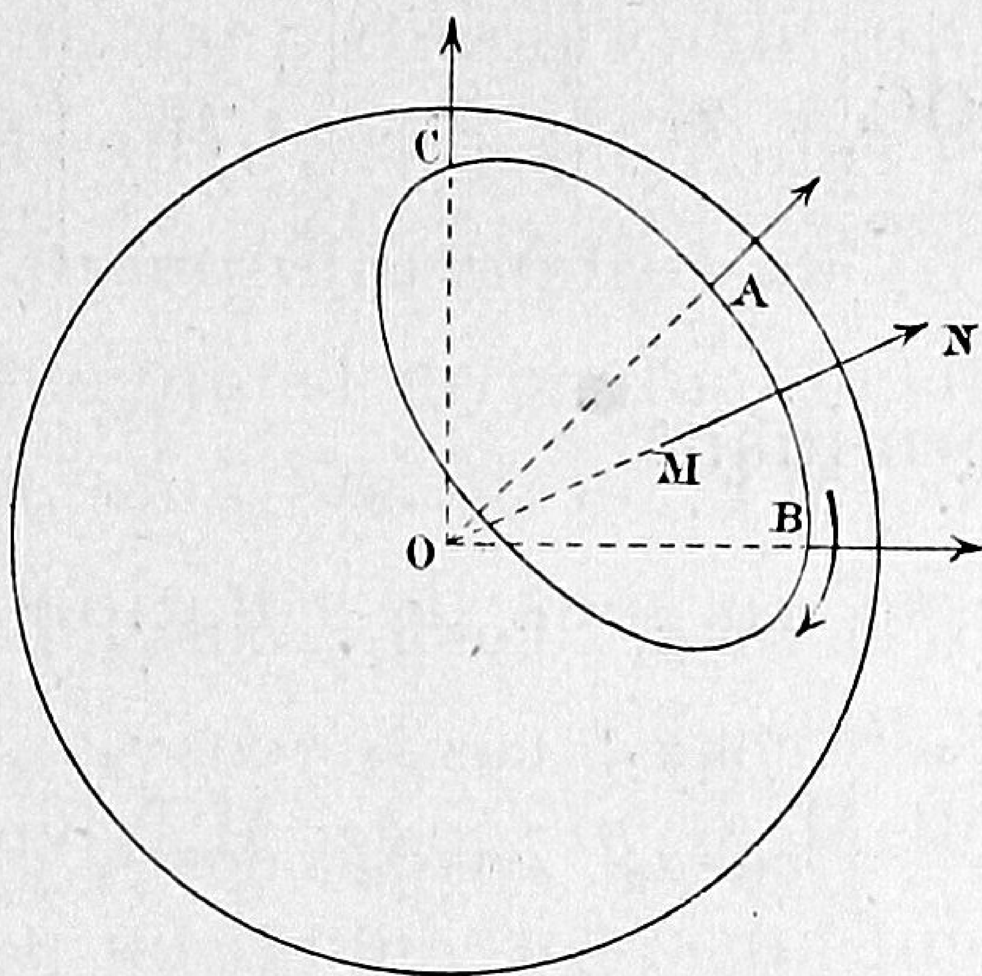
1° Un observateur, couché suivant la tangente MT à la courbe C dans le sens de parcours de cette courbe et regardant la partie voisine de l'aire A, a *à sa gauche* la face positive de l'aire A ;

2° Un observateur, debout sur la face positive de l'aire A, au voisinage de la courbe C, et regardant les parties voisines de la courbe C, marque, *par sa main gauche,* le sens de parcours de cette courbe.

Considérons trois demi-droites, OA, OB, OC (*fig.* 14), issues d'un même point O, et formant un trièdre parfaitement défini. Elles percent en A, B, C une surface sphérique ayant O pour centre. Soit OMN une demi-droite, intérieure au trièdre, perçant en M la surface de la sphère. Soit ABC un cercle tracé sur la surface de la sphère, et passant par les points A, B, C, ce cercle divise la sphère en deux calottes, dont une, MABC, renferme le point M. Supposons ce cercle ABC parcouru dans le sens marqué par l'ordre des lettres. Si MN marque la face positive de la ca-

lotte MABC, on dit que *le trièdre* OABC *a un sens de rotation positif*. Si, au contraire, ainsi qu'il arrive dans la *fig.* 14, MN marque la face négative de la même calotte, on dit que le trièdre OABC a un sens de rotation négatif.

Fig. 14.



Lorsque le trièdre OABC a un sens de rotation positif, on voit aisément que, si un observateur est placé suivant OA et regarde OB, la demi-droite OC se trouve à sa gauche.

Nous supposerons, conformément à l'usage, que le trièdre Ox, Oy, Oz, formé par les directions positives des axes de coordonnées, *a un sens de rotation négatif*.

Nous allons chercher des caractères analytiques qui nous permettent de reconnaître le signe du sens de rotation d'un trièdre ou d'un couple de droites.

Considérons tout d'abord un trièdre.

Si nous supposons que l'on fasse varier d'une manière continue l'orientation des trois demi-droites qui forment un trièdre, sans qu'à aucun moment ces trois demi-droites viennent se placer dans un même plan, il est facile de voir que le signe du trièdre ne changera pas.

Par un déplacement de ce genre, nous pourrons amener le trièdre OABC à être trirectangle; puis les deux droites OA, OB à coïncider respectivement avec Ox, Oy. OC viendra alors se placer suivant Oz si le trièdre OABC est négatif, et suivant Oz' si ce trièdre est positif.

Cela posé, adoptons les notations suivantes pour les angles des demi-droites OA, OB, OC avec les axes :

	Ox	Oy	Oz
OA	α_1	β_1	γ_1
OB	α_2	β_2	γ_2
OC	α_3	β_3	γ_3

et considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant varie d'une manière continue avec l'orientation des demi-droites OA, OB, OC; il ne devient égal à o que si les trois demi-droites se placent dans un même plan.

Supposons le trièdre OABC positif; nous pouvons, sans qu'à aucun moment les trois demi-droites qui le composent se trouvent dans un même plan, l'amener à coïncider avec le trièdre $Oxyz'$. Le déterminant Δ, sans jamais changer de signe, viendra alors coïncider avec le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

qui est négatif; il était donc primitivement négatif.

Supposons, au contraire, le trièdre OABC négatif; nous pourrons, sans qu'à aucun moment les trois demi-droites qui le composent se trouvent dans un même plan, l'amener à coïncider avec le trièdre $Oxyz$. Le déterminant Δ, sans jamais changer de signe, viendra alors coïncider avec le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

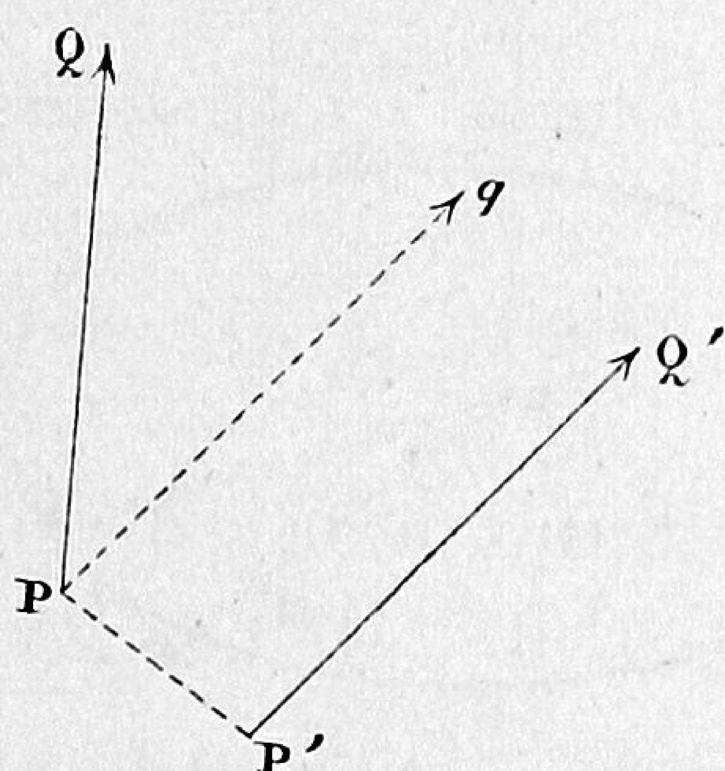
qui est positif; il était donc primitivemen.

Ainsi le trièdre OABC *a un sens de rotation dont le signe est contraire à celui du déterminant*

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Considérons maintenant un couple de deux droites PQ, P′Q′ (*fig.* 15). Il est facile de voir, d'après les définitions données, que

Fig. 15.



le sens de rotation de ce couple est identique au sens de rotation du trièdre PQP′q, Pq étant une parallèle menée par le point P à la direction P′Q′.

Soient

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point P,
x'_0, y'_0, z'_0 les coordonnées du point P′,
α, β, γ les angles de la droite PQ avec les axes,
α', β', γ' les angles de la droite P′Q′ avec les axes;
r la distance PP′.

Le signe du trièdre PQP′q est, d'après ce qui précède, contraire à celui du déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{x'_0 - x_0}{r} & \dfrac{y'_0 - y_0}{r} & \dfrac{z'_0 - z_0}{r} \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}.$$

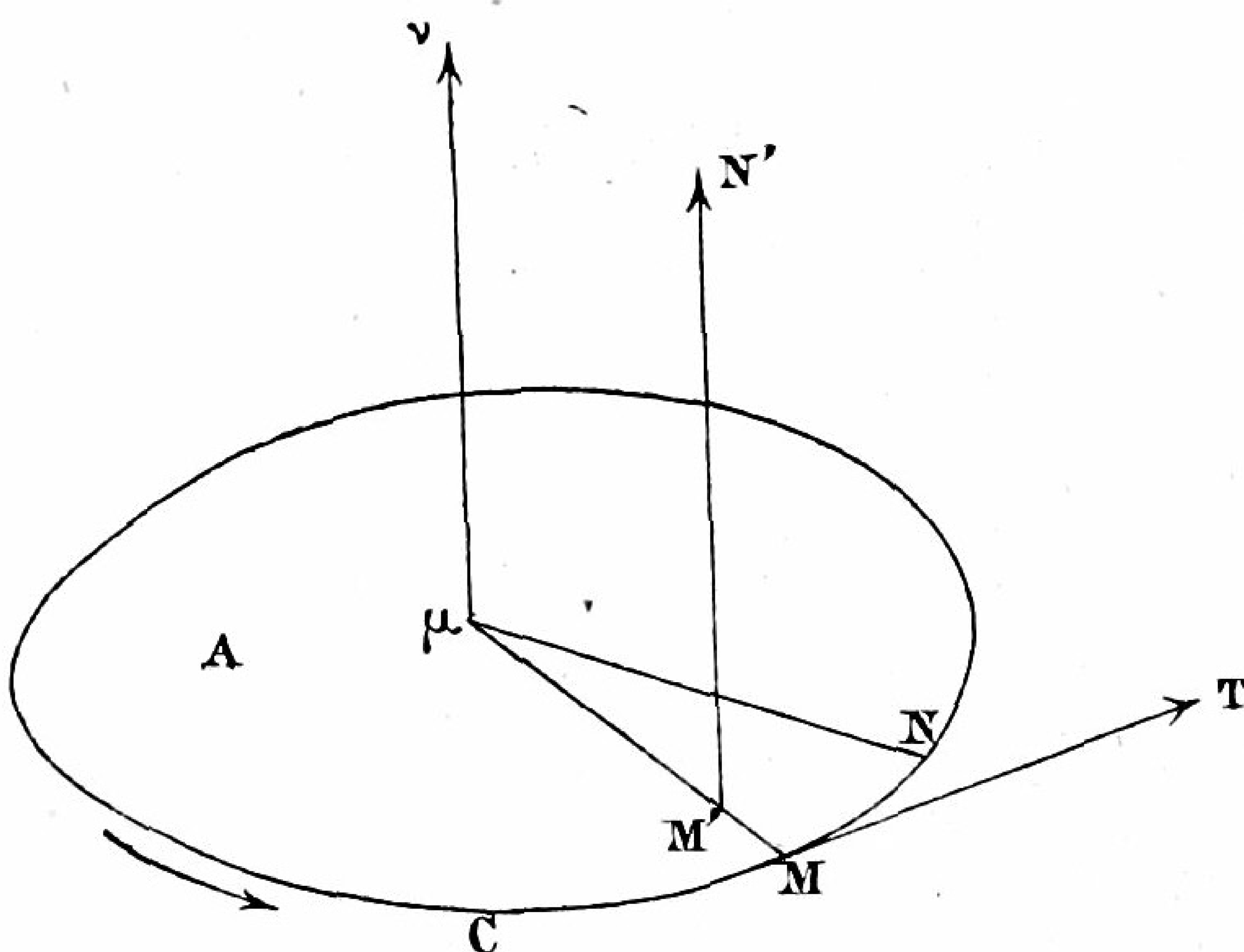
On voit donc que *le signe du sens de rotation du système de*

deux droites PQ, P′Q′ *est identique au signe du déterminant*

$$\begin{vmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}.$$

Imaginons maintenant une aire plane A, linéairement connexe, limitée par une courbe convexe C (*fig.* 16). Soient $M(x, y, z)$ et $M(x + dx, y + dy, z + dz)$ deux points voisins de la courbe C,

Fig. 16.



se suivant dans le sens du parcours. Soit $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ un point intérieur à l'aire A.

En μ, élevons la normale $\mu\nu$ au côté positif de l'aire A. Il est aisé de voir que la normale $\mu\nu$ forme un système à sens de rotation positif avec la tangente MT en M à la courbe C.

En effet, joignons μM. Sur cette ligne prenons un point M′, infiniment voisin du point M. Il se trouvera à l'intérieur de la courbe A, puisque l'aire est supposée convexe.

En M′ menons une parallèle M′N′ à $\mu\nu$. Cette droite M′N′, étant normale à la face positive de A, formera avec MT un système dont le sens de rotation sera positif.

Il en est évidemment de même du système $\mu\nu$, MT, la droite $\mu\nu$ et la droite M′N étant parallèles, de même sens et situées du même côté de MT.

Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale $\mu\nu$. Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\begin{vmatrix} x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ a & b & c \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \end{vmatrix} > 0$$

ou, en développant le déterminant,

$$(\alpha)\quad \begin{cases} a\left[(y-\eta)\dfrac{dz}{ds}-(z-\zeta)\dfrac{dy}{ds}\right] \\ +\,b\left[(z-\zeta)\dfrac{dx}{ds}-(x-\xi)\dfrac{dz}{ds}\right] \\ +\,c\left[(x-\xi)\dfrac{dy}{ds}-(y-\eta)\dfrac{dx}{ds}\right] < 0. \end{cases}$$

Mais, d'autre part, on a

$$(\beta)\quad \begin{cases} a = k\left[(y-\eta)\dfrac{dz}{ds}-(z-\zeta)\dfrac{dy}{ds}\right], \\ b = k\left[(z-\zeta)\dfrac{dx}{ds}-(x-\xi)\dfrac{dz}{ds}\right], \\ c = k\left[(x-\xi)\dfrac{dy}{ds}-(y-\eta)\dfrac{dx}{ds}\right], \end{cases}$$

avec la condition

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

D'après les égalités (β) elles-mêmes, celle-ci devient

$$k^2\left\{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] - \left[(x-\xi)\frac{dx}{ds}+(y-\eta)\frac{dy}{ds}+(z-\zeta)\frac{dz}{ds}\right]^2\right\}=1$$

ou bien, d'après une relation connue,

$$k^2\,\frac{4\delta^2}{ds^2}=1,$$

δ étant la surface du triangle $M\mu N$.

Si donc nous désignons par ε une quantité égale à $+1$ ou à -1, nous pourrons écrire les égalités (β),

$$a=\varepsilon\,\frac{(y-\eta)\,dz-(z-\zeta)\,dy}{2\delta},$$

$$b=\varepsilon\,\frac{(z-\zeta)\,dx-(x-\xi)\,dz}{2\delta},$$

$$c=\varepsilon\,\frac{(x-\xi)\,dy-(y-\eta)\,dx}{2\delta}.$$

En reportant ces valeurs dans l'inégalité (α), nous voyons

que ε a nécessairement la valeur -1, et nous trouvons enfin les relations

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} 2a\delta &= -[(y-\eta)\,dz-(z-\zeta)\,dy],\\ 2b\delta &= -[(z-\zeta)\,dx-(x-\xi)\,dz],\\ 2c\delta &= -[(x-\xi)\,dy-(y-\eta)\,dx].\end{aligned}\right.$$

Formons, pour tous les éléments $MM' = ds$ de la courbe C, les égalités analogues à la première des égalités (γ), et ajoutons-les membre à membre. Nous aurons

$$2a\sum\delta = \int(z\,dy - y\,dz) + \eta\int dz - \zeta\int dy.$$

Or les quantités $\int dy$, $\int dz$, qui représentent les projections de la courbe fermée C sur Oy et sur Oz sont égales à 0, et l'on trouve ainsi l'égalité

$$2a\sum\delta = \int(z\,dy - y\,dz),$$

que l'on peut encore transformer en remarquant que

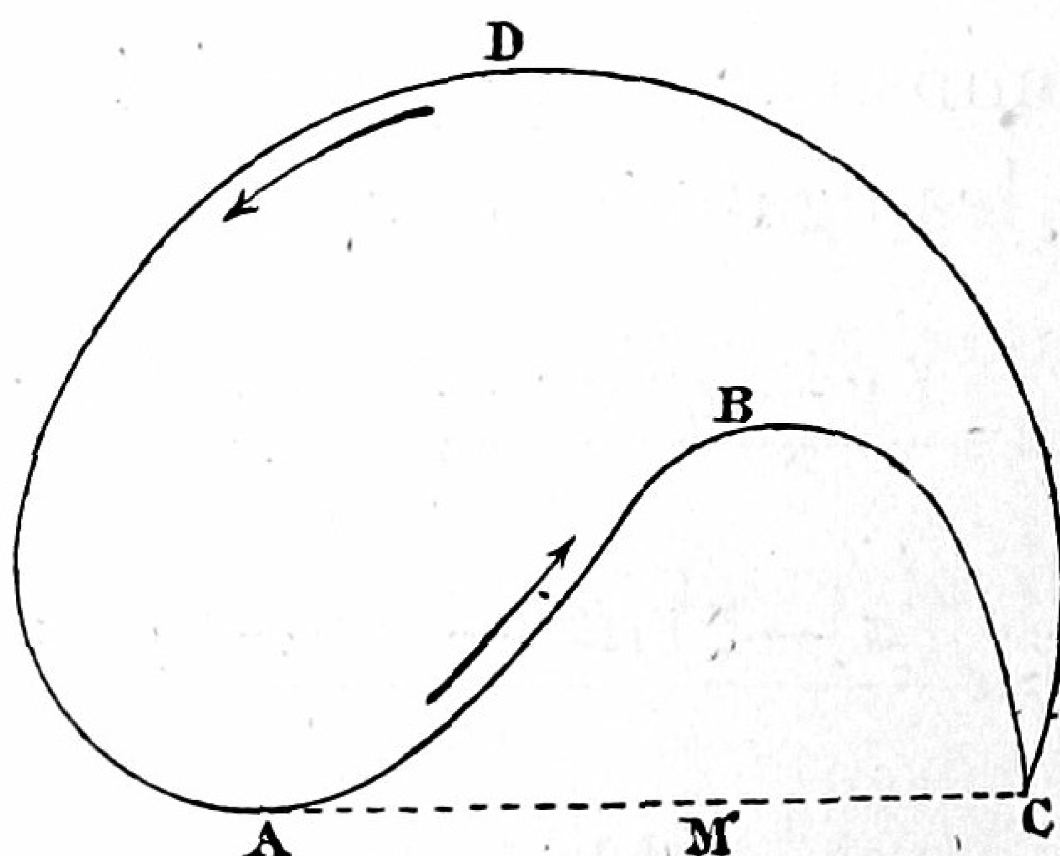
$$\sum\delta = \Omega$$

est l'aire enfermée par la courbe C.

Pour démontrer cette égalité, nous avons supposé la courbe C convexe. Mais il est facile d'étendre cette démonstration au cas où la courbe C n'est pas convexe.

Prenons, par exemple, l'aire plane non convexe A entourée par

Fig. 17.



la courbe ABCDA (*fig.* 17). Elle est l'excès de l'aire convexe A_1 entourée par la courbe AMCDA sur l'aire convexe A_2 entourée

par la courbe ABCMA. Si Ω, Ω_1, Ω_2 sont les valeurs des aires A, A_1, A_2, on aura

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_2.$$

L'aire A_1 a même face positive que l'aire A; a a donc la même valeur pour ces deux aires, et l'on pourra écrire

$$2a\Omega_1 = \int_{\text{AMC}} (z\,dy - y\,dz) + \int_{\text{CDA}} (z\,dy - y\,dz).$$

La face positive de l'aire A_2 coïncide avec la face négative de l'aire A. La normale à la face positive de l'aire A_2 a donc pour cosinus directeurs $-a$, $-b$, $-c$, et l'on a

$$-2a\Omega_2 = \int_{\text{ABC}} (z\,dy - y\,dz) + \int_{\text{CMA}} (z\,dy - y\,dz).$$

Ajoutons, membre à membre, ces deux égalités, en remarquant que

$$\int_{\text{AMC}} (z\,dy - y\,dz) + \int_{\text{CMA}} (z\,dy - y\,dz) = 0,$$

et nous aurons

$$2a\Omega = \int_{\text{ABCDA}} (z\,dy - y\,dz),$$

ce qui est la formule déjà obtenue pour une courbe convexe.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point qui parcourt une courbe plane fermée C, *dans un sens donné; soit Ω l'aire enfermée par cette courbe; soient enfin* (N, x), (N, y), (N, z) *les angles que fait avec les axes la normale à la face positive de cette aire. On a*

$$(1) \quad \begin{cases} 2\Omega\cos(\text{N}, x) = \int_{\text{C}} (z\,dy - y\,dz), \\ 2\Omega\cos(\text{N}, y) = \int_{\text{C}} (x\,dz - z\,dx), \\ 2\Omega\cos(\text{N}, z) = \int_{\text{C}} (y\,dx - x\,dy). \end{cases}$$

Ces égalités vont nous servir dans la démonstration de l'important théorème qui fait l'objet du paragraphe suivant.

§ 2. — Théorème de Stokes.

Considérons une courbe C fermée, plane, infiniment petite, sur laquelle un sens de parcours est donné.

Soient $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ trois fonctions de x, y, z, qui sont uniformes, finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, dans un domaine à l'intérieur duquel se trouve située la courbe C. Nous allons transformer l'intégrale

$$\int_C (U\,dx + V\,dy + W\,dz).$$

Soit $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ un point intérieur à l'aire limitée par la courbe C. Nous aurons

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = U(\xi, \eta, \zeta) &+ (x - \xi)\frac{\partial}{\partial \xi} U(\xi, \eta, \zeta) \\ &+ (y - \eta)\frac{\partial}{\partial \eta} U(\xi, \eta, \zeta) \\ &+ (z - \xi)\frac{\partial}{\partial \zeta} U(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_C U(x, y, z)\,dx = U(\xi, \eta, \zeta)\int_C dx & \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} U(\xi, \eta, \zeta)\int_C (x - \xi)\,dx & \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} U(\xi, \eta, \zeta)\int_C (y - \eta)\,dx & \\ + \frac{\partial}{\partial \zeta} U(\xi, \eta, \zeta)\int_C (z - \zeta)\,dx. & \end{aligned}$$

On a, d'après le théorème fondamental sur les intégrales curvilignes (Chap. I, § 2),

$$\int_C dx = 0,$$

$$\int_C x\,dx = \int_C d\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

On voit alors que l'égalité précédente peut s'écrire

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_C U(x,y,z)\,dx = {} & \frac{\partial}{\partial\eta} U(\xi,\eta,\zeta) \int_C y\,dx \\ & + \frac{\partial}{\partial\zeta} U(\xi,\eta,\zeta) \int_C z\,dx. \end{aligned} \right.$$

Mais on a, d'après la propriété fondamentale des intégrales curvilignes,

$$\int_C (y\,dx + x\,dy) = \int_C d(xy) = 0$$

et, d'après la dernière égalité (1),

$$\int_C (y\,dx - x\,dy) = 2\Omega \cos(N, z).$$

On conclut aisément de là

$$\int_C y\,dx = \Omega \cos(N, z), \qquad \int_C x\,dy = -\Omega \cos(N, z),$$

et de même

$$\int_C z\,dx = -\Omega \cos(N, y), \qquad \int_C x\,dz = \Omega \cos(N, y).$$

L'égalité (α) devient donc

$$\int_C U(x,y,z)\,dx = \Omega \left[\cos(N, z) \frac{\partial}{\partial\eta} U(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N, y) \frac{\partial}{\partial\zeta} U(\xi,\eta,\zeta) \right].$$

En ajoutant membre à membre cette égalité et deux autres analogues que l'on obtiendrait de la même manière, on arrive à l'identité

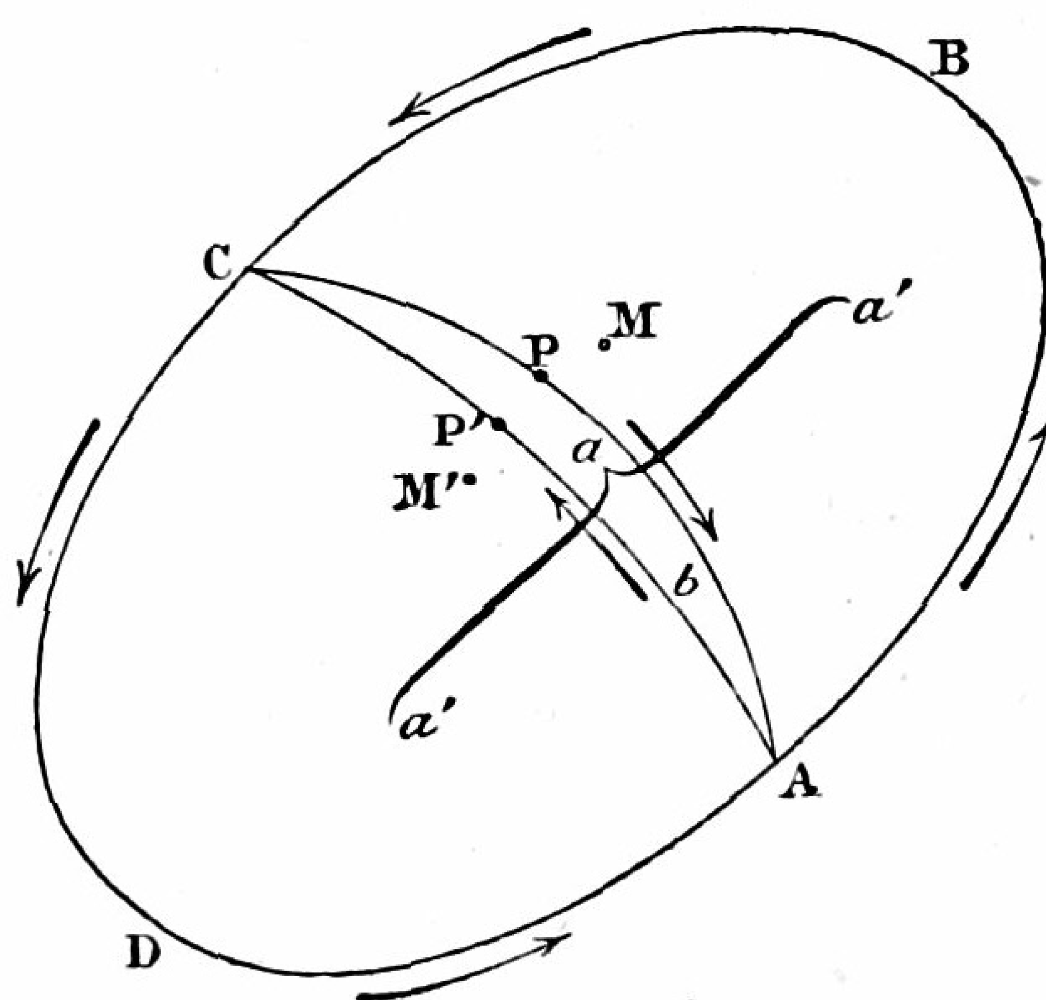
$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_C [U(x,y,z)\,dx + V(x,y,z)\,dy + W(x,y,z)\,dz] \\ & = \Omega \Big\{ \left[\cos(N, z) \frac{\partial}{\partial\eta} U(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N, y) \frac{\partial}{\partial\zeta} U(\xi,\eta,\zeta) \right] \\ & \qquad + \left[\cos(N, x) \frac{\partial}{\partial\zeta} V(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N, z) \frac{\partial}{\partial\xi} V(\xi,\eta,\zeta) \right] \\ & \qquad + \left[\cos N, y) \frac{\partial}{\partial\xi} W(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N, x) \frac{\partial}{\partial\eta} W(\xi,\eta,\zeta) \right] \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Cette identité peut s'étendre à une courbe quelconque, si l'on

peut faire passer par cette courbe une aire vérifiant toutes les conditions nécessaires pour que l'on en puisse définir la face positive. Cette extension repose sur un lemme que nous allons établir.

Considérons une aire a à deux côtés (*fig.* 18). Soit ABCDA le contour qui la limite, avec son sens de parcours. Joignons le

Fig. 18.



point A au point C par deux chemins infiniment voisins APC, AP′C, qui n'ont aucun point commun en dehors des points A et C, et comprennent entre eux une aire infiniment étroite b contenue dans l'aire considérée a.

Si, de l'aire considérée a on retranche cette aire infiniment étroite b, il reste une aire a' dont le contour est ou bien ABCPAP′CDA, ou bien ABCP′APCDA, selon la manière dont ont été placées les lettres P et P′. Supposons ces lettres placées de manière que le contour en question soit parcouru dans le sens indiqué par la première série de lettres.

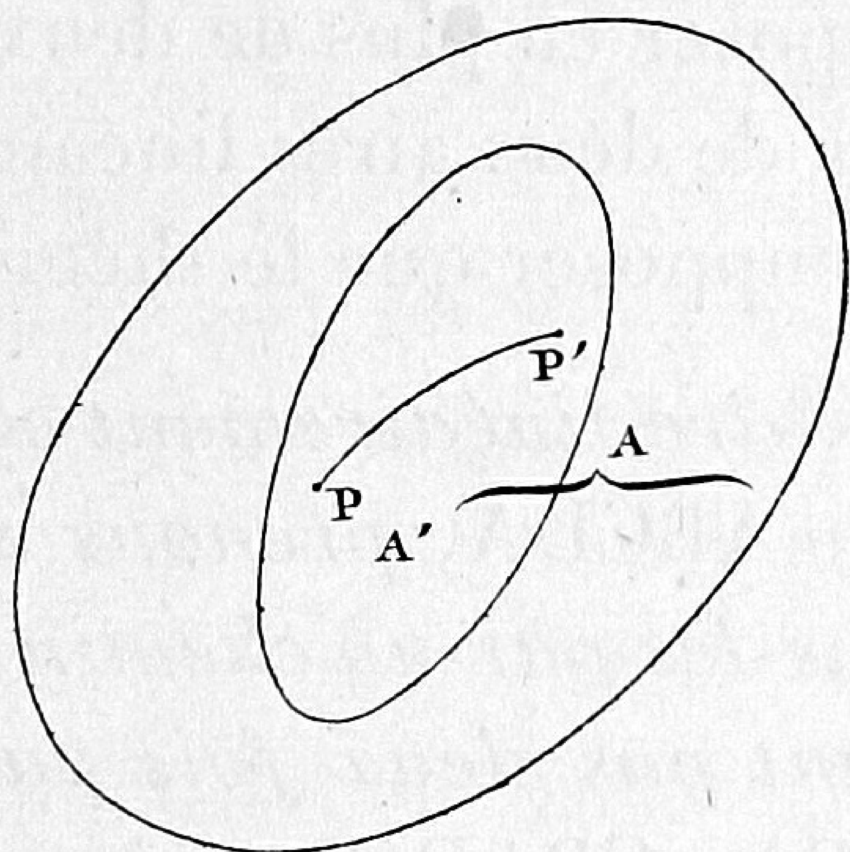
Je dis que le contour en question limite non pas une seule aire linéairement connexe, mais deux aires linéairement connexes distinctes, de telle façon qu'il soit impossible de faire passer un point de l'une en un point de l'autre par un chemin situé entièrement sur l'aire totale a' considérée et ne rencontrant pas le contour.

Pour le démontrer, je remarque en premier lieu que *toute aire tracée à l'intérieur d'une aire à deux côtés est une aire à deux côtés.*

Soient en effet (*fig.* 19) A une aire à deux côtés; A′ une aire tracée à l'intérieur de celle-ci; soient P et P′ deux points de l'aire A′; supposons que l'on parte du point P avec une orientation donnée de la normale à l'aire A′, et qu'on arrive au point P′ avec une

orientation de normale à l'aire A′ qui dépende du chemin tracé sur l'aire A′ que l'on a suivi; c'est admettre que, partant du point P de l'aire A avec une orientation donnée de normale à l'aire A, on arriverait au point P′ de l'aire A avec une orientation différente de normale à l'aire A, selon le chemin, tracé sur l'aire A, que l'on aurait suivi; c'est admettre, en d'autres termes, que, contrairement à l'hypothèse, l'aire A ne serait pas une aire à deux côtés.

Fig. 19.



D'après la proposition que nous venons d'établir, l'aire a' (*fig.* 18), si elle forme une seule aire linéairement connexe, doit être, comme l'aire a, une aire à deux côtés; si l'on observe de plus que ces deux aires ont en commun une partie de leur contour et le sens de parcours de cette partie du contour, on voit sans peine que leurs côtés positifs coïncident en tout point.

Or prenons deux points infiniment voisins P, P′, sur les chemins CPA, AP′C. Soit M un point de l'aire a', que l'on puisse amener au point P par un chemin infiniment petit situé sur l'aire a'; soit M′ un point de l'aire a' que l'on puisse amener au point P′ par un chemin infiniment petit situé sur l'aire a'.

La normale à la face positive de l'aire a' en M forme un système à rotation positive avec la tangente en P au chemin CPA; la normale à la face positive de l'aire a' en M′ forme un système à rotation positive avec la tangente en P′ au chemin AP′C. Or les tangentes en P et P′ aux chemins CPA, AP′C sont sensiblement de sens contraire. Donc les normales à la face positive de l'aire a' en M et en M′ sont sensiblement de sens contraire. D'ailleurs ces normales coïncident, d'après ce que nous avons vu, avec les normales aux points M et M′ à la face positive de a. Donc les nor-

males en M et M′ à la face positive de a sont sensiblement de sens contraire.

D'autre part, du point M au point M′, on peut passer, d'après les hypothèses faites, par un chemin MPP′M′ infiniment petit tracé sur l'aire a'. Donc, d'après les hypothèses faites sur cette dernière, les normales à la face positive de A en M et en M′ sont sensiblement de même sens, résultat contradictoire avec le précédent.

On ne peut donc pas supposer que la ligne ABCPAP′CDA forme le contour d'une aire linéairement connexe a'. D'ailleurs, elle ne peut se décomposer en plus de deux courbes fermées et ne peut donc limiter plus de deux aires linéairement connexes.

On doit forcément supposer que le théorème suivant est exact :

Étant donnée une aire linéairement connexe à deux côtés a limitée par la courbe ABCDA, *prenons deux points* A, C, *sur cette courbe; joignons-les par un chemin* APC, *tracé sur l'aire donnée, et ne passant pas deux fois par le même point; les deux contours* ABCPA, CPADC *limiteront chacun une aire linéairement connexe à deux côtés, dont la face positive coïncidera avec la face positive de l'aire a.*

Considérons l'intégrale

$$\int (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz),$$

étendue au contour ABCD. Désignons-la par

$$[\mathrm{ABCD}].$$

Nous aurons

$$[\mathrm{ABCD}] = [\mathrm{ABC}] + [\mathrm{CDA}].$$

Remarquons que l'on a évidemment

$$[\mathrm{CPA}] + [\mathrm{APC}] = 0,$$

et nous aurons

$$[\mathrm{ABCD}] = [\mathrm{ABC}] + [\mathrm{CPA}] + [\mathrm{APC}] + [\mathrm{CDA}].$$

Mais on a

$$[\mathrm{ABC}] + [\mathrm{CPA}] = [\mathrm{ABCPA}],$$
$$[\mathrm{APC}[+ [\mathrm{CDA}] = [\mathrm{APCDA}].$$

On a donc

$$[\mathrm{ABCDA}] = [\mathrm{ABCPA}] + [\mathrm{APCDA}].$$

On peut donc ajouter au théorème précédent la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz),$$

prise le long du contour ABCDA, *est égale à la somme des intégrales analogues prises le long des contours* ABCPA, ABCDA.

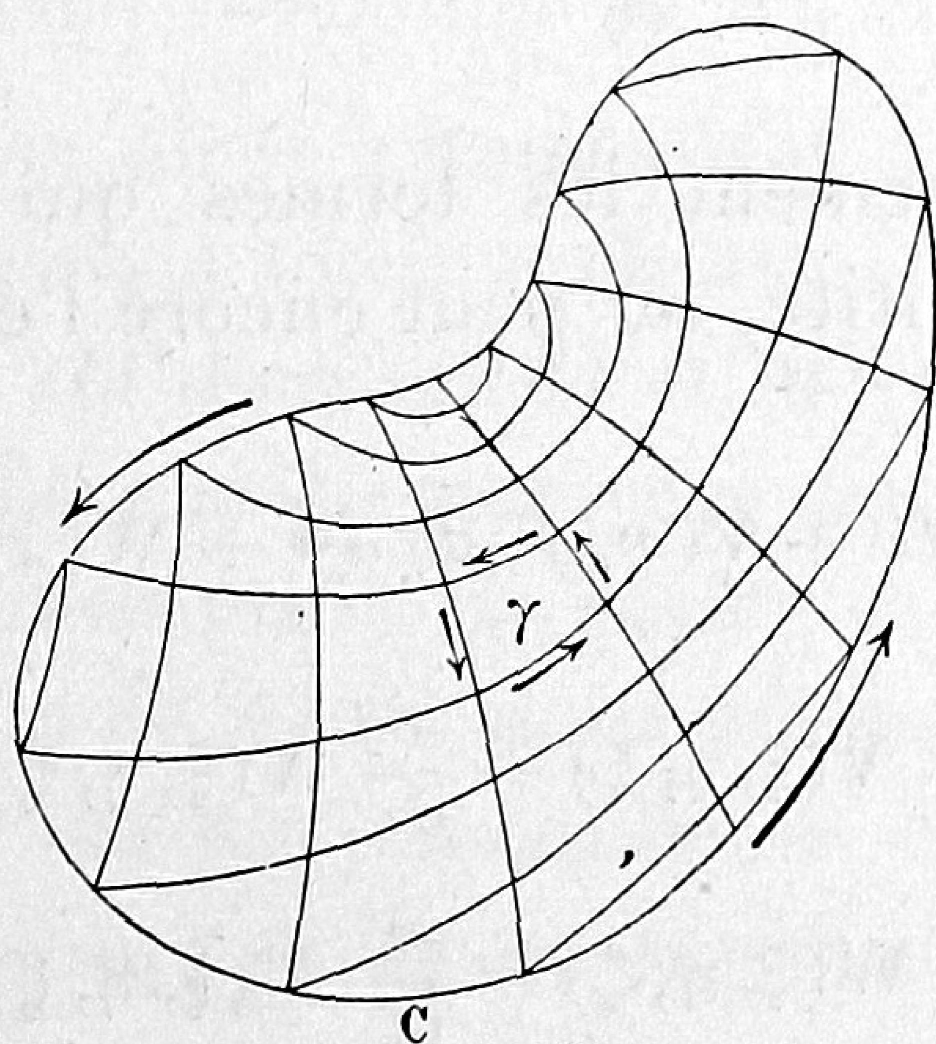
Il importait de démontrer l'exactitude de ces théorèmes pour les aires à deux côtés, car ils ne sont point exacts pour les aires à un seul côté; si l'on coupe suivant AB la surface représentée par la *fig.* 11, on ne la sépare pas en deux aires; on en forme une seule aire, applicable sur le rectangle ABCD (*fig.* 10) qui a servi à former la surface.

On peut, sur chacun des deux contours ABCPA, APCDA, reprendre des démonstrations analogues aux précédentes, puis raisonner encore de même sur les aires en lesquelles on aura partagé celles qu'enferment ces deux contours, et ainsi de suite indéfiniment.

On arrivera ainsi à justifier l'énoncé suivant :

Par deux systèmes de lignes convenablement tracées, divisons l'aire A (*fig.* 20) en éléments de surface. Supposons le contour γ

Fig. 20.



de chacun de ces éléments parcouru dans un sens tel que cet élément ait même face positive que l'aire A. Nous aurons

$$\int_{\mathrm{C}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz) = \sum \int_{\gamma} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz).$$

Cela posé, remarquons que chacun des éléments superficiels que nous venons de considérer peut être regardé comme un élément plan situé dans le plan tangent à la surface A en un point de cet élément; appliquons-lui l'identité (2); ajoutons membre à membre toutes ces identités, et nous aurons démontré le théorème suivant :

Soient x, y, z les coordonnées d'un point qui décrit dans un sens déterminé une courbe fermée C, *et* $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$, $W(x,y,z)$ *trois fonctions de* x, y, z, *finies, continues et uniformes, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, dans l'espace où se trouve la courbe* C.

Par la courbe C, *passe une aire* A *à deux côtés; soient* $d\Omega$ *un élément de l'aire* A; ξ, η, ζ *les coordonnées d'un point de cet élément;* N *la direction de la normale à la face positive de l'aire* A *au point* (ξ, η, ζ).

On a l'identité

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_C [U(x,y,z)\,dx + V(x,y,z)\,dy + W(x,y,z)\,dz] \\ &= S_A \Big\{ \left[\cos(N,z)\frac{\partial}{\partial\eta}U(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,y)\frac{\partial}{\partial\zeta}U(\xi,\eta,\zeta)\right] \\ &\quad + \left[\cos(N,x)\frac{\partial}{\partial\zeta}V(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,z)\frac{\partial}{\partial\xi}V(\xi,\eta,\zeta)\right] \\ &\quad + \left[\cos(N,y)\frac{\partial}{\partial\xi}W(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,x)\frac{\partial}{\partial\eta}W(\xi,\eta,\zeta)\right]\Big\}\,d\Omega. \end{aligned}\right.$$

En groupant autrement les termes qui figurent au second membre de cette identité, on peut encore l'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_C [U(x,y,z)\,dx + V(x,y,z)\,dy + W(x,y,z)\,dz] \\ &= S_A \Big\{ \left[\frac{\partial}{\partial\zeta}V(\xi,\eta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\eta}W(\xi,\eta,\zeta)\right]\cos(N,x) \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial\xi}W(\xi,\eta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}U(\xi,\eta,\zeta)\right]\cos(N,y) \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial\eta}U(\xi,\eta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\xi}V(\xi,\eta,\zeta)\right]\cos(N,z)\Big\}\,d\Omega. \end{aligned}\right.$$

Cette identité est due à Stokes. Elle permet de transformer une intégrale curviligne simple, étendue à une courbe fermée, en

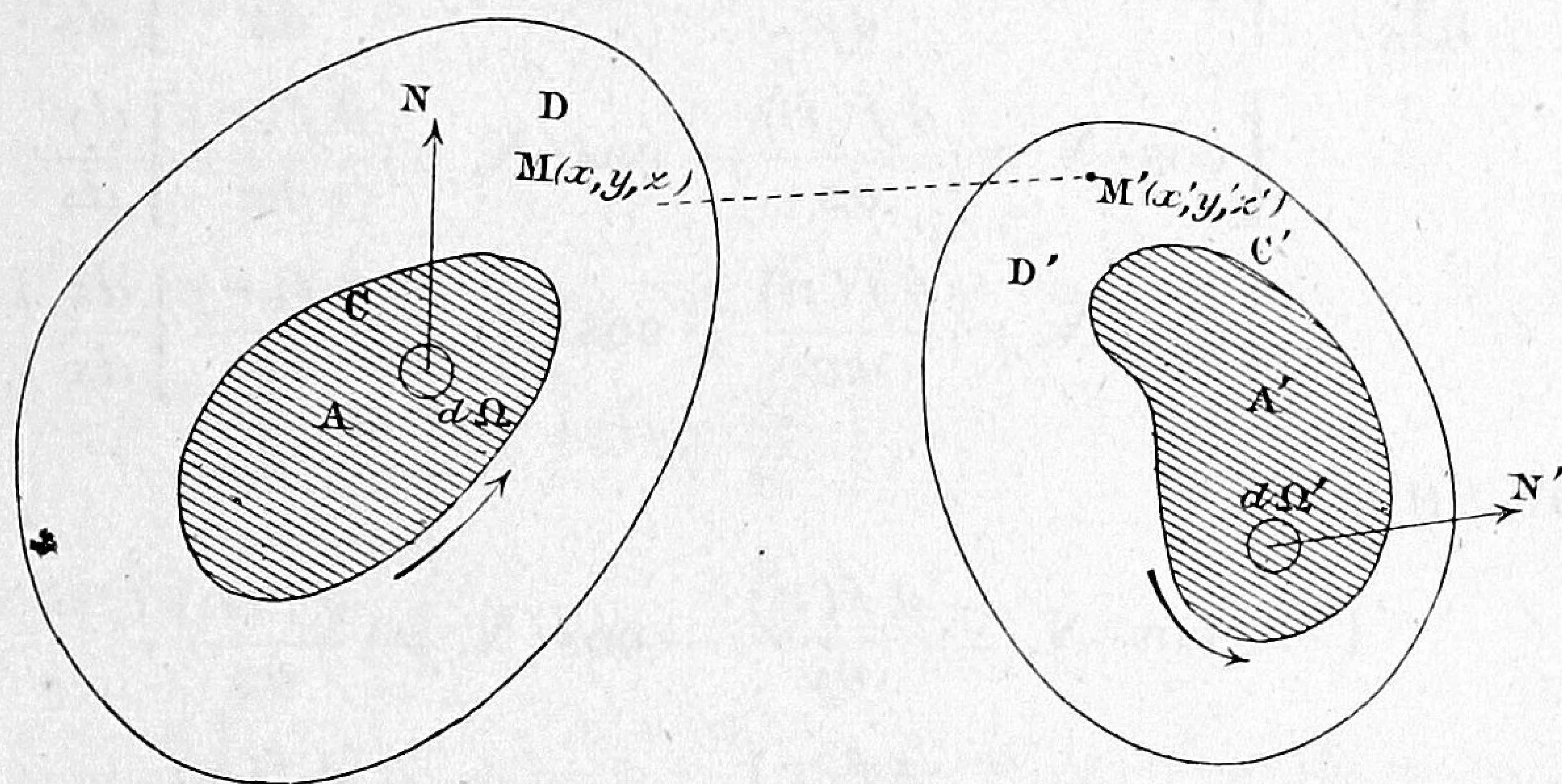
une intégrale double, étendue à une aire close limitée à cette courbe fermée. Elle joue un rôle fort analogue à l'identité de Green qui permet de transformer une intégrale double, étendue à une surface fermée, en une intégrale triple, étendue à l'espace que renferme cette surface.

§ 3. — Théorème d'Ampère.

Longtemps avant que Stokes eût donné ce théorème sous sa forme générale, Ampère ([1]), dans ses recherches d'Électrodynamique, avait employé des propositions particulières qui s'y rattachent. Nous allons déduire ici du théorème de Stokes l'une des plus importantes propositions d'Ampère.

Soient C et C′ deux courbes fermées (*fig.* 21), par lesquelles on

Fig. 21.



peut faire passer deux aires à deux côtés A et A′. Soient D et D′ deux domaines renfermant à leur intérieur les aires A et A′. Soient M(x, y, z) un point du domaine D et M′(x', y', z') un point du domaine D′. Soit enfin r la distance des deux points M et M′.

La distance r est susceptible de varier entre certaines limites. Soit $f(r)$ une fonction de r qui, pour toutes les valeurs de r comprises entre ces deux limites, est uniforme, finie et continue, ainsi que sa dérivée du premier ordre, sa dérivée du second ordre étant finie.

([1]) AMPÈRE, *Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 175; 1827). *Voir* aussi GAUSS, *Werke*, Bd. V, p. 606 et 625.

Proposons-nous de transformer l'intégrale curviligne double

$$\int_C \int_{C'} f(r)\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) ds'\, ds,$$

étendue à tous les éléments ds, ds', des deux courbes C et C'. Soient

$d\Omega$ un élément de l'aire A;
N la normale à la face positive de l'élément $d\Omega$;
$d\Omega'$ un élément de l'aire A';
N' la normale à la force positive de l'élément $d\Omega'$.

D'après l'égalité (3), nous aurons

$$\begin{aligned}\int_C \left[f(r)\frac{dx'}{ds'}\frac{dx}{ds} + f(r)\frac{dy'}{ds'}\frac{dy}{ds} + f(r)\frac{dz'}{ds'}\frac{dz}{ds}\right] ds \\ = \mathrm{S}_A \Bigg\{ &\left[\cos(N, z)\frac{\partial f(r)}{\partial y} - \cos(N, y)\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right]\frac{dx'}{ds'} \\ &+ \left[\cos(N, x)\frac{\partial f(r)}{\partial z} - \cos(N, z)\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right]\frac{dy'}{ds'} \\ &+ \left[\cos(N, y)\frac{\partial f(r)}{\partial x} - \cos(N, x)\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right]\frac{dz'}{ds'}\Bigg\} d\Omega.\end{aligned}$$

Si donc on pose

$$\begin{aligned} U' &= \cos(N, z)\frac{\partial f(r)}{\partial y} - \cos(N, y)\frac{\partial f(r)}{\partial z}, \\ V' &= \cos(N, x)\frac{\partial f(r)}{\partial z} - \cos(N, z)\frac{\partial f(r)}{\partial x}, \\ W' &= \cos(N, y)\frac{\partial f(r)}{\partial x} - \cos(N, x)\frac{\partial f(r)}{\partial y}, \end{aligned}$$

notre intégrale double pourra s'écrire

$$\mathrm{S}_A\, d\Omega \int_C (U'\, dx' + V'\, dy' + W'\, dz').$$

Une nouvelle application de l'égalité (3) lui donnera la forme

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_A \mathrm{S}_{A'} \Bigg\{ &\left[\cos(N', z)\frac{\partial U'}{\partial y'} - \cos(N', y)\frac{\partial U'}{\partial z'}\right] \\ &+ \left[\cos(N', x)\frac{\partial V'}{\partial z'} - \cos(N', z)\frac{\partial V'}{\partial x'}\right] \\ &+ \left[\cos(N', y)\frac{\partial W'}{\partial x'} - \cos(N', x)\frac{\partial W'}{\partial y'}\right]\Bigg\} d\Omega\, d\Omega'.\end{aligned}$$

Or, si l'on se reporte à la signification des fonctions U', V', W', on trouve

$$\cos(N', y)\frac{\partial W'}{\partial x'} - \cos(N', z)\frac{\partial V'}{\partial x'}$$

$$= [\cos(N, x)\cos(N', x) + \cos(N, y)\cos(N', y) + \cos(N, z)\cos(N', z)]\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x'}$$

$$- \cos(N, x)\left[\cos(N', x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x'} + \cos(N', y)\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x'} + \cos(N', z)\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x'}\right].$$

D'autre part,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x'} = -\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \left(\frac{x'-x}{r}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x'} = \frac{(x'-x)(y'-y)}{r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x'} = \frac{(x'-x)(z'-z)}{r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right).$$

Nous avons donc

$$\cos(N', y)\frac{\partial W'}{\partial x'} - \cos(N', z)\frac{\partial V'}{\partial x'}$$

$$= [\cos(N, x)\cos(N', x) + \cos(N, y)\cos(N', y) + \cos(N, z)\cos(N', z)]$$

$$\times\left[\left(\frac{x'-x}{r}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right]$$

$$+ \cos(N, x)\cos(N', x)\frac{1}{r}\frac{df}{dr}$$

$$- \cos(N, x)\frac{x'-x}{r}\left[\cos(N', x)\frac{x'-x}{r} + \cos(N', y)\frac{y'-y}{r} + \cos(N', z)\frac{z'-z}{r}\right]$$

$$\times\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right)$$

et, par conséquent,

$$\cos(N', y)\frac{\partial W'}{\partial x'} - \cos(N', z)\frac{\partial V'}{\partial x'}$$

$$+ \cos(N', z)\frac{\partial U'}{\partial y'} - \cos(N', x)\frac{\partial W'}{\partial y'}$$

$$+ \cos(N', x)\frac{\partial V'}{\partial z'} - \cos(N', y)\frac{\partial U'}{\partial z'}$$

$$= -[\cos(N, x)\cos(N', x) + \cos(N, y)\cos(N', y) + \cos(N, z)\cos(N', z)]\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}\right)$$

$$- \left[\cos(N, x)\frac{x'-x}{r} + \cos(N, y)\frac{y'-y}{r} + \cos(N, z)\frac{z'-z}{r}\right]$$

$$\times\left[\cos(N', x)\frac{x'-x}{r} + \cos(N', y)\frac{y'-y}{r} + \cos(N', z)\frac{z'-z}{r}\right]\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right).$$

Si l'on désigne par r la direction qui mène du point (x, y, z) au point (x', y', z') et si l'on remarque que l'on a

$$\cos(N, N') = \cos(N, x)\cos(N', x) + \cos(N, y)\cos(N', y) + \cos(N, z)\cos(N', z),$$

$$\cos(N, r) = \cos(N, x)\frac{x'-x}{r} + \cos(N, y)\frac{y'-y}{r} + \cos(N', z)\frac{z'-z}{r},$$

$$\cos(N', r) = \cos(N', x)\frac{x'-x}{r} + \cos(N', y)\frac{y'-y}{r} + \cos(N', z)\frac{z'-z}{r},$$

$$\cos\omega = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},$$

on aura

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_C \int_{C'} f(r) \cos\omega \, ds' \, ds \\ &\quad = -\mathrm{S}_A \mathrm{S}_{A'} \left[\cos(N, N')\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}\right) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \cos(N, r)\cos(N', r)\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right)\right] d\Omega' \, d\Omega. \end{aligned} \right.$$

Appliquons cette importante identité au cas où

$$f(r) = \frac{1}{r}.$$

Cette fonction satisfera aux conditions imposées si les deux courbes C et C′ et les aires à deux côtés A et A′ passant par ces deux courbes peuvent être respectivement enfermées à l'intérieur de deux domaines D et D′ entièrement extérieurs l'un à l'autre; car alors la distance r d'un point du domaine D à un point du domaine D′ ne pourra devenir égale à 0. Cette condition peut s'énoncer simplement en disant que les deux aires A et A′ n'ont aucun point commun.

Nous aurons

$$\frac{df(r)}{dr} = -\frac{1}{r^2},$$

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} = \frac{2}{r^3}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{3}{r^3}.$$

Nous aurons donc

$$\int_C\int_{C'} \frac{\cos\omega}{r}\, ds'\, ds$$

$$= \mathrm{S}_A \mathrm{S}_{A'} \left[\cos(N, r)\cos(N', r) \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dr^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(N, r)\cos(N', r) - \cos(N, N')}{r} \frac{d\frac{1}{r}}{dr} \right] d\Omega'\, d\Omega.$$

Or les égalités (5) et (6) du Chap. I donnent

$$\cos(N, r) = -\frac{\partial r}{\partial N}, \qquad \cos(N', r) = \frac{\partial r}{\partial N'},$$

$$\frac{\cos(N, r)\cos(N', r) - \cos(N, N')}{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial N\, \partial N'}.$$

D'ailleurs

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial N} \frac{\partial r}{\partial N'} + \frac{d\frac{1}{r}}{dr} \frac{\partial^2 r}{\partial N\, \partial N'} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial N\, \partial N'}.$$

Nous arrivons donc à l'identité suivante :

Si ds et ds' sont les éléments de deux courbes fermées C *et* C'; *si $d\Omega$ et $d\Omega'$ sont les éléments d'aires* A, A', *passant par ces deux courbes; si ω est l'angle des deux éléments ds et ds'; si enfin* N *et* N' *sont les normales aux faces positives des deux éléments $d\Omega$ et $d\Omega'$, on a*

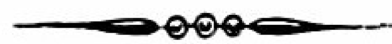
$$(6) \qquad \int_C\int_{C'} \frac{\cos\omega}{r}\, ds'\, ds = -\mathrm{S}_A \mathrm{S}_{A'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial N\, \partial N'}\, d\Omega\, d\Omega'.$$

Cette importante identité est due à Ampère.

Rappelons-nous qu'elle suppose que les deux aires A, A' n'ont aucun point commun.

La transformation, rendue possible par le théorème de Stokes, d'une intégrale curviligne étendue à une courbe en une intégrale double étendue à l'aire que limite cette courbe, constitue en Physique une méthode entièrement analogue à cette méthode si féconde, rendue générale par l'identité de Green, qui consiste à transformer une intégrale étendue à une surface fermée en une intégrale

étendue au volume qu'enferme cette surface. De même, la transformation effectuée par Ampère, d'une intégrale curviligne double en une intégrale quadruple étendue à deux aires, constitue un procédé analogue à la transformation d'une intégrale sextuple étendue à deux volumes en une intégrale quadruple étendue aux surfaces qui limitent ces volumes. On sait quel rôle cette transformation joue dans la théorie de la capillarité de Gauss.

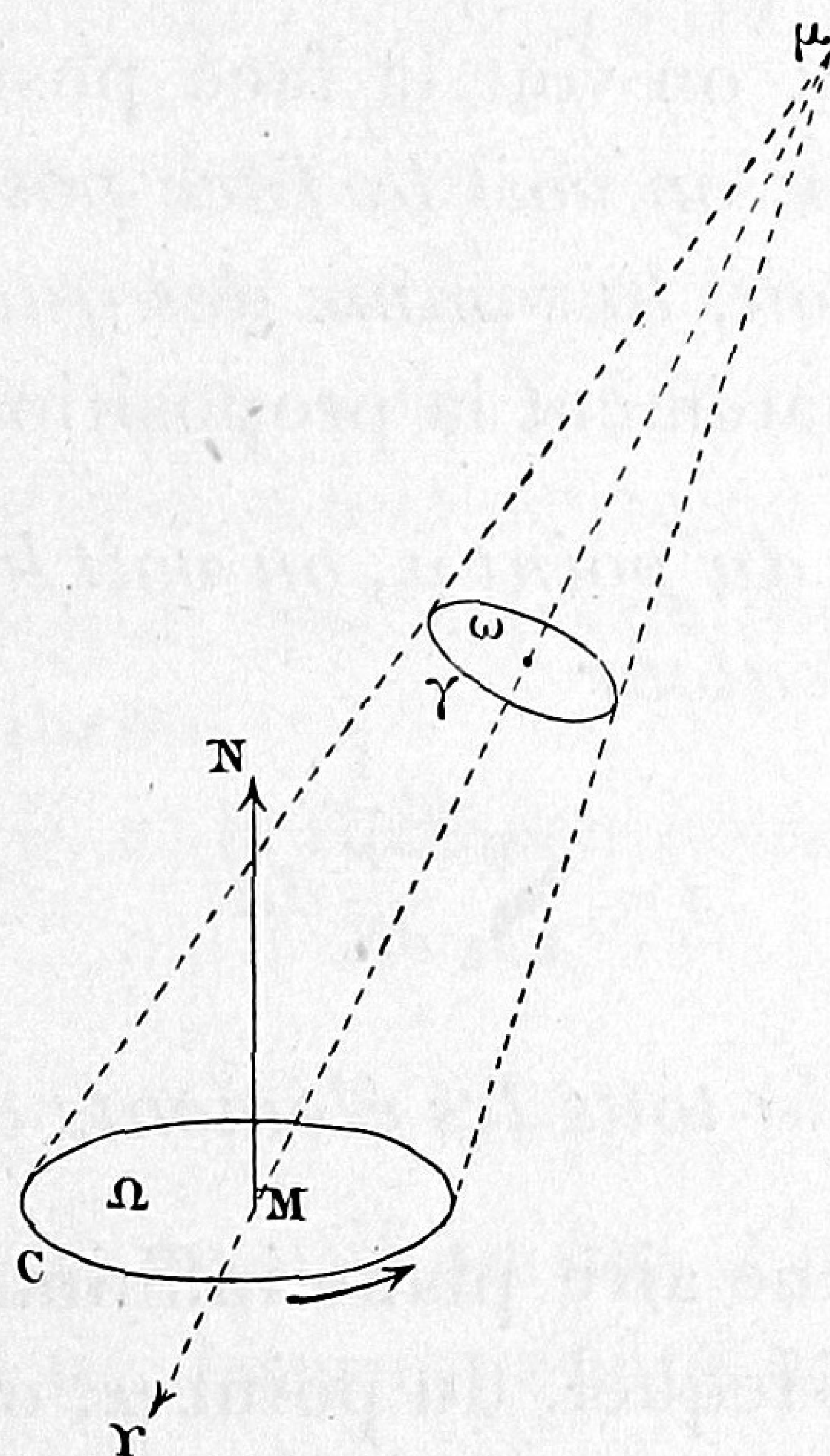


CHAPITRE III.

ANGLE SOUS LEQUEL, D'UN POINT DONNÉ, ON VOIT UNE AIRE DONNÉE

Considérons une courbe plane, infiniment petite, C. Soit Ω l'aire enfermée en cette courbe plane. Soit μ un point quelconque de l'espace (*fig.* 22). Du point μ, avec l'unité de distance pour

Fig. 22.



rayon, décrivons une surface sphérique. Le cône ayant pour sommet le point μ et pour directrice la courbe C, dessine à la surface de cette sphère une courbe γ.

La courbe γ enferme une aire sphérique infiniment petite ω.

On nomme *angle sous lequel, du point* μ, *on voit la face positive de l'aire infiniment petite* Ω, *la surface* ω, *affectée du signe* $+$ *ou du signe* $-$, *selon que le point* μ *se trouve du côté positif ou du côté négatif du plan auquel appartient l'aire* Ω.

Soit M un point de l'aire Ω. Soit r la distance μM. Désignons

aussi par le symbole r la direction μM. Soit N la normale à la face positive de Ω. L'angle σ sous lequel, du point μ, on voit la face positive de Ω a pour valeur, en grandeur et en signe,

$$\sigma = -\frac{\Omega}{r^2}\cos(r, N).$$

D'ailleurs

$$\cos(r, N) = \frac{\partial r}{\partial N}.$$

On a donc

$$\sigma = \Omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N}. \tag{1}$$

Cette définition peut s'étendre à une aire à deux faces quelconque.

Soit $d\Omega$ un élément quelconque de cette aire; soit $d\sigma$ l'angle sous lequel, du point μ, on voit la face positive de $d\Omega$. *L'angle sous lequel, du point μ, on voit la face positive de l'aire considérée est, par définition, la somme des quantités $d\sigma$.*

De là résulte immédiatement la proposition suivante :

L'angle sous lequel, du point μ, on voit la face positive d'une certaine aire, a pour valeur

$$\sigma = \mathbf{S}_A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Omega, \tag{2}$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments $d\Omega$ de l'aire A.

Revenons au cas d'une aire plane infiniment petite. Il est aisé de voir que l'angle sous lequel, du point μ, on voit la face positive de cette aire, varie d'une manière continue lorsque la position du point μ varie dans l'espace d'une manière continue, sauf si le point μ, dans son déplacement, vient à traverser l'aire plane Ω. Il est aisé, en effet, de voir que l'angle en question tend vers 2π si le point μ tend vers un point de l'aire Ω, en demeurant du côté positif de cette aire et vers -2π dans le cas contraire. L'angle en question a donc, lorsque le point μ se trouve sur la face positive de Ω, une valeur qui surpasse de 4π celle qu'il prend lorsque le point μ est sur la face négative de Ω.

Cette proposition s'étend aisément à une aire quelconque.

Soit A une aire quelconque; soient M et M′ deux points infiniment voisins, situés l'un du côté négatif de cette aire, l'autre du côté positif. Les points de l'aire A infiniment voisins de M et de M′ forment un élément $d\Omega$. Soit Σ l'angle sous lequel, du point μ, on voit l'élément $d\Omega$; soit Σ' l'angle sous lequel on voit le reste de l'aire A. Nous avons

$$\sigma = \Sigma + \Sigma'.$$

Or, lorsque le point μ passe de M en M′, Σ' varie d'une manière continue, tandis que Σ augmente brusquement de 4π; σ augmente donc brusquement de 4π.

Ainsi l'angle sous lequel, d'un point μ, *on voit la face positive d'une aire* A *varie d'une manière continue lorsque le point* μ *se déplace d'une manière continue sans traverser l'aire* A. *Il augmente brusquement de* 4π *si le point* μ *traverse l'aire* A *en passant du côté négatif de cette aire au côté positif.*

Cet angle est donc une fonction uniforme des coordonnées du point μ, mais cette fonction uniforme est affectée d'une surface coupure, qui n'est autre que l'aire A. On peut la rendre identique à l'une des déterminations d'une certaine fonction des coordonnées du point μ, fonction qui est continue dans tout l'espace, mais qui n'est pas uniforme.

Soit, en effet, $\sigma(x, y, z)$ la fonction considérée jusqu'ici. Considérons la fonction

$$f(x, y, z) = \sigma(x, y, z) + 4K\pi,$$

K étant un entier positif, négatif ou nul. Cette fonction n'est pas uniforme; elle a autant de déterminations que l'on peut donner de valeurs à K, c'est-à-dire une infinité.

On peut toujours choisir K de manière que cette fonction varie d'une manière continue d'un point à l'autre.

Si le point μ ne traverse pas l'aire A, $\sigma(x, y, z)$ variant d'une manière continue, il suffira, pour que $f(x, y, z)$ varie d'une manière continue, que K garde une valeur constante. En sorte que, si μ revient à son point de départ après avoir décrit un chemin fermé qui ne rencontre pas l'aire A, la fonction $f(x, y, z)$ reprendra sa valeur primitive.

Lorsque le point μ traverse l'aire A, $\sigma(x, y, z)$ augmente ou

diminue de 4π, selon que le passage a lieu de la face négative à la face positive ou inversement. Pour que $f(x, y, z)$ varie d'une manière continue, il sera nécessaire et suffisant que K diminue d'une unité chaque fois que le point μ passe de la face négative de l'aire A à la face positive, et qu'au contraire K augmente d'une unité lorsque le point μ traverse l'aire A en sens inverse.

Si donc le point μ revient à son point de départ après avoir décrit un chemin fermé qui traverse n fois l'aire A *de la face négative à la face positive, et n' fois la même aire de la face positive à la face négative, la fonction $f(x, y, z)$, au lieu de reprendre sa valeur primitive, aura augmenté de*

$$4(n' - n)\pi.$$

L'angle $\sigma(x, y, z)$ sous lequel, du point μ, on voit la face positive de l'aire A, est bien, par la définition même de la fonction continue, mais non uniforme, $f(x, y, z)$, une des déterminations de cette fonction.

Nous allons établir maintenant que cette fonction $f(x, y, z)$ est définie par la seule connaissance de la courbe C, sans qu'il soit nécessaire de connaître l'aire A. Nous y parviendrons de la manière suivante.

Convenons d'étudier seulement les aires A passant par la courbe C telles qu'aucune de leurs parties ne forme une surface fermée. Étant données deux telles aires, A et A′, nous regarderons comme évident que l'on peut, par une déformation continue appliquer l'aire A′ sur l'aire A, et que, dans cette déformation, la face positive de A′ devient la face positive de A.

Cela posé, voici la proposition fondamentale que nous démontrerons :

Toutes les aires A *que l'on peut faire passer par une courbe* C *se rangent, par rapport à chaque point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ de l'espace, en deux catégories.*

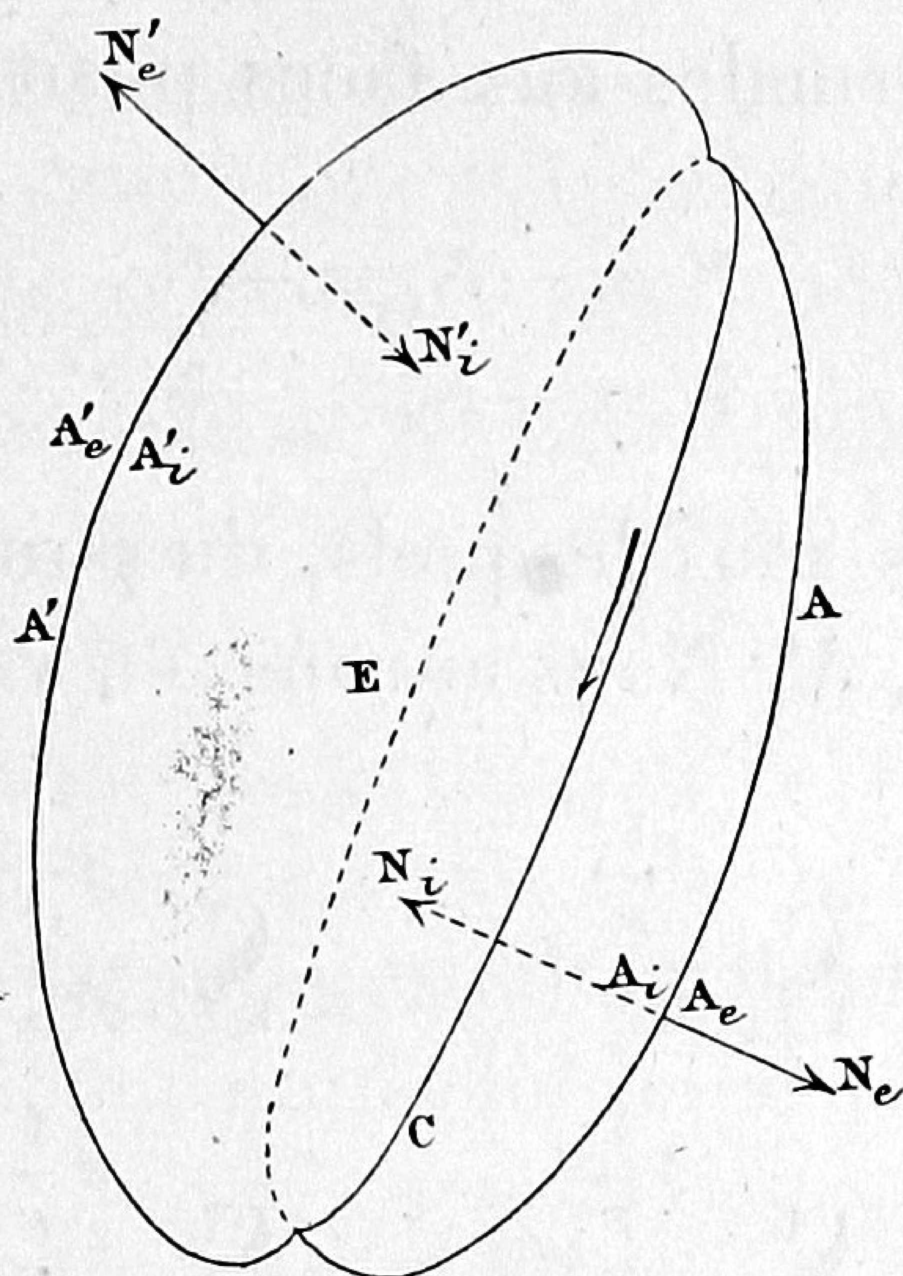
Toutes les aires A *de la première catégorie sont vues du point μ sous un même angle $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$.*

Toutes les aires A *de la deuxième catégorie sont vues du point μ sous un même angle $[\sigma(\xi, \eta, \zeta) + 4\pi]$.*

Considérons, en effet, deux aires A, A′ (*fig.* 23) passant par la

courbe C. Elles forment une surface fermée entourant un certain espace clos E. Où bien le point μ est à l'intérieur de cet espace clos, ou bien il lui est extérieur.

Fig. 23.



Examinons d'abord le cas où le point μ est extérieur à l'espace E; je dis que les faces positives des deux surfaces A et A' sont vues du point μ sous le même angle $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$.

Pour démontrer cette proposition, nous pouvons supposer que les deux surfaces A et A' n'aient aucun point commun en dehors de la courbe C; car, si elles avaient des points communs autres que ceux de la courbe C, il nous suffirait de considérer une troisième surface A'', n'ayant aucun point commun avec les deux surfaces A et A', et de démontrer que chacune des deux surfaces A et A' est vue du point μ sous le même angle que la surface A''.

La surface A a une face A_i qui regarde l'intérieur de l'espace E, et une face A_e qui regarde l'extérieur.

La surface A' a une face A'_i qui regarde l'intérieur de l'espace E, et une face A'_e qui regarde l'extérieur.

Les deux surfaces A et A' n'ayant aucun point commun, il est facile de voir que la face A_e coïncide, dans toute son étendue, avec la face positive, ou dans toute son étendue avec la face négative de la surface A, et d'obtenir des conclusions analogues pour chacune des trois faces A_i, A'_e, A'_i.

Si l'on déforme la surface A de manière à l'appliquer sur la surface A', la face A_i deviendra la face A'_e; la face A_e deviendra la

face A'_i. Les deux faces A_i, A'_e sont donc de même signe, et les deux faces A_e, A'_e de signes contraires; l'une d'elles est positive. Supposons que ce soit la face A_e.

Soient N_i, N_e, N'_i, N'_e les normales aux faces A_i, A_e, A'_i, A'_e. Nous aurons entre les directions de ces normales et les directions N et N′ des normales aux faces positives des aires A et A′ les relations

$$N \equiv \quad N_e \equiv - N_i,$$
$$N' \equiv - N'_e \equiv \quad N'_i.$$

Soient σ, σ' les angles sous lesquels, du point μ, on voit les faces positives des aires A, A′. Nous aurons, en vertu de l'égalité (2),

$$\sigma = \mathrm{S}_A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Omega = \quad \mathrm{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} d\Omega,$$

$$\sigma' = \mathrm{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N'} d\Omega' = - \mathrm{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N'_e} d\Omega'$$

et, par conséquent,

$$\sigma - \sigma' = \mathrm{S}_A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} d\Omega + \mathrm{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N'_e} d\Omega'.$$

Mais l'ensemble des deux aires A et A′ forme une surface fermée à laquelle le point μ est extérieur. On a donc, d'après le premier lemme de Gauss,

$$\mathrm{S}_A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} d\Omega + \mathrm{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N'_e} d\Omega' = 0$$

et, par conséquent, comme nous l'avions annoncé,

$$\sigma = \sigma'.$$

Examinons maintenant le cas où le point μ est intérieur à l'espace clos compris entre les surfaces A et A′.

Nous pourrons répéter exactement ce que nous avons dit dans le cas précédent, sauf en un point : nous devrons appliquer le second lemme de Gauss et non le premier. Nous aurons donc

$$\mathrm{S}_A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} d\Omega + \mathrm{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N'_e} d\Omega' = -4\pi$$

et, par conséquent,

$$\sigma = \sigma' - 4\pi.$$

La proposition que nous avions énoncée est ainsi complètement démontrée.

Cette proposition nous montre que, *si l'on fait passer par la courbe* C *une aire quelconque, l'angle sous lequel, du point* μ, *on voit la face positive de cette aire, coïncide toujours avec une des déterminations de la fonction* $f(\xi, \eta, \zeta)$.

La fonction $f(\xi, \eta, \zeta)$ *est donc définie par la seule connaissance de la courbe* C *et du point* μ.

Cette fonction n'est pas uniforme; mais, comme ses différentes déterminations ne diffèrent les unes des autres que par un multiple de 4π, quantité indépendante de ξ, η, ζ, les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi, \eta, \zeta), \quad \frac{\partial}{\partial\eta} f(\xi, \eta, \zeta), \quad \frac{\partial}{\partial\zeta} f(\xi, \eta, \zeta)$$

doivent être des fonctions uniformes de ξ, η, ζ. Nous allons nous proposer de former ces dérivées partielles.

Si l'on donne au point μ une translation $(\delta x, \delta y, \delta z)$ sans déplacer la courbe C, l'angle sous lequel, du point μ, on voit la face positive d'une certaine aire A passant par la courbe C augmente de

$$\delta\sigma = \frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi, \eta, \zeta)\,\delta\xi + \frac{\partial}{\partial\eta} f(\xi, \eta, \zeta)\,\delta\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta} f(\xi, \eta, \zeta)\,\delta\zeta.$$

Si l'on donne la translation $(\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$ à la fois au point μ et à l'aire A, l'angle σ ne subit aucune variation.

Donc, si l'on donne la translation $(\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$ à l'aire A sans déplacer le point μ, l'angle σ subit une variation

$$\delta'\sigma = -\left[\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi, \eta, \zeta)\,\delta\xi + \frac{\partial}{\partial\eta} f(\xi, \eta, \zeta)\,\delta\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta} f(\xi, \eta, \zeta)\,\delta\zeta\right].$$

C'est cette quantité $\delta'\sigma$ que nous allons nous proposer de calculer.

L'aire A subit donc la translation $\delta\lambda(\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$ qui l'amène en A' (*fig.* 24). Dans ce déplacement, la courbe C engendre une surface cylindrique B. L'ensemble des trois surfaces A, B, A'

forme une surface fermée n'enfermant pas le point μ. L'élément $ab = ds$ de la courbe C vient en $a'b'$.

Soient N_e, N'_e, n_e les normales extérieures à cette surface fermée selon qu'elles sont élevées en un point des aires A, A', B.

Fig. 24.

Soient $d\Omega$, $d\Omega'$, $d\Theta$ les éléments de ces diverses aires. Le premier lemme de Gauss nous donne

$$\mathbf{S}_A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} d\Omega + \mathbf{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N'_e} d\Omega' + \mathbf{S}_B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_e} d\Theta = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que le déplacement $\delta\lambda$ ait été dirigé de telle sorte que la face positive de l'aire A soit la face intérieure à la surface fermée que nous considérons.

Nous aurons alors

$$\mathbf{S}_A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} d\Omega = -\mathbf{S}_A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Omega = -\sigma,$$

$$\mathbf{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} d\Omega' = \mathbf{S}_{A'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N'} d\Omega' = \sigma' = \sigma + \delta'\sigma.$$

Nous aurons donc

$$\delta'\sigma = -\mathbf{S}_B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_e} d\Theta = \mathbf{S}_B \frac{\cos(r, n_e)}{r^2} d\Theta.$$

Soit φ le dièdre dont le demi-plan ban_e doit tourner de gauche à droite autour de ba pour venir coïncider avec le demi-plan bar. Dans le trièdre (ab, n_e, r) dont la face ban_e est rectangle, on a

$$\cos(r, n_e) = \sin(r, ds)\cos\varphi.$$

D'ailleurs

$$d\Theta = \sin(ds, \delta\lambda)\, ds\, \delta\lambda.$$

On a donc cette première expression de $\delta'\sigma$,

$$(3) \qquad \delta'\sigma = \delta\lambda \int_C \frac{\sin(r, ds)\sin(ds, d\lambda)\cos\varphi}{r^2} ds.$$

Soient $O\rho$, $O\alpha$, $O\beta$, $O\nu$ des parallèles aux directions μa ou r, aa' ou $\delta\lambda$, $a'b'$ ou ds et n_e. Dans le trièdre $O\alpha\beta\rho$, le dièdre suivant $O\beta$ est l'excès du dièdre formé par les plans

$\beta O\alpha$, $\nu O\beta$, dièdre qui est droit,

sur le dièdre formé par les plans

$\beta O\nu$, $\rho O\beta$, dièdre qui est l'angle φ.

On a donc

$$\sin \text{dièdre } O\alpha = \cos\varphi.$$

Dans ce même trièdre, le dièdre suivant $O\rho$ est l'angle e relatif aux deux directions ds et $\delta\lambda$ (*voir* Chap. I, p. 6). On a donc

$$\sin(ds, \delta\lambda)\cos\varphi = \sin(r, \delta\lambda)\sin e,$$

ce qui donne cette nouvelle expression de $\delta'\sigma$,

$$(4) \qquad \delta'\sigma = \delta\lambda \int_C \frac{\sin(r, ds)\sin(r, \delta\lambda)\sin e}{r^2} ds.$$

Nous pouvons trouver une autre expression de $\delta'\sigma$, en remarquant que

$$\frac{1}{3} r \cos(r, n_e)\, d\Theta$$

est, en valeur absolue, le volume $d\Pi$ de la pyramide $\mu a b b' a'$; que, d'ailleurs, cette quantité est positive ou négative, selon que le trièdre $a a' b \mu$ a un sens de rotation positif ou négatif; en sorte que l'on a toujours, en grandeur et en signe,

$$r \cos(r, n_e)\, d\Theta = -\begin{vmatrix} \delta\xi & \delta\eta & \delta\zeta \\ \frac{dx}{ds} ds & \frac{dy}{ds} ds & \frac{dz}{ds} ds \\ \xi - x & \eta - y & \zeta - z \end{vmatrix}$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad \delta'\sigma = \delta\lambda \int_C \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} \frac{\xi - x}{r} & \frac{\eta - y}{r} & \frac{\zeta - z}{r} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{\delta\xi}{\delta\lambda} & \frac{\delta\eta}{\delta\lambda} & \frac{\delta\zeta}{\delta\lambda} \end{vmatrix} ds.$$

La quantité

$$(6) \qquad \Delta = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} \frac{x - \xi}{r} & \frac{y - \eta}{r} & \frac{z - \zeta}{r} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d\xi}{d\lambda} & \frac{d\eta}{d\lambda} & \frac{d\zeta}{d\lambda} \end{vmatrix}$$

se rencontrera souvent dans nos calculs.

Les calculs que nous venons de faire nous montrent que l'on a

$$(7) \qquad \Delta = -\frac{\sin(r, ds)\sin(dl, \delta\lambda)\cos\varphi}{r^2}$$

et aussi

$$(8) \qquad \Delta = -\frac{\sin(r, ds)\sin(r, \delta\lambda)\sin e}{r^2}.$$

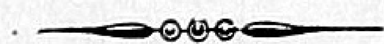
Ils nous montrent, en outre, que l'on a

$$(9) \qquad \delta\sigma = \delta\lambda \int_C \Delta\, ds.$$

On en déduit

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi} &= \int_C \frac{1}{r^3}\left[(y-\eta)\frac{dz}{ds} - (z-\zeta)\frac{dy}{ds}\right]ds,\\
\frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta} &= \int_C \frac{1}{r^3}\left[(z-\zeta)\frac{dx}{ds} - (x-\zeta)\frac{dz}{ds}\right]ds,\\
\frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} &= \int_C \frac{1}{r^3}\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds} - (y-\eta)\frac{dx}{ds}\right]ds.
\end{aligned}
\right.
$$

Les dérivées partielles de la fonction $f(\xi,\eta,\zeta)$ sont donc, comme nous l'avions annoncé, des fonctions uniformes de ξ,η,ζ, et leur forme dépend seulement de la connaissance de la courbe C.



CHAPITRE IV.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DE SITUATION. THÉORÈME D'ENRICO BETTI.

Nous aurons à faire usage, dans ce qui va suivre, de quelques propositions de *Géométrie de situation;* nous allons rappeler brièvement la définition des termes que nous aurons à employer et l'énoncé des théorèmes que nous invoquerons, en renvoyant, pour les démonstrations, à un Mémoire de M. Betti (1).

Un espace clos est dit *linéairement connexe* lorsque deux points quelconques de cet espace peuvent être joints par une ligne continue renfermée en entier dans cet espace.

Une surface limitée par une courbe fermée est dite *linéairement connexe* lorsque deux points quelconques de cette surface peuvent être joints par une ligne continue tracée en entier sur la surface.

Dans un espace clos, on peut tracer soit des surfaces, soit des lignes; aussi cet espace possède-t-il *deux espèces de connexité.* La connexité de première espèce est liée aux propriétés des lignes que l'on y peut mener; la connexité de seconde espèce est liée aux propriétés des surfaces que l'on y peut tracer.

Considérons un espace linéairement connexe, tel que celui qui est compris à l'intérieur d'un ellipsoïde; si, à l'intérieur de cet espace, nous traçons une surface fermée linéairement connexe quelconque, elle sera le contour d'un espace clos, linéairement connexe, contenu en entier dans l'espace considéré. On dit alors

---

(1) ENRICO BETTI, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (*Annali di Matematica* de F. Brioschi et L. Cremona, 2e série, t. IV, p. 140). Ce Mémoire est résumé dans ÉMILE LEMMI, *Sur les cas d'exception au théorème des forces vives, résumé et conséquences d'un Mémoire de M. Betti* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville,* 3e série, t. II, p. 233).

que la connexité de deuxième espèce de cet espace est *du premier ordre*.

Considérons de même l'espace clos linéairement connexe, compris entre deux ellipsoïdes intérieurs l'un à l'autre; à l'intérieur de cet espace, traçons un ellipsoïde S enveloppant l'ellipsoïde intérieur et enveloppé par l'ellipsoïde extérieur ; cette surface S formera le contour d'un espace clos linéairement connexe, mais qui n'est pas contenu entièrement dans l'espace considéré; si, dans cet espace, nous traçons une deuxième surface fermée linéairement connexe S′, deux cas se présenteront : ou bien cette surface S′ n'enveloppera pas l'ellipsoïde intérieur; elle formera alors à elle seule le contour d'un espace clos linéairement connexe enfermé dans l'espace considéré; ou bien cette surface S′ enfermera l'ellipsoïde intérieur; dans ce cas, elle formera avec la surface S le contour d'un espace clos linéairement connexe enfermé en entier dans l'espace considéré. On peut donc, dans l'espace considéré E, tracer une surface fermée linéairement connexe S qui ne forme pas, à elle seule, le contour d'un espace clos linéairement connexe entièrement contenu dans E, mais qui est telle que toute autre surface fermée linéairement connexe S′, tracée dans E, forme, ou seule, ou avec la surface S, le contour d'un espace clos linéairement connexe en entier situé dans E. On dit alors que la connexité de deuxième espèce de l'espace E est *du second ordre*.

En général, supposons qu'*à l'intérieur d'un espace clos, linéairement connexe* E, *on puisse tracer p surfaces fermées linéairement connexes* $S_1, S_2, \ldots, S_p$, *telles qu'aucune d'elles, prise seule, ou avec un certain nombre des autres, ou avec toutes, ne forme le contour d'un espace clos, linéairement connexe, entièrement situé dans* E, *mais que toute autre surface fermée linéairement connexe* Σ, *tracée en* E, *forme, ou seule, ou avec quelques-unes des surfaces* $S_1, S_2, \ldots, S_p$, *ou avec toutes, le contour d'un espace clos linéairement connexe entièrement situé en* E; *ce nombre p est, pour un espace donné, entièrement déterminé, et la connexité de deuxième espèce de l'espace* E *est dite d'ordre* $(p+1)$.

De même, *si à l'intérieur d'un espace clos linéairement connexe* E, *on peut tracer q lignes fermées* $L_1, L_2, \ldots, L_q$, *telles que, dans le système de ces q lignes, on ne puisse trouver le*

contour d'aucune surface linéairement connexe entièrement située en E, *mais telles que toute autre ligne fermée* Λ, *tracée en* E, *forme, ou seule, ou avec quelques-unes des lignes* L_1, L_2, ..., L_q, *ou avec toutes, le contour d'une surface linéairement connexe entièrement située en* E, *ce nombre* q, *pour un espace* E *donné, est entièrement déterminé, et la connexité de première espèce de l'espace* E *est dite d'ordre* $(q+1)$.

Les espaces cités précédemment ont leur connexité de première espèce du premier ordre. La connexité de première espèce de l'espace situé entre une sphère et un tore qui lui est intérieur est du deuxième ordre.

Si la connexité de première espèce et la connexité de seconde espèce d'un espace E sont toutes deux du premier ordre, l'espace E est dit *simplement connexe.*

Les surfaces ne présentent qu'une seule espèce de connexité. On définit l'ordre de cette connexité comme l'on définit, pour les espaces à trois dimensions, l'ordre de la connexité de la première espèce. D'après cela, l'aire d'un cercle a une connexité *du premier ordre,* ou est *simplement connexe;* l'aire comprise entre deux cercles concentriques, l'aire de la surface à un seul côté figurée au Chapitre II, sont des aires dont la connexité est *du second ordre.*

Si une aire est simplement connexe, si cette aire admet en chaque point un plan tangent dont l'orientation varie d'une manière continue d'un point à l'autre, cette aire a deux côtés; inversement, une aire à un seul côté ne peut être simplement connexe.

Pour démontrer ce théorème, considérons une aire simplement connexe a, admettant en chaque point un plan tangent dont l'orientation varie d'un point à l'autre d'une manière continue, et supposons que ce soit une aire à un seul côté.

On pourra forcément tracer à sa surface au moins une ligne fermée ABCA, telle que, si un point suit cette ligne en entraînant une demi-normale à l'aire a, la normale ait viré cap pour cap lorsque le point mobile reviendra au lieu dont il est parti.

D'ailleurs, l'aire a étant, par hypothèse, simplement connexe, cette ligne fermée doit être, à elle seule, le contour d'une aire linéairement connexe a' entièrement située dans a. Il est facile de

voir que cette aire a' est forcément aussi une aire à un seul côté, et qu'en parcourant un chemin fermé, infiniment voisin en tous ses points du contour ABCDA, on renverse le sens de la normale à l'aire a'.

Enfin cette aire a' est, comme l'aire a, simplement connexe. En effet, toute courbe fermée tracée dans a' est aussi tracée dans a; elle forme donc le contour d'une aire limitée tracée dans a; mais il est bien évident, dès lors, que cette aire limitée est tracée dans a'.

Cela étant, prenons deux points A et C de ce contour. Joignons-les par un chemin APC, situé dans a' et ne passant pas deux fois par le même point de a'.

Chacun des deux contours ABCPA, APCDA forme le contour d'une aire linéairement connexe entièrement située dans a'; car si le contour ABCPA, par exemple, ne formait pas le contour d'une aire linéairement connexe entièrement située dans a', c'est que l'aire a' ne serait pas simplement connexe.

L'une au moins de ces aires est à un seul côté. Supposons, en effet, que l'aire APCDA soit à deux côtés. La normale au point A étant choisie, on arrivera en C avec la même direction de normale en suivant le chemin APC, et en suivant le chemin ADC; si l'aire ABCPA était aussi à deux côtés, on arriverait au point C avec la même direction de normale en suivant le chemin APC et en suivant le chemin ABC. On arriverait donc au point C avec la même direction de normale en suivant le chemin ABC et en suivant le chemin ADC, ce qui est contraire à ce que nous avons démontré au sujet du chemin ABCDA.

Ainsi le contour ABCPA limiterait une aire a'' linéairement connexe à un seul côté, dont la normale changerait de sens lorsqu'on parcourrait le chemin fermé ABCPA. On démontrerait, comme nous l'avons fait pour a', que cette aire a'' est simplement connexe.

On pourrait de nouveau découper cette aire a'' en deux autres, dont l'une au moins serait une aire à un seul côté, simplement connexe, entièrement située dans a.

En continuant ainsi indéfiniment, on arriverait forcément à prouver que, sur l'aire a, on peut tracer une aire α infiniment petite ayant un seul côté. On pourrait donc, par un chemin fermé

infiniment petit tracé sur l'aire a, renverser cap pour cap l'orientation de la normale, ce qui est incompatible avec la variation continue de l'orientation du plan tangent à l'aire a.

Ainsi une aire simplement connexe à un seul côté est, comme nous l'avions annoncé, une absurdité.

Envisageons l'espace illimité extérieur à un tore; cet espace a sa connexité de première espèce du second ordre et sa connexité de seconde espèce du premier ordre.

Déformons ce tore d'une manière continue sans que jamais sa surface ait à subir de rupture. On pourra le transformer en n'importe quel tube fermé ne présentant pas de dérivation. D'ailleurs, dans cette déformation, il est facile de voir que l'ordre de chaque espèce de connexité de l'espace extérieur au tore ne variera pas. Donc l'espace illimité extérieur à un tube fermé quelconque exempt de dérivations a une connexité de première espèce du second ordre et une connexité de seconde espèce du premier ordre.

Cela demeure vrai si le tube est infiniment délié. Donc, *si, de l'espace illimité, on exclut les points infiniment voisins d'une courbe fermée exempte de dérivations, il reste un espace dont la connexité de première espèce est du second ordre et la connexité de seconde espèce est du premier ordre.*

D'après le théorème de M. Betti, on pourra transformer cet espace en un espace simplement connexe par une section simplement connexe, c'est-à-dire par une aire à deux côtés. Cette aire ne peut, d'ailleurs, avoir pour contour que la courbe donnée. Nous arrivons donc à cette proposition :

Par toute courbe fermée ne présentant pas de dérivations, on peut faire passer une surface à deux côtés; cette surface transforme en un espace simplement connexe l'ensemble des points qui ne sont pas infiniment voisins de la courbe.

M. Betti a démontré le théorème suivant :

Si un espace à trois dimensions a une connexité de première espèce d'ordre $(q+1)$ *et une connexité de seconde espèce d'ordre* $(p+1)$, *il est nécessaire et suffisant, pour le transformer en un espace simplement connexe, d'y faire d'une manière convenable* p *sections linéaires et* q *sections superficielles simplement connexes.*

§ 2. — Théorème d'Enrico Betti.

Soient X, Y, Z trois fonctions de x, y, z finies, continues et uniformes en tous les points d'un espace E dont la connexité de première espèce est d'ordre $(q+1)$. Supposons que ces trois fonctions vérifient, en tous les points de l'espace E, les égalités

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

prise le long d'une courbe fermée P, tracée dans l'espace E et parcourue dans un sens déterminé?

Pour réduire la connexité de première espèce de l'espace E à être du premier ordre, il suffit de tracer dans cet espace q surfaces simplement connexes. Soit $S_1, S_2, \ldots, S_q$ un tel système de surfaces. Chacune de ces surfaces a deux faces.

Supposons que la ligne l rencontre n_1 fois la surface S_1 en passant de la face négative à la face positive, et n'_1 fois la même surface en passant de la face positive à la face négative; qu'elle rencontre n_2 fois la surface S_2 en passant de la face négative à la face positive, et n'_2 fois la même surface en passant de la face positive à la face négative, etc. Désignons par $H_1, H_2, \ldots, H_q$ q constantes qui sont indépendantes de la forme de la ligne l et dépendent seulement de la forme des fonctions X, Y, Z et de la nature des connexions de l'espace E.

L'intégrale

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

aura pour valeur

$$(n_1 - n'_1)H_1 + (n_2 - n'_2)H_2 + \ldots + (n_q - n'_q)H_q.$$

Telle est l'importante proposition démontrée par M. Betti; nous allons en déduire une conséquence qui sera d'un grand usage par la suite.

Considérons l'espace formé par l'ensemble des points qui ne sont pas infiniment voisins d'une courbe fermée C exempte de dérivations.

Soient X, Y, Z trois fonctions de ξ, η, ζ finies, continues et uniformes en tout point (ξ, η, ζ) de cet espace et vérifiant, en chacun de ces points, les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Cherchons la forme générale de ces fonctions X, Y, Z. Soit l une courbe fermée quelconque tracée dans l'espace considéré. Soit H une certaine constante. Soit A une aire simplement connexe passant par la courbe C (sur laquelle est choisi un sens de parcours) et ramenant au premier ordre la connexité de première espèce de l'espace considéré. Si la ligne l rencontre la surface A n fois en passant de la face négative à la face positive, et n' fois en passant de la face positive à la face négative, nous aurons

$$\int_l (X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta) = (n - n')H.$$

D'autre part, considérons, pour la courbe C, la fonction

$$f(\xi, \eta, \zeta)$$

définie au Chapitre précédent. Nous aurons

$$\int_l df(\xi, \eta, \zeta) = 4(n - n')\pi.$$

Donc, quelle que soit la ligne fermée l tracée dans l'espace considéré, nous aurons

$$\int_l \left[X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta - \frac{H}{4\pi}\,d\,f(\xi,\eta,\zeta) \right] = 0,$$

et, par conséquent, d'après la propriété fondamentale des intégrales curvilignes,

$$X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta - \frac{H}{4\pi}\,d\,f(\xi,\eta,\zeta) = d\,U(\xi,\eta,\zeta),$$

U étant une fonction finie, continue et uniforme de ξ, η, ζ, pourvu que le point ξ, η, ζ ne soit pas un point de la courbe C.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la courbe C et ds l'élément linéaire de cette courbe. Posons

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} \dfrac{x-\xi}{r} & \dfrac{y-\eta}{r} & \dfrac{z-\zeta}{r} \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ \dfrac{d\xi}{dl} & \dfrac{d\eta}{dl} & \dfrac{d\zeta}{dl} \end{vmatrix},$$

et nous aurons, d'après l'égalité (9) du Chapitre III,

$$d\,f(\xi,\eta,\zeta) = dl \int_C \Delta\,ds.$$

Donc, *si les fonctions* X, Y, Z *sont des fonctions finies, continues et uniformes de* ξ, η, ζ *en tous les points de l'espace, sauf aux points infiniment voisins de la courbe* C, *et si elles vérifient les égalités*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} &= 0, \end{aligned} \right.$$

on a

$$(2) \qquad X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta = dl\,\frac{H}{4\pi} \int_C \Delta\,ds + d\,U(\xi,\eta,\zeta)$$

ou bien

$$
(3)\quad
\begin{cases}
X = \dfrac{\partial U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} + \dfrac{H}{4\pi}\displaystyle\int_C \dfrac{1}{r^3}\left[(y-\eta)\dfrac{dz}{ds} - (z-\zeta)\dfrac{dy}{ds}\right] ds,\\[2ex]
Y = \dfrac{\partial U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} + \dfrac{H}{4\pi}\displaystyle\int_C \dfrac{1}{r^3}\left[(z-\zeta)\dfrac{dx}{ds} - (x-\xi)\dfrac{dz}{ds}\right] ds,\\[2ex]
Z = \dfrac{\partial U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} + \dfrac{H}{4\pi}\displaystyle\int_C \dfrac{1}{r^3}\left[(x-\xi)\dfrac{dy}{ds} - (y-\eta)\dfrac{dx}{ds}\right] ds,
\end{cases}
$$

$U(\xi, \eta, \zeta)$ *étant une fonction finie, continue et uniforme en tout point* (ξ, η, ζ) *qui ne fait pas partie de la courbe* C *et* H *une constante.*



LIVRE XIII.

L'INDUCTION ÉLECTRODYNAMIQUE DANS LES CIRCUITS LINÉAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

LA LOI ÉLÉMENTAIRE DE L'INDUCTION ÉLECTRODYNAMIQUE. FORME GÉNÉRALE DE CETTE LOI.

Considérons un conducteur linéaire AB, dont les extrémités sont formées par deux métaux a, b, à la même température. Soient

V_a le niveau potentiel électrostatique en un point du métal a;
V_b le niveau potentiel électrostatique en un point du métal b;
Θ_a une quantité qui dépend de la nature du métal a;
Θ_b une quantité qui dépend de la nature du métal b.

Lorsque l'équilibre électrique est établi sur le conducteur, on a

$$(\varepsilon V_a + \Theta_a) - (\varepsilon V_b + \Theta_b) = \eta,$$

η étant une quantité qui est déterminée lorsqu'on connaît la nature des divers corps qui forment le conducteur, leur température en chaque point, et la nature des changements d'état que leur fait éprouver le passage de l'électricité.

Si les deux métaux A et B étaient en contact, soit directement, soit par l'intermédiaire d'autres corps ayant même température et n'éprouvant aucun changement d'état par le passage de l'électricité, les niveaux potentiels électrostatiques V'_a, V'_b, à l'intérieur

de ces métaux, devraient, pour l'équilibre, être liés par la relation

$$(\varepsilon V'_a + \Theta_a) - (\varepsilon V'_b + \Theta_b) = 0.$$

L'équilibre électrique peut-il subsister sur le fil primitivement considéré lorsqu'on ferme le circuit, c'est-à-dire lorsqu'on réunit les deux métaux a et b, soit directement, soit par l'intermédiaire d'autres corps ayant la même température et n'éprouvant aucun changement d'état par le passage de l'électricité? Il faudrait, pour cela, qu'on pût avoir

$$V_a = V'_a,$$
$$V_b = V'_b;$$

or cela sera généralement impossible, car

$$\varepsilon(V_a - V_b) - \varepsilon(V'_a - V'_b) = \eta.$$

Si donc η n'est pas égal à o, un courant prendra forcément naissance dans le conducteur fermé.

Pour obtenir les lois des *courants permanents*, c'est-à-dire *uniformes* et *constants*, dans des *conducteurs linéaires, fermés* et *immobiles*, il suffit d'une seule hypothèse nouvelle. Cette hypothèse est la suivante :

Lorsqu'on ferme le conducteur a, b, il est parcouru de b vers a par un courant dont l'intensité s'obtient en divisant la quantité

$$\varepsilon(V_a - V_b) - \varepsilon(V'_a - V'_b),$$

que nous venons de définir, par une quantité positive, dépendant de la nature du conducteur, que l'on nomme sa résistance; cette résistance est la somme des résistances de chacun des éléments du conducteur; la résistance d'un élément du conducteur est proportionnelle à sa longueur et en raison inverse de sa section.

Cette hypothèse s'exprime plus brièvement en disant que la *force électromotrice* qui agit de b vers a, au travers du fil de fermeture, a pour valeur η. Si J est l'intensité du courant comptée dans le sens dont il est ici question, et R la résistance du conducteur, on aura

$$J = \frac{\eta}{R}.$$

Tout ceci n'est vrai que si tous *les conducteurs linéaires* qui forment le système *sont fermés et immobiles,* et que si tous *les courants* qui traversent ces conducteurs *sont uniformes et constants.* Ces lois cessent d'être exactes, si les courants sont variables et non uniformes, si les conducteurs sont mobiles.

Soit, dans ce cas, AB $= ds$ un élément de l'un des conducteurs du système; calculons, pour cet élément, d'après les lois posées au Tome I de cet Ouvrage, la valeur de la quantité

$$\eta = \varepsilon(V_B + V_A) - \varepsilon(V'_B - V'_A).$$

Soit R la résistance de l'élément.

Si cet élément faisait partie d'un système de conducteurs fermés et immobiles parcourus par des courants uniformes et constants, il serait traversé de A vers B par un courant d'intensité

$$i = \frac{\eta}{R}.$$

Il est, en réalité, traversé par un courant d'intensité

$$J = \frac{\eta + \mathcal{E}}{R}.$$

La quantité $\mathcal{E}$, qui est égale à o lorsque les courants sont constants et uniformes et les conducteurs immobiles, se nomme la *force électromotrice d'induction* qui agit dans l'élément ds. C'est la forme de cette force électromotrice qu'il va falloir déterminer dans le présent Chapitre.

Dans le temps dt, l'élément AB est traversé de A vers B par une quantité d'électricité

$$\delta Q = I\,dt = \frac{1}{R}(\eta + \mathcal{E})\,dt.$$

S'il faisait partie d'un système de conducteurs immobiles traversés par des courants permanents, il serait traversé dans le même temps par une quantité d'électricité

$$\delta q = j\,dt = \frac{1}{R}\eta\,dt.$$

La quantité

$$\delta\mathcal{Q} = \delta Q - \delta q = \frac{1}{R}\mathcal{E}\,dt$$

est la quantité d'électricité mise en mouvement par l'induction dans l'élément ds pendant le temps dt.

Avant d'indiquer les hypothèses fondamentales que nous ferons sur cette quantité $\delta\mathfrak{Q}$, hypothèses dont nous déduirons les lois de l'induction électrodynamique dans les circuits linéaires, quelques définitions sont encore nécessaires.

Soit $AB = ds$ un élément d'un conducteur C; soit C′ un autre conducteur. L'état du système formé par le conducteur C′ et l'élément AB sera supposé complètement défini, au point de vue de l'Électrodynamique, lorsqu'on connaîtra :

1° La forme, la grandeur et la position relative du circuit C et de l'élément ds;

2° L'intensité J du courant qui traverse l'élément ds;

3° L'intensité J′, en chaque point du conducteur C′, du courant qui traverse ce conducteur.

Si la matière qui forme soit l'élément ds, soit le circuit C′, éprouve, réellement ou par la pensée, une modification quelconque qui ne change rien aux qualités que nous venons de définir, nous dirons, en Électrodynamique, que le système n'a éprouvé aucune modification.

C'est là le sens précis qu'il faut attribuer à cette phrase, souvent répétée par les auteurs qui ont traité de l'Électrodynamique : les actions électrodynamiques ne dépendent ni de la matière qui forme les conducteurs, ni des modifications de cette matière.

Ces préliminaires posés, voici la *première hypothèse* que nous ferons sur l'induction électrodynamique :

Considérons le système formé par l'élément ds et le conducteur C′. Pendant que ce système subit une modification infiniment petite quelconque, l'induction met en mouvement, dans l'élément ds, une quantité d'électricité infiniment petite $\delta\mathfrak{Q}$. Soit $R\,ds$ la résistance de l'élément ds.

Nous admettrons que la quantité $R\,ds\,\delta\mathfrak{Q}$ *est déterminée lorsqu'on connaît :*

1° *La définition électrodynamique du conducteur* C′ *et de l'élément ds au début de la modification;*

2° *La variation que la modification considérée apporte à cette définition.*

Le conducteur C' est formé d'un certain nombre d'éléments ds', ds'_1, ds'_2, ..., ds'_n. Nous admettrons, comme *seconde hypothèse,* évidemment compatible avec la première, que l'*on peut écrire*

$$R\,ds\,\delta\mathfrak{Q} = \delta\mu' + \delta\mu'_1 + \delta\mu'_2 + \ldots + \delta\mu'_{n'},$$

$\delta\mu'_k$ *dépendant uniquement :*

1° *De la grandeur de l'élément* ds;

2° *De la grandeur de l'élément* ds'_k;

3° *De la situation relative de ces deux éléments ;*

4° *Des intensités des courants qui traversent ces deux éléments ;*

5° *Des variations de ces données.*

Cette hypothèse est celle que l'on énonce, sous une forme moins précise, lorsqu'on dit que la force électromotrice d'induction engendrée par un courant inducteur est la somme des forces électromotrices élémentaires émanées des divers éléments de l'induit.

Soit AB $= ds$ un élément du conducteur C; soit A'B' $= ds'$ un élément du conducteur C'. Soit θ le plus petit des angles de la direction AB avec la direction AA'; soit θ' le plus petit des angles de la direction A'B' avec la direction AA'; soit ω l'angle des deux directions AB, A'B'; soit enfin r la distance AA'. Une *troisième hypothèse* consiste à admettre que, *pour définir, en Électrodynamique, le système des deux éléments* AB, A'B'; *il suffit de connaître les paramètres*

$$ds,\quad ds',\quad r,\quad \theta,\quad \theta',\quad \omega.$$

Nous avons vu [*Introduction,* Chap. I, § 1] que cela revient à admettre l'équivalence, par rapport à l'élément AB, des deux éléments A'B', $A'B'_1$, symétriques par rapport au plan BAA'.

Cette hypothèse, jointe à la précédente, entraîne cette conséquence :

La quantité $\delta\mu'$ *est une fonction uniforme des paramètres*

$$J,\quad ds,\quad J',\quad ds',\quad r,\quad \cos\theta,\quad \cos\theta',\quad \cos\omega$$

et de leurs variations.

Deux remarques au sujet de ces paramètres :

A. Il résulte de la définition de l'intensité d'un courant linéaire

(T. I, p. 406) que l'intensité d'un courant varie d'une manière continue le long du conducteur qu'il traverse : si le conducteur est ouvert, l'intensité est égale à o aux extrémités. Un élément de courant ne peut donc être supposé réellement séparé des éléments qui le précèdent ou qui le suivent. Cette définition, donnée en admettant que la densité linéaire de l'électricité doit être forcément finie en tout point d'un courant linéaire, est trop restreinte. Nous verrons plus tard qu'elle ne pourrait suffire à fournir une représentation complète des faits que nous présente l'étude de l'électricité. Mais, pour le moment, nous ne voulons point entrer dans l'étude des difficultés que présente la théorie des courants linéaires, lorsqu'on regarde l'intensité comme pouvant être discontinue. Tout le long du présent Volume nous admettrons *provisoirement* l'hypothèse suivante : *Il est physiquement impossible que l'intensité d'un courant linéaire présente des discontinuités le long du conducteur ou à ses extrémités.*

B. Soit M un point, fixe ou mobile ; soient ds', ds'', ... les éléments qui forment un conducteur parcouru par un courant. Soit r la distance du point M à l'origine d'un de ces éléments. Les éléments de ce conducteur devant se suivre sans interruption, r varie d'une manière continue le long de ce conducteur.

En vertu des hypothèses faites, nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mu' &= f(\mathrm{J}, \mathrm{J}', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,\\ &\qquad \delta\mathrm{J}, \delta\mathrm{J}', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega),\\ \delta\mu'_1 &= f(\mathrm{J}, \mathrm{J}'_1, ds, ds'_1, r_1, \cos\theta_1, \cos\theta'_1, \cos\omega_1,\\ &\qquad \delta\mathrm{J}, \delta\mathrm{J}'_1, \delta ds, \delta ds'_1, \delta r_1, \delta\cos\theta_1, \delta\cos\theta'_1, \delta\cos\omega_1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

1° Nous allons montrer d'abord que la fonction f ne dépend ni de J, ni de δJ.

Pour cela, considérons en premier lieu un élément ds de résistance R ds, parcouru par un courant d'intensité J, et mis en présence d'un circuit C′ auquel appartient l'élément ds'. Une modification élémentaire dans l'état du système est caractérisée par les variations

$$\delta\mathrm{J},\quad \delta\mathrm{J}',\quad \delta ds,\quad \delta ds',\quad \delta r,\quad \delta\cos\theta,\quad \delta\cos\theta',\quad \delta\cos\omega$$

des paramètres

$$\mathrm{J},\quad \mathrm{J}',\quad ds,\quad ds',\quad r,\quad \cos\theta,\quad \cos\theta',\quad \cos\omega.$$

L'induction, due aux éléments du circuit C', qui accompagne cette variation, met en mouvement dans l'élément ds une quantité d'électricité $\delta\mathfrak{Q}$ et l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\,ds\,\delta\mathfrak{Q} = \sum_{C'} f(\mathrm{J}, \mathrm{J}', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,\\ \delta\mathrm{J}, \delta\mathrm{J}', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega).\end{aligned}$$

Prenons ensuite un nouvel élément ds, identique au précédent, mais traversé par un courant d'identité j. Imaginons que j varie de δj, tandis que

$$\mathrm{J}', \quad ds, \quad ds', \quad r, \quad \cos\theta, \quad \cos\theta', \quad \cos\omega$$

subissent les mêmes variations

$$\delta\mathrm{J}', \quad \delta ds, \quad \delta ds', \quad \delta r, \quad \delta\cos\theta, \quad \delta\cos\theta', \quad \delta\cos\omega$$

que dans le cas précédent.

A cette nouvelle modification correspond un phénomène d'induction, dû aux éléments du circuit C', qui met en mouvement dans l'élément ds une quantité d'électricité δq et l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\,ds\,\delta q = \sum{}_{,} f(j, \mathrm{J}', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,\\ \delta j, \delta\mathrm{J}', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega).\end{aligned}$$

Juxtaposons les deux éléments ds que nous venons de considérer. Par leur ensemble nous formons un troisième élément ds, traversé par un courant d'intensité $\mathrm{J}+j$. Lorsque les quantités

$$\mathrm{J}+j, \quad \mathrm{J}', \quad ds, \quad ds', \quad r, \quad \cos\theta, \quad \cos\theta', \quad \cos\omega$$

varient de

$$\delta\mathrm{J}+\delta j, \quad \delta\mathrm{J}', \quad \delta ds, \quad \delta ds', \quad \delta r, \quad \delta\cos\theta, \quad \delta\cos\theta', \quad \delta\cos\omega,$$

l'induction due aux éléments du circuit C' met en mouvement, dans ce nouvel élément ds, une quantité d'électricité qui a évidemment pour valeur

$$\delta\mathfrak{Q}+\delta q.$$

D'ailleurs le troisième élément ds ayant pour résistance

$$\frac{\mathrm{R}}{2}\,ds,$$

on doit avoir

$$\frac{R}{2}(\delta\mathfrak{Q}+\delta q)\,ds = \sum_{C'} f(J+j, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$\delta J+\delta j, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega).$$

On doit donc avoir l'identité

$$\sum_{C'} f(J, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$\delta J, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega)$$
$$+\sum_{C'} f(j, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$\delta j, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega)$$
$$= 2\sum_{C'} f(J+j, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$\delta J+\delta j, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega).$$

Les quantités $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\cos\omega$ varient d'une manière quelconque, ainsi que $\delta ds'$, δr, $\delta\cos\theta$, $\delta\cos\theta'$, $\delta\cos\omega$ lorsqu'on passe d'un élément ds' à un autre. Les quantités J', $\delta J'$, r sont seulement assujetties à varier d'une manière continue d'un élément à l'autre d'un même circuit. L'identité précédente ne peut donc avoir lieu que si l'on a séparément, pour chaque groupe (ds, ds'),

$$f(J, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$\delta J, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega)$$
$$+f(j, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$\delta j, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega)$$
$$= 2f(J+j, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$\delta J+\delta j, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega).$$

Or, si nous faisons dans cette identité

$$j = 0, \qquad \delta j = 0,$$

nous trouvons

$$f(J, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$\delta J, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega)$$
$$= f(0, J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,$$
$$0, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega).$$

Cette égalité montre, comme nous l'avions annoncé, que la fonction f ne dépend ni de J, ni de δJ.

Dorénavant, nous pourrons remplacer les égalités (2) par les suivantes

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta\mu' = \mathrm{F}(\mathrm{J}', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega \\ \qquad\qquad \delta\mathrm{J}', \delta\, ds, \delta\, ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega), \\ \delta\mu'_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

2° Nous allons montrer maintenant que la fonction F est linéaire et homogène par rapport aux variations

$$\delta\mathrm{J}',\quad \delta\, ds',\quad \delta r,\quad \delta\cos\theta,\quad \delta\cos\theta',\quad \delta\cos\omega.$$

Imaginons, en effet, une première modification dans laquelle, pour le groupe (ds, ds'), ces quantités ont les valeurs suivantes

$$\delta\mathrm{J}',\quad \delta\, ds,\quad \delta\, ds',\quad \delta r,\quad \delta\cos\theta,\quad \delta\cos\theta',\quad \delta\cos\omega,$$

et des valeurs analogues pour ds'_1, ds'_2, ...

On aura alors

$$\begin{array}{l} \delta\mu' = \mathrm{F}(\mathrm{J}', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \\ \qquad\qquad \delta\mathrm{J}', \delta\, ds, \delta\, ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega), \end{array}$$

et cette première modification mettra en mouvement, dans l'élément ds, une quantité d'électricité $\delta\mathfrak{Q}$ donnée par

$$\begin{array}{l} \mathrm{R}\, ds\, \delta\mathfrak{Q} = \sum \mathrm{F}(\mathrm{J}', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \\ \qquad\qquad\qquad \delta\mathrm{J}', \delta\, ds, \delta\, ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega). \end{array}$$

Faisons suivre cette modification d'une seconde modification infiniment petite dans laquelle les quantités

$$\mathrm{J}',\quad ds,\quad ds',\quad r,\quad \cos\theta,\quad \cos\theta',\quad \cos\omega$$

subissent des variations

$$\mathrm{DJ}',\quad \mathrm{D}\, ds,\quad \mathrm{D}\, ds',\quad \mathrm{D}r,\quad \mathrm{D}\cos\theta,\quad \mathrm{D}\cos\theta',\quad \mathrm{D}\cos\omega.$$

Nous avons, pour cette seconde modification,

$$\begin{array}{l} \mathrm{D}\mu' = \mathrm{F}(\mathrm{J}' + \delta\mathrm{J}', ds + \delta\, ds, ds' + \delta ds', r + \delta r, \cos\theta + \delta\cos\theta, \cos\theta' + \delta\cos\theta', \\ \qquad \cos\omega + \delta\cos\omega, \mathrm{DJ}', \mathrm{D}\, ds, \mathrm{D}\, ds', \mathrm{D}r, \mathrm{D}\cos\theta, \mathrm{D}\cos\theta', \mathrm{D}\cos\omega). \end{array}$$

Supposons toutes les quantités

$$\delta J', \quad \delta ds, \quad \delta ds', \quad \delta \cos\theta, \quad \delta \cos\theta', \quad \delta \cos\omega$$

infiniment petites par rapport aux quantités

$$J', \quad ds, \quad ds', \quad \cos\theta, \quad \cos\theta', \quad \cos\omega.$$

Nous aurons alors, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\begin{aligned} D\mu' = F(&J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega \\ &DJ', D\,ds, D\,ds', Dr, D\cos\theta, D\cos\theta', D\cos\omega). \end{aligned}$$

Cette seconde modification met en mouvement, dans l'élément ds, une quantité d'électricité $D\mathfrak{Q}$ et l'on a

$$(R + \delta R)(ds + \delta ds) D\mathfrak{Q} = \sum D\mu',$$

ou bien, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\begin{aligned} R\,ds\,D\mathfrak{Q} = \sum F(&J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \\ &DJ', D\,ds, D\,ds', Dr, D\cos\theta, D\cos\theta', D\cos\omega). \end{aligned}$$

L'ensemble des deux modifications infiniment petites que nous venons de considérer constitue une modification infiniment petite, dans laquelle les quantités

$$J', \quad ds, \quad ds', \quad r, \quad \cos\theta, \quad \cos\theta, \quad \cos\omega,$$

varient de

$$\begin{aligned} \Delta J' &= \delta J' + DJ', \\ \Delta ds &= \delta ds + D\,ds, \\ \Delta ds' &= \delta ds' + D\,ds', \\ \Delta r &= \delta r + Dr, \\ \Delta \cos\theta &= \delta \cos\theta + D\cos\theta, \\ \Delta \cos\theta' &= \delta \cos\theta' + D\cos\theta', \\ \Delta \cos\omega &= \delta \cos\omega + D\cos\omega. \end{aligned}$$

Cette modification met en mouvement une quantité d'électricité

$$\Delta\mathfrak{Q} = \delta\mathfrak{Q} + D\mathfrak{Q}.$$

Mais on doit avoir, d'après l'égalité (3),

$$R\,ds\,\Delta\mathfrak{Q} = \sum F(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \Delta J', \Delta ds, \Delta ds', \Delta r, \Delta\cos\theta, \Delta\cos\theta', \Delta\cos\omega).$$

On voit donc que l'on a l'identité

$$\begin{aligned}&\sum F(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,\\ &\qquad \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega)\\ &+\sum F(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,\\ &\qquad DJ', D ds, D ds', D r, D\cos\theta, D\cos\theta', D\cos\omega)\\ &=\sum F(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,\\ &\qquad \delta J' + DJ', \delta ds + D ds, \delta ds' + D ds', \delta r + D r,\\ &\qquad \delta\cos\theta + D\cos\theta, \delta\cos\theta' + D\cos\theta', \delta\cos\omega + D\cos\omega).\end{aligned}$$

Les variations imposées à ds, ds', $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\cos\omega$ sont entièrement arbitraires; les variations imposées à J' et à r sont seulement assujetties à laisser ces quantités varier d'une manière continue lorsqu'on passe de l'élément ds' à un élément voisin appartenant au même conducteur.

L'égalité précédente montre donc que la somme

$$\sum F(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega),$$

étendue aux n éléments ds', ds'_1, ds'_2, ... qui, avec l'élément ds, forment le système étudié, est une fonction linéaire et homogène des $(6n+1)$ variations

$$\begin{array}{llllll}\delta J', & \delta ds', & \delta r, & \delta\cos\theta, & \delta\cos\theta', & \delta\cos\omega,\\ \delta J'_1, & \delta ds'_1, & \delta r_1, & \delta\cos\theta_1, & \delta\cos\theta_1, & \delta\cos\omega_1,\\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\\ & & & \delta ds. & & \end{array}$$

Or les variations $\delta J'$, $\delta ds'$, δr, $\delta\cos\theta$, $\delta\cos\theta'$, $\delta\cos\omega$ ne figurent que dans le terme

$$F(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \delta J', \delta ds, \delta ds', \delta r, \delta\cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega).$$

Ce terme doit donc être linéaire par rapport à ces variations et l'on doit avoir

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &F(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega,\\ &\quad \delta J', \delta\, ds, \delta\, ds', \delta r, \delta \cos\theta, \delta\cos\theta', \delta\cos\omega)\\ &\quad = \varphi(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \delta\, ds)\\ &\qquad + A(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta J'\\ &\qquad + B(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta\, ds'\\ &\qquad + C(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta\cos\theta\\ &\qquad + C'(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta\cos\theta'\\ &\qquad + D(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta\cos\omega\\ &\qquad + E(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta r, \end{aligned}\right.$$

ce qui démontre, comme nous l'avions annoncé, que la fonction F est linéaire par rapport aux six variations

$$\delta J',\quad \delta\, ds',\quad \delta r,\quad \delta\cos\theta,\quad \delta\cos\theta',\quad \delta\cos\omega.$$

3° Nous allons prouver que les six quantités

$$\varphi,\ B,\ C,\ C',\ D,\ E$$

sont proportionnelles à J', et que A ne dépend pas de J'.

Envisageons pour cela un premier élément $A'B' = ds'$, traversé par un courant d'intensité J'. Si les variables

$$J',\ ds',\ r,\ \cos\theta,\ \cos\theta',\ \cos\omega,\ ds,$$

relatives à cet élément, varient de

$$\delta J',\ \delta\, ds',\ \delta r,\ \delta\cos\theta,\ \delta\cos\theta',\ \delta\cos\omega,\ \delta\, ds,$$

cet élément nous fournit une quantité

$$\begin{aligned} \delta\mu' = {} & \varphi(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \delta\, ds)\\ &+ A(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta J'\\ &+ B(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta\, ds'\\ &+ C(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta\cos\theta\\ &+ C'(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta\cos\theta'\\ &+ D(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta\cos\omega\\ &+ E(J', ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\,\delta r. \end{aligned}$$

Supposons qu'un second élément $A'_1B'_1$, de même longueur ds' que A'B', soit exactement juxtaposé à A'B', et qu'il soit traversé par un courant d'intensité J'_1. Supposons que, dans la modification

considérée, $A'_1B'_1$ reste constamment juxtaposé à $A'B'$. Les paramètres

$$J'_1,\quad ds,\quad ds',\quad r,\quad \cos\theta,\quad \cos\theta',\quad \cos\omega,$$

qui définissent le système AB, $A'_1B'_1$, varieront de

$$\delta J'_1,\quad \delta\, ds,\quad \delta\, ds',\quad \delta r,\quad \delta \cos\theta,\quad \delta\cos\theta',\quad \delta\cos\omega.$$

Le nouvel élément $A'_1B'_1$ fournira donc à $\sum \delta\mu'$ une quantité

$$\begin{aligned}
\delta\mu'_1 = \quad & \varphi(J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \delta\, ds)\\
+ \; & A(J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta J'_1\\
+ \; & B(J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta\, ds'\\
+ \; & C(J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta\cos\theta\\
+ \; & C'(J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta\cos\theta'\\
+ \; & D(J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta\cos\omega\\
+ \; & E(J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta r.
\end{aligned}$$

Mais il est évident que l'on peut regarder l'ensemble des deux éléments $A'B'$, $A'_1B'_1$ comme formant un seul élément $A''B''$; le couple AB, $A''B''$ est défini par les paramètres

$$J' + J'_1,\quad ds,\quad ds',\quad r,\quad \cos\theta,\quad \cos\theta',\quad \cos\omega;$$

dans la modification considérée, ces paramètres varient de

$$\delta J' + \delta J'_1,\quad \delta\, ds,\quad \delta\, ds',\quad \delta r,\quad \delta\cos\theta,\quad \delta\cos\theta',\quad \delta\cos\omega,$$

et l'élément considéré fournit à $\sum \delta\mu''$ un terme

$$\begin{aligned}
\delta\mu'' = \quad & \varphi(J_1 + J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, \delta\, ds)\\
+ \; & A(J_1 + J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)(\delta J' + \delta J'_1)\\
+ \; & B(J_1 + J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta\, ds'\\
+ \; & C(J_1 + J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta\cos\theta\\
+ \; & C'(J_1 + J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta\cos\theta'\\
+ \; & D(J_1 + J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta\cos\omega\\
+ \; & E(J_1 + J'_1, ds, ds', r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, \delta r.
\end{aligned}$$

La quantité d'électricité mise en mouvement par l'induction dans l'élément ds, et par conséquent la quantité $\sum \delta\mu'$, doivent conserver la même valeur, soit que l'on envisage les deux éléments $A'B'$, $A'_1B'_1$ comme distincts, soit que l'on envisage leur ensemble

comme formant un seul élément. On doit donc avoir

$$\delta\mu'' = \delta\mu' + \delta\mu'_1,$$

quels que soient J', J'_1, $\delta J'_1$, $\delta J'_1$.

Il résulte alors des trois égalités précédentes que $\delta\mu'$ est une fonction linéaire et homogène de J' et de $\delta J'$.

Donc :

La quantité A ne dépend pas de J'.

Les quantités φ, B, C, C', D, E sont proportionnelles à J'.

Cela nous permet d'écrire, au lieu de l'égalité (4),

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\mu' = &+ J'\psi(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) \\ &+ \alpha(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta J' \\ &+ J'b(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\, ds' \\ &+ J'c(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\theta \\ &+ J'c'(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\theta' \\ &+ J'd(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\omega \\ &+ J'e(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta r. \end{aligned} \right.$$

4° Démontrons maintenant que la quantité b est indépendante de ds', tandis que les quantités ψ, a, c, c', d, e, sont proportionnelles à ds'.

Pour le démontrer, prenons un élément $ds' = A'B'$, dont les paramètres caractéristiques sont

$$J',\ ds',\ r,\ \cos\theta,\ \cos\theta',\ \cos\omega$$

et varient de

$$\delta J',\ \delta\, ds',\ \delta r,\ \delta\cos\theta,\ \delta\cos\theta',\ \delta\cos\omega;$$

il fournit à la quantité $\sum \delta\mu'$ un terme

$$\begin{aligned} \delta\mu' = &\ J'\psi(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) \\ &+ a(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta J' \\ &+ J'b(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\, ds' \\ &+ J'c(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\theta \\ &+ J'c'(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\theta' \\ &+ J'd(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\omega \\ &+ J'e(ds, ds', \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta r. \end{aligned}$$

Imaginons que l'élément $ds' = A'B'$ soit suivi d'un autre élé-

ment $ds'_1 = B'C'$, défini par les paramètres

$$J'_1,\ ds'_1,\ r_1,\ \cos\theta_1,\ \cos\theta'_1,\ \cos\omega_1,$$

qui varient de

$$\delta J'_1,\ \delta\, ds'_1,\ \delta r_1,\ \delta\cos\theta_1,\ \delta\cos\theta'_1,\ \delta\cos\omega_1.$$

Cet élément fournit à $\sum \delta\mu'$ un terme

$$\begin{aligned}
\delta\mu'_1 = \quad & J'_1\,\psi(ds, ds'_1, \cos\theta_1, \cos\theta'_1, \cos\omega_1, r_1, \delta\, ds) \\
+ \quad & a(ds, ds'_1, \cos\theta_1, \cos\theta'_1, \cos\omega_1, r_1)\,\delta J'_1 \\
+ \ & J'_1\, b(ds, ds'_1, \cos\theta_1, \cos\theta'_1, \cos\omega_1, r_1)\,\delta\, ds'_1 \\
+ \ & J'_1\, c(ds, ds'_1, \cos\theta_1, \cos\theta'_1, \cos\omega_1, r_1)\,\delta\cos\theta_1 \\
+ \ & J'_1\, c'(ds, ds'_1, \cos\theta_1, \cos\theta'_1, \cos\omega_1, r_1)\,\delta\cos\theta'_1 \\
+ \ & J'_1\, d(ds, ds'_1, \cos\theta_1, \cos\theta'_1, \cos\omega_1, r_1)\,\delta\cos\omega_1 \\
+ \ & J'_1\, e(ds, ds'_1, \cos\theta_1, \cos\theta'_1, \cos\omega_1, r_1)\,\delta r_1.
\end{aligned}$$

Les quantités r_1 et J'_1 diffèrent infiniment peu de r et de J'. Admettons que $\cos\theta_1$, $\cos\theta'_1$, $\cos\omega_1$ diffèrent infiniment peu de $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\cos\omega$; admettons aussi que $\delta J'_1$, $\delta\cos\theta_1$, $\delta\cos\theta'_1$, $\delta\cos\omega_1$, δr_1, diffèrent infiniment peu de $\delta J'$, $\delta\cos\theta$, $\delta\cos\theta'$, $\delta\cos\omega$, δr. Nous aurons alors, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\begin{aligned}
\delta\mu'_1 = \quad & J'\,\psi(ds, ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) \\
+ \quad & a(ds, ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta J' \\
+ \ & J'\, b(ds, ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\, ds'_1 \\
+ \ & J'\, c(ds, ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\theta \\
+ \ & J'\, c'(ds, ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\theta' \\
+ \ & J'\, d(ds, ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta\cos\omega \\
+ \ & J'\, e(ds, ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\delta r.
\end{aligned}$$

Mais il est évident que l'on peut, sans altérer la valeur de $\sum \delta\mu'$, regarder les deux éléments $A'B'$ et $B'C'$ comme formant un seul élément dont les paramètres caractéristiques sont

$$J',\quad ds' + ds'_1,\quad r,\quad \cos\theta,\quad \cos\theta',\quad \cos\omega,$$

et subissent les variations

$$\delta J',\quad \delta\, ds' + \delta\, ds'_1,\quad \delta r,\quad \delta\cos\theta,\quad \delta\cos\theta',\quad \delta\cos\omega.$$

Cet élément unique doit fournir à $\sum \delta\mu'$ un terme $\delta\mu''$ égal à $\delta\mu' + \delta\mu'_1$. Or on a

$$\begin{aligned}
\delta\mu'' = {} & J'\psi(ds, ds' + ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) \\
& + a(ds, ds' + ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, \delta J' \\
& + J' b(ds, ds' + ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)(\delta\, ds' + \delta\, ds'_1) \\
& + J' c(ds, ds' + ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, \delta \cos\theta \\
& + J' c'(ds, ds' + ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, \delta \cos\theta' \\
& + J' d(ds, ds' + ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, \delta \cos\omega \\
& + J' e(ds, ds' + ds'_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, \delta r.
\end{aligned}$$

Les trois expressions obtenues pour $\delta\mu'$, $\delta\mu'_1$, $\delta\mu' + \delta\mu'_1$, nous montrent que $\delta\mu'$ est, comme nous l'avions annoncé, une fonction linéaire et homogène de ds' et de $\delta\, ds'$; la quantité b est donc indépendante de ds', et les quantités ψ, a, c, c', d, e sont proportionnelles à ds'. Au lieu de l'égalité (5), nous pourrons écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\mu' = {} & \chi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds)\, J'\, ds' \\
& + \alpha(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, ds'\, \delta J' \\
& + \beta(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, J'\, \delta\, ds' \\
& + \gamma(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, J'\, ds'\, \delta \cos\theta \\
& + \gamma'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, J'\, ds'\, \delta \cos\theta' \\
& + \delta(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, J'\, ds'\, \delta \cos\omega \\
& + \varepsilon(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, J'\, ds'\, \delta r.
\end{aligned}\right.$$

5° Montrons maintenant que

$$\chi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds)$$

est proportionnel à $\delta\, ds$.

Nous avons évidemment

$$\delta\mu' = 0,$$

lorsque

$$\delta\, ds = 0, \qquad \delta\, ds' = 0, \qquad \delta J' = 0, \qquad \delta r = 0,$$
$$\delta \cos\theta = 0, \qquad \delta \cos\theta' = 0, \qquad \delta \cos\omega = 0.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\chi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) = \xi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds)\, \delta\, ds,$$

ξ ne devenant pas infini pour

$$\delta\, ds = 0.$$

Nous avons vu que $\sum \delta\mu'$ devait être une fonction linéaire et homogène des $(6n+1)$ variations

$$\begin{array}{cccccc} \delta\, ds', & \delta J', & \delta \cos\theta, & \delta \cos\theta', & \delta \cos\omega, & \delta r, \\ \delta\, ds'_1, & \delta J'_1, & \delta \cos\theta_1, & \delta \cos\theta'_1, & \delta \cos\omega_1, & \delta r_1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \end{array}$$
$$\delta\, ds.$$

Il en résulte évidemment que la quantité

$$\sum \xi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) J'\, ds'$$

doit être indépendante de $\delta\, ds$, ce qui exige que l'on ait

$$\sum \frac{\partial}{\partial(\delta\, ds)} \xi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) J'\, ds' = 0.$$

Cette somme, étendue aux n éléments ds' qui, avec l'élément ds, forment le système étudié, se décompose en un certain nombre d'intégrales étendues à des lignes le long desquelles J', $\cos\theta$ et r varient d'une manière continue, tandis que $\cos\theta'$, $\cos\omega$, varient d'une manière continue ou discontinue.

L'égalité précédente exige donc que l'on ait

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial(\delta\, ds)} \xi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) J' \\ &\qquad = \frac{\partial}{\partial s'} \varphi(ds, \cos\theta, r, \delta\, ds, J'), \end{aligned}$$

φ étant une fonction uniforme de r, $\cos\theta$ et J'.

Le premier nombre en dépendant par $\frac{dJ'}{ds}$, il doit en être de même du second; il en résulte évidemment que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial(\delta\, ds)} \xi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) = 0.$$

La quantité ξ ne dépend pas de $\delta\, ds$. Nous pouvons écrire simplement

$$\begin{aligned} &\chi(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r, \delta\, ds) \\ &\qquad = \beta'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, \delta\, ds. \end{aligned}$$

Si nous reportons cette expression de χ dans l'égalité (6),

celle-ci devient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mu' = {} & \alpha\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,ds'\,\delta \mathrm{J}' \\ & + \beta\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,\delta\,ds' \\ & + \beta'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\,ds \\ & + \gamma\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\theta \\ & + \gamma'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\theta' \\ & + \delta\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\omega \\ & + \varepsilon\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta r. \end{aligned}\right.$$

6° Enfin nous allons prouver que la quantité β' ne dépend pas de ds, tandis que les quantités α, β, γ, γ', δ, ε sont proportionnelles à ds.

Pour démontrer cette proposition, imaginons deux éléments rectilignes $ds = \mathrm{AB}$ et $ds_1 = \mathrm{BC}$, se suivant de manière à former par leur ensemble un élément $\mathrm{AC} = ds_2$. Pour le premier de ces éléments, nous avons

$$\begin{aligned} \delta\mu' = {} & \alpha\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,ds'\,\delta \mathrm{J}' \\ & + \beta\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,\delta\,ds' \\ & + \beta'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\,ds \\ & + \gamma\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\theta \\ & + \gamma'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\theta' \\ & + \delta\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\omega \\ & + \varepsilon\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta r. \end{aligned}$$

Pour le second, nous avons

$$\begin{aligned} \delta\mu'_1 = {} & \alpha\,(ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,ds'\,\delta \mathrm{J}' \\ & + \beta\,(ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,\delta\,ds' \\ & + \beta'(ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\,ds_1 \\ & + \gamma\,(ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\theta' \\ & + \gamma'(ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\theta' \\ & + \delta\,(ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta\cos\omega \\ & + \varepsilon\,(ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\,\mathrm{J}'\,ds'\,\delta r. \end{aligned}$$

Pour l'élément ds_2, nous avons

$$\begin{aligned} ds_2 &= ds + ds_1, \\ \delta\,ds_2 &= \delta\,ds + \delta\,ds_1 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta\mu'_2 = {} & \alpha\,(ds + ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r)\, ds'\,\delta J' \\ & + \beta\,(ds + ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) J'\delta\, ds' \\ & + \beta'(ds + ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) J'\, ds'(\delta\, ds + \delta\, ds_1) \\ & + \gamma\,(ds + ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) J'ds'\delta\cos\theta \\ & + \gamma'(ds + ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) J'ds'\delta\cos\theta' \\ & + \delta\,(ds + ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) J'ds'\delta\cos\omega \\ & + \varepsilon\,(ds + ds_1, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) J'ds'\delta r.\end{aligned}$$

La quantité d'électricité mise en mouvement par l'induction, dans chacun des éléments AB, BC, AC, est la même.

On a donc

$$\begin{aligned} R\, ds\ \ \delta\mathfrak{Q} &= \sum \delta\mu', \\ R\, ds_1\, \delta\mathfrak{Q} &= \sum \delta\mu'_1, \\ R\, ds_2\, \delta\ \ &= \sum \delta\mu'_2 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\sum \delta\mu' + \sum \delta\mu'_1 = \sum \delta\mu'_2.$$

Il résulte alors des expressions données par $\delta\mu'$, $\delta\mu'_1$, $\delta\mu'_2$, que $\sum \delta\mu'$ est une fonction linéaire et homogène de ds et de $\delta\, ds$.

De là on déduit en premier lieu que α, β, γ, γ', δ, ε sont proportionnels à ds; en second lieu que

$$\sum \beta'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) J'ds'$$

ne dépend pas de ds. On en déduit aisément, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait tout à l'heure, que β' ne dépend pas de ds.

Posons désormais

$$\begin{aligned} \alpha\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) &= \Phi\,(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, ds, \\ \beta\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) &= \Psi\,(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, ds, \\ \beta'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) &= \Psi'(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega), \\ \gamma\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) &= \Theta\,(r' \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, ds, \\ \gamma'(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) &= \Theta'(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, ds, \\ \delta\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) &= \Omega\,(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, ds, \\ \varepsilon\,(ds, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega, r) &= R\,(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)\, ds, \end{aligned}$$

et nous pourrons écrire, au lieu de l'équation (13),

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mu' = {} & \Phi\,\delta J'\,ds\,ds' + \Psi J'\,ds\,\delta\,ds' + \Psi' J'\,ds'\,\delta\,ds \\ & + (R\,\delta r + \Theta\,\delta\cos\theta + \Theta'\,\delta\cos\theta' + \Omega\,\delta\cos\omega) J'\,ds\,ds'. \end{aligned}\right.$$

7° Une nouvelle proposition, bien aisée à établir, est celle-ci : Les deux quantités Φ et Ψ sont égales entre elles.

Pour le démontrer, envisageons un élément A'B' traversé par un courant d'intensité infiniment petite j'. Envisageons une modification dans laquelle cet élément, sans changer de place ni d'orientation, s'allonge de manière à devenir A'B''. On a alors

$$B'B'' = \delta\,ds'.$$

Supposons que l'intensité j' demeure invariable, ainsi que la longueur et la position de l'élément ds. Nous aurons alors

$$\delta j' = 0, \qquad \delta r = 0, \qquad \delta\cos\theta = 0, \qquad \delta\cos\theta' = 0, \qquad \delta\cos\omega = 0,$$
$$\delta\,ds = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta\mu' = \Psi j'\,ds\,\delta\,ds'.$$

Mais nous pouvons évidemment concevoir d'une autre manière la modification dont le système est le siège; nous pouvons regarder ce système comme renfermant deux éléments: l'un A'B', dont tous les paramètres caractéristiques demeurent invariables, l'autre B'B'', de longueur $\delta\,ds$, traversé par un courant d'intensité o, au commencement de la modification infiniment petite et d'intensité j' à la fin. Cette nouvelle manière de concevoir la modification dont le système est le siège a pour effet de remplacer, dans $\sum \delta\mu'$, le terme $\delta\mu'$ par le terme

$$\delta\mu'' = \Phi\,ds\,\delta\,ds'\,j.$$

La quantité $\sum \delta\mu'$ ne doit pas dépendre de la manière arbitraire dont on conçoit cette modification infiniment petite. On doit donc avoir

$$\delta\mu' = \delta\mu'',$$

ou, comme nous l'avions annoncé,

$$\Phi = \Psi.$$

Ce résultat obtenu, nous pouvons remplacer l'égalité (8) par la suivante

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\mu' = {} & \Phi\, ds\, \delta(J' ds') + \Psi' J' ds' \delta\, ds \\ & + (R\, \delta r + \Theta\, \delta \cos\theta + \Theta' \delta \cos\theta' + \Omega\, \delta \cos\omega) J' ds\, ds'. \end{aligned} \right.$$

8° Parmi les conducteurs que renferme le système, supposons qu'il existe un conducteur fermé C″, dont nous désignerons les éléments par ds'', ds''_1, ds''_2, ... Les autres éléments du système seront désignés par ds''', ds'''_1, ds'''_2, ...

Nous aurons alors

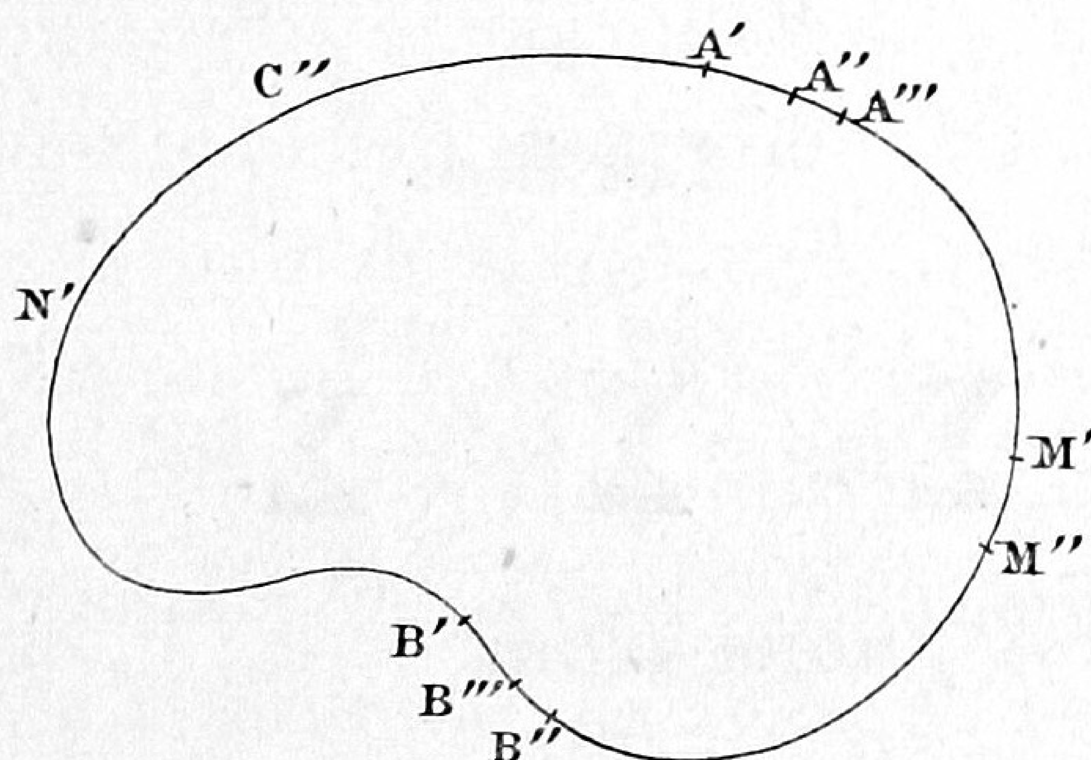
$$\sum \delta\mu' = \sum \delta\mu'' + \sum \delta\mu'''.$$

Nous supposerons le conducteur fermé C″ traversé par un courant d'intensité J″, uniforme et constant, en sorte que nous aurons

$$J'' = J''_1 = J''_2 = \ldots,$$
$$\delta J'' = \delta J''_1 = \delta J''_2 = \ldots = 0.$$

Sur le conducteur C″ ou A′M′B′N′ (*fig.* 25), considérons un arc A′M′B′, le long duquel ne se trouve aucun point anguleux, en

Fig. 25.



sorte que, le long de cet arc, r, $\cos\theta$, $\cos\theta''$, $\cos\omega$ seront des fonctions de s'' continues et admettant des dérivées.

Partageons cet arc en éléments

$$A'A'' = ds''_1, \quad \ldots, \quad M'M'' = ds'', \quad \ldots, \quad B''B' = ds''_2.$$

Nous supposerons une modification ainsi définie :

L'élément A′A″, sans changer de position ni d'orientation, s'allonge d'une quantité $A''A''' = \delta u$, en sorte que l'on a

$$\delta J''_1 = 0, \quad \delta\, ds''_1 = \delta u, \quad \delta r_1 = 0, \quad \delta \cos\theta_1 = 0, \quad \delta \cos\theta''_1 = 0, \quad \delta \cos\omega_1 = 0.$$

Les autres éléments de l'arc $A''M'B''$, tels que $M'M''$, s'avancent simplement d'une longueur δu sur l'arc s'', en sorte que, pour eux, on a

$$\delta J'' = 0,$$

$$\delta\, ds'' = 0,$$

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial s''}\delta u,$$

$$\delta \cos\theta = \frac{\partial \cos\theta}{\partial s''}\delta u,$$

$$\delta \cos\theta'' = \frac{\partial \cos\theta''}{\partial s''}\delta u,$$

$$\delta \cos\omega = \frac{\partial \cos\omega}{\partial s''}\delta u.$$

L'élément $B''B'$, sans changer de position ni d'orientation, se raccourcit d'une longueur $B''B''' = \delta u$. Pour cet élément, on a

$$\delta J''_2 = 0, \qquad \delta\, ds''_2 = -\,\delta u, \qquad \delta r_2 = 0,$$

$$\delta \cos\theta_2 = 0, \qquad \delta \cos\theta''_2 = 0, \qquad \delta \cos\omega_2 = 0.$$

Enfin les éléments du circuit C'' situés sur l'arc $B'N'A'$ demeurent invariables.

Quant à l'élément ds, il garde une longueur invariable, en sorte que l'on a

$$\delta\, ds = 0.$$

Formons

$$\sum \delta\mu' = \sum \delta\mu'' + \sum \delta\mu'''.$$

Pour l'élément $A'A''$, nous avons

$$\delta\mu''_1 = \Phi(r_1,\ \cos\theta_1,\ \cos\theta''_1,\ \cos\omega_1)\, J''\, ds\, \delta u.$$

Pour l'élément $B''B'$, nous avons

$$\delta\mu''_2 = -\,\Phi(r_2,\ \cos\theta_2,\ \cos\theta''_2,\ \cos\omega_2)\, J''\, ds\, \delta u.$$

Pour tout autre élément $M'M''$ de l'arc $A'M'B'$, nous avons

$$\delta\mu'' = \left(R\frac{\partial r}{\partial s''} + \Theta\frac{\partial \cos\theta}{\partial s''} + \Theta''\frac{\partial \cos\theta''}{\partial s''} + \Omega\frac{\partial \cos\omega}{\partial s''}\right) J''\, ds\, ds''\, \delta u.$$

Enfin, pour tout élément de l'arc $B'N'A'$, nous avons

$$\delta\mu'' = 0.$$

Nous avons donc

$$\sum \delta\mu' = [\Phi(r_1, \cos\theta_1, \cos\theta''_1, \cos\omega_1) - \Phi(r_2, \cos\theta_2, \cos\theta''_2, \cos\omega_2 \quad \mathrm{J}''\, ds\, \delta u$$
$$+ \mathrm{J}''\, ds\, du \int_{\mathrm{A'M'B'}} \left(\mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial s''} + \Theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial s''} + \Theta''\frac{\partial\cos\theta''}{\partial s''} + \Omega\frac{\partial\cos\omega}{\partial s''}\right) ds'' + \sum d\mu'''.$$

Mais il est évident que le système du courant C″ et de l'élément ds subit une modification qui ne change en rien sa définition électrodynamique et, par conséquent, qu'aucune induction ne doit se produire dans l'élément ds par le conducteur C″. On doit donc avoir

$$\sum \delta\mu' = \sum \delta\mu''',$$

ou bien

$$\int_{\mathrm{A'M'B'}} \left(\mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial s''} + \Theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial s''} + \Theta'\frac{\partial\cos\theta'}{\partial s''} + \Omega\frac{\partial\cos\omega}{\partial s''}\right) ds''$$
$$= \Phi(r_2, \cos\theta_2, \cos\theta''_2, \cos\omega_2) - \Phi(r_1, \cos\theta_1, \cos\theta''_1, \cos\omega_1).$$

Cette égalité, qui doit avoir lieu pour un arc A′M′B′ quelconque, ne présentant pas de point angulaire, donne

$$\mathrm{R} = \frac{\partial\Phi}{\partial r},$$

$$\Theta = \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\theta},$$

$$\Theta' = \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\theta'},$$

$$\Omega = \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\omega},$$

On a donc

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mu' &= \Psi'\mathrm{J}'\, ds'\,\delta\, ds + \Phi\, ds\,\delta(\mathrm{J}'\, ds') \\ &\quad + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\delta r + \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\theta}\delta\cos\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\theta'}\delta\cos\theta' + \frac{\partial\Phi}{\partial\cos\omega}\delta\cos\omega\right)\mathrm{J}'\, ds\, ds', \end{aligned}\right.$$

ou, plus brièvement,

$$(10\ bis)\qquad \delta\mu' = \Psi'\mathrm{J}'\, ds'\,\delta\, ds + ds\,\delta(\Phi\mathrm{J}'\, ds').$$

ment diminue d'une longueur δu au point A, de façon que ce point vienne en A_1. Si l'élément ds' demeure immobile et si J' demeure constant, on aura

$$\delta\mu' = -\Psi' J' \, ds' \, \delta u.$$

Supposons que le même élément s'allonge d'une longueur δu au point B, de façon que ce point vienne en B_1. On aura

$$\delta\mu'_1 = \Psi' J' \, ds' \, \delta u + \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \cos\theta}\frac{\partial \cos\theta}{\partial s} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \cos\theta'}\frac{\partial \cos\theta'}{\partial s} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \cos\omega}\frac{\partial \cos\omega}{\partial s}\right) J' \, ds \, ds' \, \delta u.$$

La première modification transporte de A en B une quantité d'électricité $\delta\mathfrak{Q}$, et la seconde une quantité d'électricité $\delta_1\mathfrak{Q}$. On a

$$R \, ds \, \delta\mathfrak{Q} = \sum \delta\mu',$$

$$R \, ds \, \delta_1\mathfrak{Q} = \sum \delta\mu'_1.$$

Si les deux modifications ont lieu simultanément, l'induction transportera de A en B, dans l'élément ds, une quantité d'électricité

$$\delta_2\mathfrak{Q} = \delta\mathfrak{Q} + \delta_1\mathfrak{Q}.$$

Mais cette quantité doit évidemment être la même que si l'élément AB, sans varier de longueur, s'était transporté de AB en A_1B_1, en se déplaçant d'une longueur δu dans sa propre direction. On a donc

$$R \, ds \, \delta_2\mathfrak{Q} = \sum \delta\mu'_2$$

avec

$$\delta\mu'_2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\theta}\frac{\partial \cos\theta}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\theta'}\frac{\partial \cos\theta'}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\omega}\frac{\partial \cos\omega}{\partial s}\right) J' \, ds \, ds' \, \delta u.$$

Les diverses égalités que nous venons d'obtenir nous donnent

$$\begin{aligned}
&\sum J'\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\theta}\frac{\partial \cos\theta}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\theta'}\frac{\partial \cos\theta'}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\omega}\frac{\partial \cos\omega}{\partial s}\right) ds' \\
&= \sum J'\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \cos\theta}\frac{\partial \cos\theta}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \cos\theta'}\frac{\partial \cos\theta'}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \cos\omega}\frac{\partial \cos\omega}{\partial s}\right) ds'
\end{aligned}$$

ou bien

$$\sum J' \frac{\partial}{\partial s}(\Phi - \Psi)\, ds' = 0.$$

Supposons que les éléments ds' forment un conducteur linéaire le long duquel r et J′ sont seuls assujettis à varier d'une manière continue. Quelle que soit la forme de ce conducteur, on devra avoir

$$\int J' \frac{\partial}{\partial s}(\Phi - \Psi)\, ds' = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$J' \frac{\partial}{\partial s}(\Phi - \Psi)\, ds' = \frac{\partial}{\partial s'} G(J', r),$$

G pouvant en outre dépendre de $\cos\theta$ et de $\frac{\partial \cos\theta}{\partial s}$.

Le premier membre ne renfermant pas $\frac{dJ'}{ds'}$, le second ne doit pas non plus renfermer cette quantité. Il est aisé de conclure de là que l'on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial s}(\Phi - \Psi) = 0$$

ou bien

$$\Phi = \Psi + C.$$

Considérons un circuit C′ et un élément ds, C′ étant traversé par un courant constamment uniforme dont l'intensité varie de J′ à $J' + \delta J'$. On a

$$\sum \delta\mu' = ds\, \delta J' \int \Phi\, ds'.$$

Si le circuit C′ est infiniment éloigné de ds, on doit avoir

$$\sum \delta\mu' = 0.$$

Donc, dans ce cas,

$$\int \Phi\, ds' = 0.$$

Imaginons maintenant l'intensité invariable dans C′, mais ds variant de $\delta\, ds$. On a

$$\sum \delta\mu' = \delta\, ds \int \Psi\, ds'.$$

Si C′ est infiniment éloigné de ds, on doit avoir

$$\sum \delta\mu' = 0$$

et, par conséquent,

$$\int \Psi\, ds' = 0.$$

Mais

$$\int \Phi\, ds' = \int \Psi\, ds' + C \int ds'.$$

On a donc, ou

$$\int ds' = 0,$$

ce qui est impossi ou

$$C = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Phi = \Psi.$$

Reportons ce résultat dans l'égalité (10), et nous trouvons enfin

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\mu' = {} & \Phi\, \delta(J'\, ds\, ds') \\ & + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\, \delta r + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\theta}\, \delta\cos\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\theta'}\, \delta\cos\theta' + \frac{\partial \Phi}{\partial \cos\omega}\, \delta\cos\omega \right) J'\, ds\, ds' \end{aligned} \right.$$

ou, plus brièvement,

$$(12)\quad \delta\mu' = \delta(\Phi J'\, ds\, ds').$$

Arrêtons-nous un instant à ce résultat.

Il nous montre, en premier lieu, que la détermination de la loi de l'induction est ramenée à la détermination d'une seule fonction Φ de r, $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\cos\omega$.

En second lieu, l'égalité (12) permet d'écrire

$$R\, ds\, \delta\mathfrak{Q} = \delta\left(ds \sum \Phi J'\, ds' \right).$$

Imaginons une modification durant laquelle la résistance

$$\rho = R\, ds$$

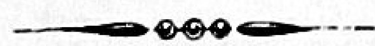
de l'élément ds demeure invariable ; cette modification met en mouvement, dans l'élément ds, une quantité d'électricité $\mathfrak{Q}$, et l'on a

$$\rho\mathfrak{Q} = \left(ds \sum \Phi J'\, ds' \right)_1 - \left(ds \sum \Phi J'\, ds' \right)_0.$$

Nous voyons donc que, *dans une modification quelconque d'un système de courants, l'induction met en mouvement, dans un élément de résistance donnée et invariable, une quantité d'électricité qui dépend uniquement de l'état initial et de l'état final du système formé par l'élément et par les courants.*

Cette proposition, admise comme hypothèse fondamentale dans le cas d'une modification infiniment petite, est ainsi démontrée pour une modification quelconque. Cette proposition joue le rôle d'hypothèse fondamentale dans la théorie de F.-E. Neumann, et dans la plupart des autres théories de l'induction électrodynamique.

Nous allons chercher, dans ce qui va suivre, à déterminer la forme de la fonction Φ.



CHAPITRE II.

LA LOI ÉLÉMENTAIRE DE L'INDUCTION DANS LES CIRCUITS LINÉAIRES (suite). — DÉTERMINATION DE LA FONCTION $\Phi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)$.

Venons maintenant aux propositions qui nous permettront de déterminer la fonction $\Phi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)$.

Si nous désignons par $\mathcal{E}\,ds$ la force électromotrice d'induction qui agit dans l'élément ds, nous aurons, par définition,

$$\mathcal{E}\,ds\,dt = \mathrm{R}\,ds\,\delta\mathrm{Q},$$

dt étant le temps pendant lequel la charge $\delta\mathrm{Q}$ est mise en mouvement. Cette égalité peut encore s'écrire

$$\mathcal{E}\,ds\,dt = \sum \delta\mu'.$$

D'après l'égalité (12) du Chapitre I, on peut encore écrire

$$\mathcal{E}\,ds\,dt = \sum \delta(\Phi\,\mathrm{J}'\,ds\,ds').$$

Si nous posons

$$e\,ds\,dt = \delta(\Phi\,\mathrm{J}'\,ds\,ds'),$$

nous aurons

$$\mathcal{E} = \sum e,$$

la somme s'étendant à tous les éléments ds' du système.

La quantité $\mathcal{E}$ est ce que nous appellerons *la force électromotrice totale d'induction en un point de l'élément ds*.

e sera *la force électromotrice élémentaire d'induction engendrée en un point de l'élément ds par l'élément ds'*.

Cette définition posée, nous allons, pour pousser plus avant la détermination de la fonction Φ, envisager un système de conduc-

teurs linéaires fermés C, C′, C″, ... Nous supposerons ces conducteurs invariables de forme et de position. Nous supposerons, en outre, qu'ils sont traversés par des courants qui varient tout en demeurant uniformes, en sorte qu'à l'instant t ces courants ont pour intensités J, J′, J″, ... et qu'à l'instant $t + dt$ ils ont pour intensités $J + \frac{dJ}{dt}dt$, $J' + \frac{dJ'}{dt}dt$, $J'' + \frac{dJ''}{dt}dt$, ...

Dans ce cas, on aura

$$e\,dt = \delta(\Phi\,J'\,ds') = \Phi\,\frac{dJ'}{dt}\,ds'\,dt.$$

Par conséquent, la force électromotrice d'induction en un point du circuit C aura pour valeur

$$\mathcal{E} = \frac{dJ}{dt}\int_C \Phi\,ds + \frac{dJ'}{dt}\int_{C'} \Phi\,ds' + \frac{dJ''}{dt}\int_{C''} \Phi\,ds'' + \ldots,$$

et la force électromotrice totale d'induction dans le circuit C aura pour valeur

$$H = \frac{dJ}{dt}\int_C\int_C \Phi\,ds\,ds_1 + \frac{dJ'}{dt}\int_C\int_{C'} \Phi\,ds'\,ds + \frac{dJ''}{dt}\int_C\int_{C''} \Phi\,ds''\,ds + \ldots.$$

Il faut évidemment que ces deux quantités soient finies, quelles que soient les valeurs finies prises par $\frac{dJ}{dt}$, $\frac{dJ'}{dt'}$, $\frac{dJ''}{dt}$, ... On arrive donc immédiatement à ces conséquences :

1° *L'intégrale*

$$\int \Phi\,ds,$$

étendue à un contour fermé quelconque, est finie quelle que soit la position de l'élément ds auquel elle se rapporte;

2° *L'intégrale*

$$\int\int \Phi\,ds\,ds'$$

étendue soit deux fois au même circuit fermé de dimensions finies, soit à deux circuits fermés de dimensions finies, situés à des distances finies, doit avoir une valeur finie.

Soit maintenant C′ un circuit inducteur immobile parcouru par un courant que nous ne supposerons plus uniforme. Dans l'élé-

ment ds du circuit immobile C, la force électromotrice d'induction a pour valeur

$$ds \int_{C} \Phi \frac{dJ'}{dt} ds'.$$

Cette force doit évidemment être de l'ordre de ds, quelles que soient les positions de l'élément ds et du circuit C'. La somme

$$\int_{C} ds \int_{C'} \Phi \frac{dJ'}{dt} ds'$$

doit donc être finie, quels que soient les deux circuits C et C'. Cette somme peut encore s'écrire

$$\int_{C'} \frac{dJ'}{dt} ds' \int_{C} \Phi \, ds.$$

$\frac{dJ'}{dt}$ est une quantité arbitraire variable d'une manière continue le long du contour C'; la quantité précédente ne peut être finie que moyennant la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int_{C} \Phi \, ds$$

est finie, quel que soit le contour C *et quelle que soit la position de l'élément* ds' *auquel elle se rapporte.*

A ces propositions, nous ajouterons les deux suivantes :

1° *La fonction* Φ *change de signe, sans changer de grandeur, lorsque l'on renverse le sens de l'élément* ds *sans rien changer au sens de l'élément* ds'.

2° *La fonction* Φ *change de signe, sans changer de grandeur, lorsque l'on renverse le sens de l'élément* ds' *sans rien changer au sens de l'élément* ds.

Pour démontrer la première proposition, considérons l'élément $AB = ds$, et soit tout d'abord AB le sens positif de cet élément. Considérons une modification élémentaire dans laquelle les éléments ds, ds', ds'', ... qui forment le système demeurent invariables de forme et de position, tandis que les intensités J', J'', ... des courants qui traversent ds', ds'', ... varient de $\delta J'$, $\delta J''$, ... Si $R\,ds$ est la résistance de l'élément ds, l'induction transporte dans

le sens positif de cet élément, *c'est-à-dire de* A *vers* B, une quantité d'électricité δQ donnée par

$$R\,\delta Q = \Phi'\,ds'\,\delta J' + \Phi''\,ds''\,\delta J'' + \ldots.$$

Si δQ est la quantité d'électricité transportée par l'induction dans l'élément ds de A vers B, on peut aussi bien dire que l'induction transporte dans l'élément ds, de B vers A, une quantité d'électricité $-\delta Q$. Si donc on change le sens de l'élément ds, la quantité d'électricité transportée par l'induction aura pour valeur $-\delta Q$.

D'autre part, si l'on maintient invariable le sens des éléments ds', ds'', ..., $\delta J'$, $\delta J''$, ... conserveront leur grandeur et leur signe. On aura donc

$$-R\,\delta Q = \Phi'_1\,ds'\,\delta J' + \Phi''_1\,ds''\,\delta J'' + \ldots,$$

Φ'_1, Φ''_1, ... désignant ce que deviennent Φ', Φ'', ... lorsqu'on change le sens de l'élément ds sans changer le sens des éléments ds', ds'', ...

L'égalité

$$\Phi'\,ds'\,\delta J' + \Phi''\,ds''\,\delta J'' + \ldots = -(\Phi'_1\,ds'\,\delta J' + \Phi''_1\,ds''\,\delta J'' + \ldots)$$

doit donc avoir lieu quels que soient $\delta J'$, $\delta J''$, ..., ce qui entraîne les égalités

$$\Phi' = -\Phi'_1,$$
$$\Phi'' = -\Phi''_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et démontre la proposition énoncée.

Pour démontrer que Φ' change de signe sans changer de valeur absolue lorsqu'on renverse le sens de l'élément ds' sans changer le sens de l'élément ds, nous considérerons un élément $A'B'$ qui demeure imobile, ainsi que l'élément ds, et qui n'est, à aucun moment, parcouru par un courant. Nous avons, pour cet élément,

$$J' = 0, \qquad \delta J' = 0$$

et, partant,

$$\delta\mu' = 0.$$

Mais nous pouvons évidemment, sans changer la quantité d'électricité déplacée dans l'élément ds par l'induction, regarder cet élément comme la juxtaposition de deux éléments $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$,

le premier parcouru de A'_1 vers B'_1 par un courant dont l'intensité varie de J' à $J' + \delta J'$; le second parcouru de B'_2 vers A'_2 par un courant dont l'intensité varie aussi de J' à $J' + \delta J'$.

Le premier fournit à $\sum \delta\mu'$ un terme

$$\delta\mu'_1 = \Phi'_1 \,\delta J' \,ds\, ds'.$$

Dans l'évaluation de Φ'_1, l'élément ds' est supposé dirigé de A'_1 vers B'_1.

Le second fournit à $\sum \delta\mu'$ un terme

$$\delta\mu'_2 = \Phi'_2 \,\delta J' \,ds\, ds'.$$

Dans l'évaluation de Φ'_2, l'élément ds' est supposé dirigé de B' vers A'_2.

On voit donc que l'on a

$$\Phi'_1 + \Phi'_2 = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Désignons par

$$(ds, A'B')$$

l'intégrale

$$ds \int_{A'B'} \Phi \, ds',$$

étendue à tous les éléments ds' d'une ligne fermée ou ouverte $A'B'$.

Soit $A'M'B'N'$ le circuit inducteur C' et AB l'élément induit ds.

Nous avons évidemment

$$(ds, C') = (ds, AM'B') + (ds, B'N'A').$$

D'autre part, la fonction Φ changeant de signe sans changer de valeur lorsqu'on renverse le sens de l'élément ds', on voit sans peine que l'on a l'identité

$$0 = (ds, B'P'A') + (ds, A'P'B').$$

On a donc

$$\begin{aligned}(ds, C') = \;& (ds, AM'B') + (ds, B'P'A') \\ & + (ds, A'P'B') + (ds, B'N'A')\end{aligned}$$

ou bien

$$(ds, C') = (ds, A'M'B'P'A') + (ds, B'P'A'N'B').$$

Ainsi, *si, par une ligne auxiliaire joignant deux points du circuit* C′, *on décompose ce circuit fermé en deux autres circuits partiels* Γ', Γ'_1, *parcourus dans le même sens que lui, on aura, quel que soit l'élément ds,*

$$(ds, C') = (ds, \Gamma') + (ds, \Gamma'_1).$$

On peut répéter la même opération sur chacun des deux circuits Γ', Γ'_1 ; puis sur chacun des quatre circuits ainsi obtenus et ainsi de suite indéfiniment. On arrive alors à la proposition suivante :

Par le circuit C′, *on fait passer une surface à deux côtés; par deux systèmes de lignes, on décompose cette surface en éléments dont les contours sont des circuits infiniment petits* γ', γ'_1, γ'_2, ..., *que l'on suppose tous parcourus dans le même sens que le circuit* C′. *On a, quelle que soit la position de l'élément ds,*

$$(ds, C') = (ds, \gamma') + (ds, \gamma'_1) + (ds, \gamma'_2) + \ldots.$$

Nous avons vu, il y a un instant, que l'intégrale

$$(ds, C')$$

devait être de l'ordre de ds quels que soient l'élément ds et le circuit fermé et fini C′. Il est aisé d'en conclure que les intégrales

$$(ds, \gamma'), \quad (ds, \gamma'_1), \quad (ds, \gamma'_2), \quad \ldots$$

doivent être respectivement du même ordre que les produits

$$(ds, \sigma'), \quad (ds, \sigma'_1), \quad (ds, \sigma'_2), \quad \ldots,$$

σ', σ'_1, σ'_2, ... étant les aires embrassées par les circuits élémentaires γ', γ'_1, γ'_2, ..., sur la surface qui passe par le contour C′. Nous arrivons donc ainsi à la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int \Phi \, ds',$$

étendue à un circuit plan infiniment petit quelconque, doit être, quelle que soit la position de l'élément auquel elle se

rapporte, un infiniment petit du second ordre, lorsque

$$\int ds'$$

est un infiniment petit du premier ordre.

En nous appuyant sur ce fait que la fonction Φ change de signe, sans changer de valeur, lorsqu'on renverse le sens de l'élément ds, et en raisonnant comme nous l'avons fait tout à l'heure, nous démontrerons cette proposition :

Par le contour C, *on fait passer une surface à deux côtés. Par deux systèmes de lignes, on découpe cette surface en éléments dont les contours forment des circuits infiniment petits* $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots,$ *que l'on suppose tous décrits dans le même sens que le contour* C. *On a, quels que soient le contour* C *et l'élément* ds,

$$(C, ds') = (\gamma, ds') + (\gamma_1, ds') + (\gamma_2, ds') + \ldots.$$

Nous avons vu que l'intégrale

$$(C, ds')$$

devait être finie quels que soient l'élément ds' et le contour fini C auquel elle se rapporte. On parvient donc sans peine à la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int \Phi\, ds,$$

étendue à un contour fermé, plan, infiniment petit, est un infiniment petit du second ordre, lorsque

$$\int ds$$

est un infiniment petit du premier ordre.

Les propositions précédentes fournissent la forme générale de la fonction Φ, au moyen du théorème de M. J. Bertrand (Introduction, Chap. I, § 3).

La fonction Φ est une fonction de r, $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\cos\omega$,

$$\Phi = \varphi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega).$$

Dès lors, les relations (3) et (4) du Chapitre I de l'Introduction permettent d'écrire

$$\Phi = F\left(x, y, z, x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}\right).$$

Nous venons de voir que l'intégrale

$$\int F\left(x, y, z, x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}\right) ds$$

devait être un infiniment petit du second ordre, lorsque

$$\int ds$$

est un infiniment petit du premier ordre.

Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\Phi = P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds},$$

P, Q, R étant indépendante de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

En s'appuyant sur cette proposition que

$$\int \Phi\, ds'$$

doit être un infiniment petit du second ordre lorsque

$$\int ds'$$

st un infiniment petit du premier ordre, on démontrerait de même que l'on doit avoir

$$\Phi = P'\frac{dx'}{ds'} + Q'\frac{dy'}{ds'} + R'\frac{dz'}{ds'},$$

P′, Q′, R′ étant indépendants de $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$. Φ, étant linéaire et homogène en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et aussi linéaire et homogène en $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$, doit être forcément de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi = {} & A_{11}\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{12}\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{13}\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\ & + A_{21}\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{22}\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{23}\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\ & + A_{31}\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{32}\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{33}\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}, \end{aligned}\right.$$

les neuf fonctions

$$\begin{matrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33} \end{matrix}$$

ne dépendant que des coordonnées x, y, z d'un point de l'élément ds et des coordonnées x', y', z' d'un point de l'élément ds'.

Le résultat exprimé par l'égalité (1) conduit sans peine à la proposition suivante :

Considérons deux éléments AB, A'B'. Par le point A, faisons passer trois axes rectangulaires quelconques, Ax, Ay, Az. Par le point A', faisons passer trois axes, respectivement parallèles aux précédents $A'x'$, $A'y'$, $A'z'$. Soient AB_1, AB_2, AB_3 les projections de l'élément AB sur les axes Ax, Ay, Az. Soient $A'B'_1$, $A'B'_2$, $A'B'_3$ les projections de l'élément A'B' sur les trois axes $A'x'$, $A'y'$, $A'z'$. *La fonction* $\Phi\, ds\, ds'$ *relative au système des deux éléments* AB, A'B' *est égale à la somme des fonctions* $\Phi\, d\sigma\, d\sigma'$ *relatives aux divers systèmes que l'on obtient en groupant de toutes les manières possibles un des éléments* AB_1, AB_2, AB_3 *avec un des éléments* $A'B'_1$, $A'B'_2$, $A'B'_3$.

Ce premier résultat obtenu, établissons deux lemmes :

Lemme I. — Considérons deux éléments AB, A'B', dont l'un, AB, est situé suivant la droite AA', tandis que l'autre lui est normal. Lorsque nous ferons tourner ce système autour de la droite AA', la situation relative des deux éléments ne changera pas; il en sera donc de même de la fonction Φ. Donnons au système une rotation d'une demi-circonférence. Le résultat obtenu sera le même que si l'on avait conservé l'élément AB et renversé le sens de l'élément A'B'. Or une semblable opération doit changer le signe de la fonction Φ. Donc la fonction Φ relative au système de nos deux éléments ne change pas de valeur en changeant de signe, ce qui exige qu'elle soit égale à o.

Lemme II. — Considérons deux éléments AB, A'B', tous deux normaux à la droite AA' et normaux entre eux. Nous avons pour le système de ces deux éléments

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta' = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Conservons l'élément AB et remplaçons l'élément A′B′ par un élément identique, mais de sens contraire, $A'_1 B'_1$. Nous aurons encore, pour le système de ces deux éléments,

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta' = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Si nous observons que la fonction Φ est, par hypothèse, une fonction *uniforme* des paramètres

$$r, \quad \theta, \quad \theta', \quad \omega,$$

nous voyons que l'on doit avoir

$$\Phi(AB, A'B') = \Phi(AB, A'_1 B'_1).$$

Mais la fonction Φ relative au système de deux éléments change de signe, sans changer de valeur, lorsqu'on renverse le sens d'un des deux éléments. On doit donc aussi avoir

$$\Phi(AB, A'B') = -\Phi(AB, A'_1 B'_1).$$

Ces deux égalités ne sont compatibles que si l'on a

$$\Phi(AB, A'B') = 0.$$

Ainsi la fonction Φ est égale à o pour deux éléments perpendiculaires entre eux et à la droite qui les joint.

On remarquera que la démonstration du premier lemme suppose seulement que la fonction Φ est définie par la situation relative des deux éléments AB, A′B′; tandis que la démonstration du second lemme suppose la fonction Φ définie *d'une manière uniforme* par la connaissance des paramètres

$$r, \quad \theta, \quad \theta', \quad \omega.$$

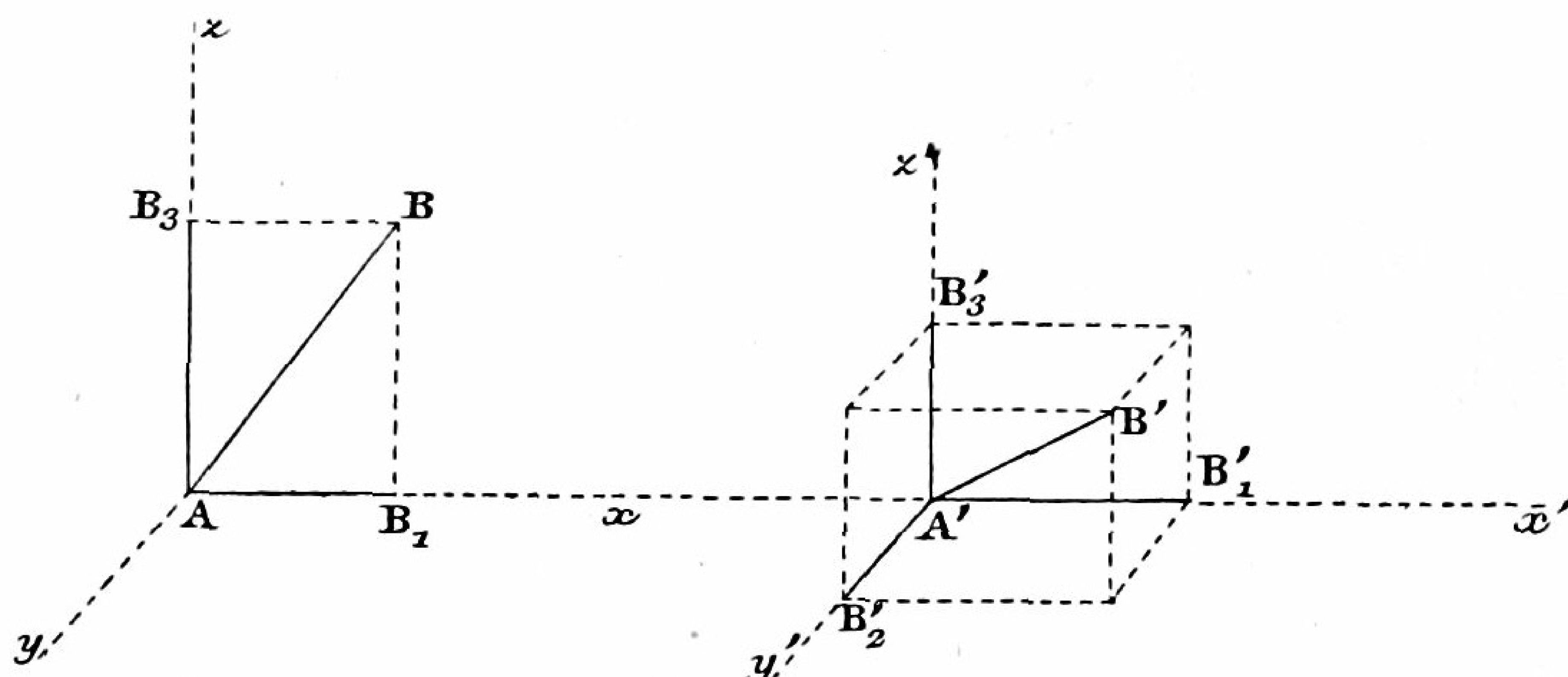
Nous avons vu que cette dernière hypothèse revenait à supposer équivalents le système formé par l'élément AB avec l'élément A′B′ et le système formé par l'élément AB avec l'élément $A'B'_1$, symétrique de A′B′ par rapport au plan BAA′.

Ces deux lemmes démontrés, considérons deux éléments, $AB = ds$, $A'B' = ds'$ (*fig.* 26).

Pour direction des axes Ax, $A'x'$, prenons la direction AA′. Dans le demi-plan BAA′, menons la normale à la droite AA′, et prenons-la pour direction des axes Az, $A'z'$.

Menons une normale au plan BAA′ du côté de ce plan où se trouve l'élément A′B′. Prenons-la pour la direction des axes Ay, $A'y'$.

Fig. 26.



Nous aurons évidemment

$$\begin{aligned} AB_1 &= ds \cos\theta, & A'B'_1 &= ds \cos\theta', \\ AB_2 &= 0, & A'B'_2 &= ds \sin\theta' \cos\varepsilon, \\ AB_3 &= ds \sin\theta, & A'B'_3 &= ds \sin\theta' \sin\varepsilon, \end{aligned}$$

l'angle ε étant défini comme au Chapitre I de l'Introduction.

D'après le premier lemme, nous aurons

$$\Phi(AB_1, A'B'_2) = 0,$$
$$\Phi(AB_1, A'B'_3) = 0,$$
$$\Phi(AB_3, A'B'_1) = 0.$$

D'après le second lemme, nous aurons

$$\Phi(AB_3, B'B'_2) = 0.$$

La proposition énoncée avant la démonstration de ces lemmes nous donne donc

$$\Phi(AB, A'B')\, ds\, ds' = \Phi(AB_1, A'_1B'_1)\overline{AB_1}\,.\,\overline{A'B'_1} + \Phi(AB_3, A'B'_3)\,\overline{AB_3}\,.\,A'B'_3$$

ou bien

$$\Phi(AB, A'B') = \Phi(AB_1, A'B'_1)\cos\theta\cos\theta' + \Phi(AB_3, A'B'_3)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon.$$

La situation relative de deux éléments dirigés suivant la même ligne, comme les éléments AB_1, $A'B'_1$, dépend uniquement de la longueur de chacun de ces éléments et de la distance AA′. On peut donc poser

$$\Phi(AB_1, A'B'_1) = F(r).$$

La situation relative de deux éléments parallèles, de même

sens, et perpendiculaires à la droite qui les joint, comme les éléments AB_3, AB'_3, dépend uniquement de la longueur de chacun de ces éléments et de la distance AA′. On peut donc poser

$$\Phi(AB_3, A'B'_3) = g(r).$$

On a ainsi

$$\Phi(ds, ds') = F(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon.$$

Mais on a également [Introduction, Chap. I, égalité (8)],

$$\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon = \cos\omega - \cos\theta\cos\theta'.$$

Si donc on pose

$$f(r) = F(r) - g(r),$$

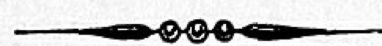
on aura

$$\Phi = f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega. \tag{2}$$

Dès lors, on voit que les hypothèses faites au Chapitre précédent conduisent à l'expression suivante pour la force électromotrice élémentaire d'induction

$$e\,ds\,ds'\,dt = \delta\left\{J'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds'\right\},$$

expression qui ne dépend plus que des deux fonctions inconnues $f(r)$ et $g(r)$ de la distance r.



CHAPITRE III.

LOI ÉLÉMENTAIRE DE L'INDUCTION (suite). — DÉTERMINATION DES FONCTIONS $f(r)$ ET $g(r)$.

La quantité Φ est déterminée [Chap. II, égalité (2)] par l'égalité

$$\Phi = f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \cos\omega.$$

Il s'agit maintenant de déterminer la forme des deux fonctions $f(r)$ et $g(r)$.

Pour cela, considérons un circuit réalisable quelconque auquel appartient l'élément ds'. Supposons que l'élément ds et que ce circuit demeurent immobiles, mais que l'intensité du courant qui parcourt ce circuit subisse des variations quelconques. Soit $\mathcal{E}$ la force électromotrice d'induction engendrée par ce circuit dans l'élément ds. Nous aurons

$$\mathcal{E}\, dt = ds \int [f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \cos\omega]\, \delta J'\, ds',$$

l'intégrale s'étendant au circuit considéré.

$\delta J'$ est une fonction uniforme des coordonnées de l'élément ds'. Nous pouvons supposer qu'on ait défini une quantité $H(x, y, z)$ qui soit dans tout l'espace fonction continue et uniforme de x, y, z et qui soit égale à o aux deux extrémités du conducteur, si celui-ci est ouvert. Nous pourrons ensuite, désignant par ε une constante infiniment petite, prendre

$$\delta J' = \varepsilon H(x', y', z'),$$

x', y', z' étant les coordonnées d'un point ds'.

On a [Introduction, Chap. I, égalités (3) et (4)], en désignant

par x, y, z les coordonnées d'un point de l'élément ds,

$$\cos\omega = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},$$

$$\cos\theta = \frac{x'-x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz}{ds},$$

$$\cos\theta' = \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}.$$

Ces égalités nous permettent d'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{E}\,dt = {} & \varepsilon\frac{dx}{ds}ds\int \mathrm{H}(x', y', z')\Big\{\Big[f(r)\frac{(x'-x)^2}{r^2} + g(r)\Big]\frac{dx'}{ds'} \\
& \qquad + f(r)\frac{(x'-x)(y'-y)}{r^2}\frac{dy'}{ds'} \\
& \qquad + f(r)\frac{(x'-x)(z'-z)}{r^2}\frac{dz'}{ds'}\Big\}ds' \\
& + \varepsilon\frac{dy}{ds}ds\int \mathrm{H}(x', y', z')\Big\{f(r)\frac{(y'-y)(x'-x)}{r^2}\frac{dx'}{ds'} \\
& \qquad + \Big[f(r)\frac{(y'-y)^2}{r^2} + g(r)\Big]\frac{dy'}{ds'} \\
& \qquad + f(r)\frac{(y'-y)(z'-z)}{r^2}\frac{dz'}{ds'}\Big\}ds' \\
& + \varepsilon\frac{dz}{ds}ds\int \mathrm{H}(x', y', z')\Big\{f(r)\frac{(z'-z)(x'-x)}{r^2}\frac{dx'}{ds'} \\
& \qquad + f(r)\frac{(z'-z)(y'-y)}{r^2}\frac{dy'}{ds} \\
& \qquad + \Big[f(r)\frac{(z'-z)^2}{r^2} + g(r)\Big]\frac{dz'}{ds'}\Big\}ds'.
\end{aligned}\right.$$

Supposons que le circuit demeure immobile, mais que l'élément ds s'éloigne, au delà de toute limite, dans une direction arbitraire et avec une orientation arbitraire. La quantité r croîtra au delà de toute limite; les quantités

$$\frac{x'-x}{r},\quad \frac{y'-y}{r},\quad \frac{z'-z}{r},$$

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds}$$

tendront vers des limites assujetties seulement aux relations

$$\left(\frac{x'-x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y'-y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z'-z}{r}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Or, dans ces conditions, la force électromotrice d'induction définie par les égalités précédentes doit évidemment tendre vers o. Il en résulte évidemment que les trois intégrales qui figurent en coefficients de $\frac{dx}{ds}ds$, $\frac{dy}{ds}ds$, $\frac{dz}{ds}ds$ doivent, dans ces conditions, tendre vers o.

Cela devra avoir lieu, en particulier, si le circuit considéré est fermé. Nous arrivons donc à la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int \mathrm{H}(x', y', z')\left\{\left[f(r)\frac{(x'-x)^2}{r^2} + g(r)\right]\frac{dx'}{ds'} + f(r)\frac{(x'-x)(y'-y)}{r^2}\frac{dy'}{ds'} + f(r)\frac{(x'-x)(z'-z)}{r^2}\frac{dz'}{ds'}\right\}ds',$$

étendue à un circuit fermé quelconque, tend vers o lorsque l'élément ds s'éloigne, au delà de toute limite, dans une direction quelconque.

Ce théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Lorsque l'élément ds s'éloigne, au delà de toute limite, dans une direction quelconque, la quantité

$$\mathrm{H}(x', y', z')\left\{\left[f(r)\frac{(x'-x)^2}{r^2} + g(r)\right]dx' + f(r)\frac{(x'-x)(y'-y)}{r^2}dy' + f(r)\frac{(x'-x)(z'-z)}{r^2}dz'\right\}$$

doit avoir pour limite la différentielle totale d'une fonction finie, continue et uniforme de x', y', z'.

Cette quantité est de la forme

$$\mathrm{A}\,dx' + \mathrm{B}\,dy' + \mathrm{C}\,dz'.$$

On doit donc avoir

$$\lim\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z'} - \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y'}\right) = 0,$$

$$\lim\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x'} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z'}\right) = 0,$$

$$\lim\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x'}\right) = 0.$$

Écrivons cette dernière égalité. Elle nous donne, toute réduc-

tion faite,

$$\lim \left\{ \left[f(r)\frac{(x'-x)^2}{r^2} + g(r) \right] \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'} - f(r)\frac{(x'-x)(y'-y)}{r^2}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'} + \mathrm{H}(x', y', z')\frac{dg(r)}{dr}\frac{y'-y}{r} \right\} = 0.$$

Cela doit avoir lieu, quelle que soit la direction dans laquelle l'élément ds s'est éloigné au delà de toute limite.

Si nous supposons

$$\lim \frac{x'-x}{r} = 0, \qquad \lim \frac{y'-y}{r} = 0, \qquad \lim \frac{z'-z}{r} = 1,$$

nous trouverons

$$\lim [g(r)]_{r=\infty} = 0.$$

Si nous supposons

$$\lim \frac{x'-x}{r} = 1, \qquad \lim \frac{y'-y}{r} = 0, \qquad \lim \frac{z'-z}{r} = 0,$$

nous trouvons

$$\lim [f(r)]_{r=\infty} = 0.$$

Ainsi, *les deux fonctions* $f(r)$ *et* $g(r)$ *doivent tendre vers* 0 *lorsque* r *croît au delà de toute limite.*

Si l'élément ds fait partie du circuit s', la quantité $\mathcal{E}\,dt$, donnée par l'égalité (1), devra être de l'ordre $\varepsilon\,ds$; sinon, un courant immobile dont l'intensité varie produirait en lui-même des courants d'induction infinis. Or, dans ces conditions, lorsque l'élément ds devient infiniment voisin de l'élément ds, on a

$$\lim r = 0,$$

$$\lim \frac{dx'}{ds'} = \frac{dx}{ds}, \qquad \lim \frac{dy'}{ds'} = \frac{dy}{ds}, \qquad \lim \frac{dz'}{ds'} = \frac{dz}{ds},$$

$$\lim \frac{x'-x}{r} = \frac{dx}{ds}, \qquad \lim \frac{y'-y}{r} = \frac{dy}{ds}, \qquad \lim \frac{z'-z}{r} = \frac{dz}{ds}.$$

Supposons, par exemple, $\frac{dx}{ds} = 1$, et nous verrons sans peine que la condition précédente exige que l'on ait

$$\lim \{ r[f(r) + g(r)] \}_{r=0} = \mathrm{A},$$

A étant une quantité finie qui peut être 0.

Si l'élément ds est parallèle à un élément $d\sigma'$ du circuit s' et

infiniment voisin de cet élément, la quantité $\mathcal{E}\,dt$, donnée par l'égalité (1), devra encore être de l'ordre de $\varepsilon\,ds$; sinon, un courant dont l'intensité varie produirait dans un circuit infiniment voisin et parallèle une induction infinie.

Or, si l'élément ds' tend vers l'élément $d\sigma'$, on a

$$\lim r = 0,$$

$$\lim \frac{dx'}{ds'} = \frac{dx}{ds}, \qquad \lim \frac{dy'}{ds'} = \frac{dy}{ds}, \qquad \lim \frac{dz'}{ds'} = \frac{dz}{ds}.$$

Quant aux quantités $\lim \frac{x'-x}{r}$, $\lim \frac{y'-y}{r}$, $\lim \frac{z'-z}{r}$, elles sont simplement assujetties à ces conditions

$$\frac{dx}{ds} \lim \frac{x'-x}{r} + \frac{dy}{ds} \lim \frac{y'-y}{r} + \frac{dz}{ds} \lim \frac{z'-z}{r} = 0,$$

$$\lim \left(\frac{x'-x}{r}\right)^2 + \lim \left(\frac{y'-y}{r}\right)^2 + \lim \left(\frac{z'-z}{r}\right)^2 = 1.$$

Supposons

$$\frac{dx}{ds} = 1, \qquad \frac{dy}{ds} = 0, \qquad \frac{dz}{ds} = 0.$$

La quantité $\lim \frac{x'-x}{r}$ pourra avoir une valeur quelconque comprise entre -1 et $+1$. Supposons cette quantité égale à 0; il sera aisé de voir que la condition précédemment indiquée exige que l'on ait

$$\lim [r\, g(r)]_{r=0} = \mathrm{B},$$

B étant une quantité finie, qui peut être 0.

Ainsi, *les deux quantités $r f(r)$ et $r g(r)$ ne croissent pas au delà de toute limite lorsque r tend vers* 0.

Enfin, *les deux fonctions $f(r)$ et $g(r)$ sont finies, continues et uniformes pour toute valeur de r qui n'est pas infiniment petite.*

Ayant acquis ces renseignements sur les deux fonctions $f(r)$ et $g(r)$, nous admettrons, et *ce sont les deux seules hypothèses que nous ferons au cours du présent Chapitre*, que ces deux fonctions sont de la forme

$$f(r) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 r + \mathrm{A}_2 r^2 + \ldots + \mathrm{A}_m r^m + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \ldots + \frac{\alpha_\mu}{r^\mu},$$

$$g(r) = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 r + \mathrm{B}_2 r^2 + \ldots + \mathrm{B}_n r^n + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{r^\nu},$$

m, n, μ, ν étant quatre nombres entiers, positifs, limités, mais quelconques.

Ces hypothèses sont plus générales que celles qu'il est d'usage de faire dans les recherches de ce genre; Ampère, dans la détermination des deux fonctions de la distance qui figurent en sa loi des actions électrodynamiques; Gauss, dans la détermination de la fonction de la distance qui figure dans la loi des actions magnétiques; M. Felici, dans la détermination des deux fonctions de la distance que renferme la loi de l'induction entre courants uniformes, ont tous supposé que les fonctions à déterminer étaient de la forme

$$\frac{A}{r^n},$$

et, quand deux fonctions à déterminer figuraient ensemble dans la formule, ils supposaient l'exposant n identique pour toutes deux.

Il résulte de ces hypothèses et des renseignements obtenus sur $f(r)$ et $g(r)$ que l'on a

$$f(r) = \frac{\alpha_1}{r}, \qquad g(r) = \frac{\beta_1}{r}.$$

Posons

$$\beta_1 + \alpha_1 = B,$$
$$\beta_1 - \alpha_1 = \lambda B,$$

B et λ étant deux nouvelles constantes, et nous aurons

$$f(r) = B\,\frac{1-\lambda}{2}, \qquad g(r) = B\,\frac{1+\lambda}{2},$$

en sorte que la fonction Φ deviendra

$$\Phi = \frac{B}{r}\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right), \tag{2}$$

les deux quantités B et λ étant deux constantes qui nous sont jusqu'ici inconnues.

L'expression de la force électromotrice élémentaire d'induction est alors donnée par l'égalité suivante

$$e\,ds\,ds'\,dt = B\delta\left[\frac{J'}{r}\left(\frac{1-\lambda}{2}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2}\cos\omega\right)ds\,ds'\right]. \tag{3}$$

La constante λ joue, dans les théories actuelles de l'Électrodynamique, un rôle considérable qui a été mis en évidence par M. H. von Helmholtz. Nous lui donnerons le nom de *constante d'Helmholtz*.

Quant à la constante B, nous la nommerons la *constante fondamentale* de l'Électrodynamique.

Des résultats auxquels nous a conduit la détermination de $f(r)$ et de $g(r)$, nous pouvons déduire maintenant la conséquence suivante :

Si l'élément ds tend à se placer suivant l'élément $d\sigma$ du circuit s', l'intégrale

$$\int J' \Phi \, ds'$$

tend vers une limite qui est égale à la valeur que prend cette intégrale lorsque l'élément ds coïncide avec l'élément $d\sigma$.

Cette proposition n'est pas évidente d'elle-même; car, lorsque l'élément ds coïncide avec l'élément $d\sigma$, $\cos\theta$, $\cos\theta'$ sont infiniment voisins de o pour tous les éléments ds' voisins de l'élément ds; il n'en est plus de même si l'élément ds est infiniment voisin d'un élément $d\sigma$ du circuit s', sans faire partie de ce circuit.

En vertu de l'égalité (2), nous pouvons écrire

$$\int J' \Phi \, ds' = B \int \frac{J'}{r} \left(\frac{1-\lambda}{2} \cos\theta \cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2} \cos\omega \right) ds.$$

L'égalité

$$\cos\theta \cos\theta' = \cos\omega + r \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'}$$

remplace cette égalité par

$$\int J' \Phi \, ds' = B \int J' \frac{\cos\omega}{r} \, ds' + \frac{B(1-\lambda)}{2} \int J' \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'} \, ds'.$$

Mais on a

$$\int J' \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'} \, ds' = \left[J' \frac{\partial r}{\partial s} \right]_0^1 - \int \frac{\partial r}{\partial s} \frac{dJ'}{ds'} \, ds'$$

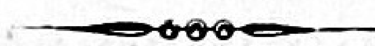
et

$$\left[J' \frac{\partial r}{\partial s} \right]_0^1 = 0,$$

que le courant soit ouvert ou fermé. On a donc

$$\int J'\Phi\, ds' = B\int J' \frac{\cos\omega}{r}\, ds' + \frac{B(1-\lambda)}{2}\int \cos\theta\, \frac{dJ'}{ds'}\, ds'$$

et, sous cette forme, la proposition énoncée devient évidente.



CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DU SIGNE DE LA CONSTANTE D'INDUCTION.

Jusqu'ici nous n'avons pas déterminé les deux constantes B et λ qui figurent dans nos formules. Nous allons, dans le présent Chapitre, nous occuper de la détermination de la constante B, ou, du moins, de la détermination du signe de cette constante.

Suivant une notation que nous avons déjà employée plusieurs fois, nous désignerons par le symbole

$$(c, c'),$$

l'intégrale double

$$\int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds',$$

étendue une fois au contour c et une autre fois au contour c'.

Nous ferons remarquer, en premier lieu, que, si les contours c et c' sont tous deux fermés, on peut aussi bien écrire

$$(c, c') = \int\int \left(\frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' \right) ds\, ds'.$$

En effet, on a [Introduction, Chap. I, égalité (6)],

$$\cos\theta \cos\theta' = \cos\omega + r \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\int\int \left(\frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' \right) ds\, ds' \\
&\quad = \int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds' + \frac{1-\lambda}{2} \int\int \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\, ds\, ds'.
\end{aligned}$$

Mais, si les deux circuits c et c' sont fermés, on a

$$\int\int \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\, ds\, ds' = 0,$$

et la proposition énoncée est démontrée.

Considérons un système de n circuits 1, 2, ..., n, fermés et traversés, dans le sens positif, par des courants d'intensité J_1, J_2, ..., J_n, et envisageons la somme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \Pi = (1,1)J_1^2 + (1,2)J_1J_2 + (1,3)J_1J_3 + \ldots + (1,n)J_1J_n \\ \quad + (2,1)J_2J_1 + (2,2)J_2^2 + (2,3)J_2J_3 + \ldots + (2,n)J_2J_n \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + (n,1)J_nJ_1 + (n,2)J_nJ_2 + (n,3)J_nJ_3 + \ldots + (n,n)J_n^2, \end{array}\right.$$

dans laquelle on a évidemment par définition

$$(p, q) = (q, p).$$

Nous nous proposons de démontrer que *la quantité* Π *est toujours positive, à moins que l'on n'ait*

$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0, \quad \ldots, \quad J_n = 0.$$

On peut évidemment écrire

$$(p,p) = \int_p \int_p \frac{1}{r}\left(\frac{dx_p}{ds_p}\frac{dx'_p}{ds'_p} + \frac{dy_p}{ds_p}\frac{dy'_p}{ds'_p} + \frac{dz_p}{ds_p}\frac{dz'_p}{ds'_p}\right) ds_p\, ds'_p,$$

$$(p,q) = \int_p \int_q \frac{1}{r}\left(\frac{dx_p}{ds_p}\frac{dx_q}{ds_q} + \frac{dy_p}{ds_p}\frac{dy_q}{ds_q} + \frac{dz_p}{ds_p}\frac{dz_q}{ds_q}\right) ds_p\, ds_q,$$

et l'on voit alors sans peine que

$$\Pi = 2\sum \frac{JJ'}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) ds\, ds',$$

le signe $\sum$ indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes des éléments du système deux à deux.

Sur l'élément ds, distribuons un fluide fictif qui ait pour densité *linéaire*

$$u = J\frac{dx}{ds}.$$

Nous aurons

$$\sum \frac{JJ'}{r}\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}\, ds\, ds' = \sum \frac{uu'}{r}\, ds\, ds'.$$

Le second membre est le potentiel du fluide fictif considéré; c'est une quantité essentiellement positive. Il en est de même des quantités

$$\sum \frac{JJ'}{r} \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} ds\, ds',$$

$$\sum \frac{JJ'}{r} \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} ds\, ds'$$

et, par conséquent, de la quantité Π.

La quantité Π est une forme homogène et du second degré des variables $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Le discriminant de cette forme est le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n,1) & (n,2) & (n,3) & \ldots & (n,n) \end{vmatrix}.$$

Désignons par

$$\frac{q}{D(a, b, \ldots, k)}$$

le déterminant, mineur de D, obtenu en supprimant dans D les $(n-q)$ lignes autres que les lignes $a, b, \ldots, k$ et les lignes $(n-q)$, colonnes de même rang.

Puisque la forme Π est toujours positive, *toutes les quantités*

$$\frac{q}{D(a, b, \ldots, k)}$$

sont positives.

Ce théorème se trouve énoncé, mais sans démonstration *a priori,* dans les travaux de M. H. von Helmholtz [1] et de M. Brillouin [2].

Ce théorème va nous servir à déterminer le signe de la constante B.

Imaginons n circuits $1, 2, \ldots, n$, invariables de forme et de position, traversés par des courants uniformes dont les intensités

---

(1) HELMHOLTZ, *Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromsschwankungen inducirten elektrischen Ströme* (*Pogg. Ann.*, Bd. LXXXIII, p. 505; 1851. — HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 429).

(2) BRILLOUIN, *Intégration des équations différentielles auxquelles conduit l'étude des phénomènes d'induction dans les circuits dérivés* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. X, p. 9; 1881).

$J_1, J_2, \ldots, J_n$ varient avec le temps. Posons.

$$p_{ii} = B \int_i \int_i \frac{\cos\omega}{r} ds_i ds'_i = B(i, i),$$

$$P_{ij} = B \int_i \int_j \frac{\cos\omega}{r} ds_i ds_j = B(i, j).$$

Supposons que $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ soient les forces électromotrices étrangères à l'induction que renferment les circuits $1, 2, \ldots, n$. Il est facile de voir que $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sont liés par les équations

$$\begin{aligned}
p_1 \frac{dJ_1}{dt} + P_{12} \frac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{1n} \frac{dJ_n}{dt} - R_1 J_1 + \eta_1 &= 0,\\
P_{21} \frac{dJ_1}{dt} + p_2 \frac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{2n} \frac{dJ_n}{dt} - R_2 J_2 + \eta_2 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
P_{n1} \frac{dJ_1}{dt} + P_{n2} \frac{dJ_2}{dt} + \ldots + p_n \frac{dJ_n}{dt} - R_n J_n + \eta_n &= 0,
\end{aligned}$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ étant les résistances des circuits $1, 2, \ldots, n$.

Les intégrales générales de ces équations sont de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\eta_1}{R_1} + \sum_{i=1}^{i=n} A_i e^{\alpha_i t},\\
J_2 &= \frac{\eta_2}{R_2} + \sum_{i=1}^{i=n} B_i e^{\alpha_i t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J_n &= \frac{\eta_n}{R_n} + \sum_{i=1}^{i=n} L_i e^{\alpha_i t},
\end{aligned}\right.$$

les n^2 quantités

$$\begin{matrix}
A_1, & A_2, & \ldots, & A_n,\\
B_1, & B_2, & \ldots, & B_n,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
L_1, & L_2, & \ldots, & L_n,
\end{matrix}$$

étant déterminées par les conditions initiales, et les n quantités α_i étant les n racines de l'équation algébrique

$$(3)\quad \begin{vmatrix}
p_1\alpha - R_1 & P_{12}\alpha & \ldots & P_{1n}\alpha\\
P_{21}\alpha & p_2\alpha - R_2 & \ldots & P_{2n}\alpha\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
P_{n1}\alpha & P_{n2}\alpha & \ldots & p_n\alpha - R_n
\end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation a toujours toutes ses racines réelles. Prenons, en effet, la transformée en $x = \frac{1}{\alpha}$:

$$\begin{vmatrix} p_1 - R_1 x & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & p_2 - R_2 x & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & p_n - R_n x \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut s'écrire, en posant

$$a_{ii} = \frac{p_i}{R_i}, \qquad a_{ij} = \frac{P_{ij}}{\sqrt{R_i R_j}},$$

$${}_1 R_2 \dots R_n \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0.$$

Nous trouvons une équation de type bien connu qui a, comme l'a montré Cauchy, toutes ses racines réelles.

L'équation (3), ordonnée par rapport à α, peut s'écrire

$$B^n \alpha^n \frac{n}{D(1, 2, \dots, n)} - B^{n-1} \alpha^{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} R_i \frac{n-1}{D(1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\pm B\alpha \left[\frac{1}{D(1)} R_2 R_3 \dots R_n + \frac{1}{D(2)} R_1 R_3 \dots R_n + \dots + \frac{1}{D(n)} R_1 R_2 \dots R_{n-1} \right] \mp R_1 R_2 \dots R_n = 0.$$

Si l'on observe que toutes les quantités

$$\frac{q}{D(a, b, \dots, k)}$$

sont positives, on arrive à la proposition suivante :

Les n quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ont le signe de B.

Supposons que B soit positif et revenons aux égalités (2); on voit que, si l'état stationnaire donné par les égalités

$$J_1 = \frac{\eta_1}{R_1}, \qquad J_2 = \frac{\eta_2}{R_2}, \qquad \dots, \qquad J_n = \frac{\eta_n}{R_n}$$

était dérangé, même infiniment peu, on obtiendrait, par suite de l'induction, des courants dont les intensités, prises en valeur ab-

solue, croîtraient, en général, au delà de toute limite avec le temps. Ce résultat est évidemment inadmissible.

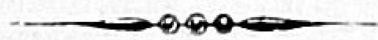
Au contraire, si la constante B est négative, l'état stationnaire, une fois troublé, tendra à se rétablir; il sera stable.

La constante B *est donc négative.*

La constante B étant forcément négative, nous poserons dorénavant

$$B = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}.$$

La quantitité $\mathfrak{A}^2$ ainsi introduite est ce que nous nommerons la *constante fondamentale de l'Électrodynamique.*



CHAPITRE V.

INDUCTION DANS LES CIRCUITS FERMÉS PARCOURUS PAR DES COURANTS UNIFORMES.

§ 1. — Énoncé de la loi de l'induction pour les courants fermés et uniformes.

D'après l'égalité (3) du Chapitre II, la force électromotrice élémentaire d'induction que l'élément ds' engendre dans l'élément ds est donnée par l'égalité

$$(1)\qquad e\,ds\,ds'\,dt = \delta\left\{J'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds'\right\}.$$

Si l'on admet les hypothèses faites au Chapitre III, elle prend la forme

$$(2)\qquad e\,ds\,ds'\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left[J'\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)ds\,ds'\right].$$

La quantité définie par l'égalité

$$(3)\qquad \varpi\,ds\,ds' = JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds',$$

ou bien par l'égalité

$$(4)\qquad \varpi\,ds\,ds' = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}JJ'\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)ds\,ds',$$

est ce que nous nommerons, pour une raison qui sera indiquée ultérieurement, le *potentiel électrodynamique de l'élément ds' traversé par un courant d'intensité* J' *sur l'élément ds traversé par un courant d'intensité* J.

Moyennant cette dénomination, le résultat exprimé par les égalités (1) ou (2) peut s'énoncer de la manière suivante :

La force électromotrice d'induction $e\,ds\,ds'$ engendrée par l'élément ds' dans l'élément ds est égale à la dérivée par rap-

port au temps du potentiel électrodynamique de l'élément ds' traversé par le courant qui le traverse réellement sur l'élément ds traversé par un courant égal à l'unité.

La force électromotrice totale d'induction qui agit dans l'élément ds est la somme des forces électromotrices élémentaires engendrées par les divers éléments ds' qui composent le système. Si l'on désigne cette force par $\mathcal{E}\,ds$, on aura

$$(5) \qquad \mathcal{E}\,ds\,dt = \delta \left\{ ds \sum J'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds' \right\},$$

ou bien

$$(6) \qquad \mathcal{E}\,ds\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left[ds \sum J'\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)ds'\right].$$

La quantité

$$J\,ds \sum J'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds',$$

ou bien

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,J\,ds \sum J'\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)ds',$$

est ce que nous nommerons le *potentiel électrodynamique du système sur l'élément ds traversé par un courant d'intensité* J.

Moyennant cette définition, le résultat contenu dans les égalités (5) ou (6) peut s'énoncer ainsi :

La force électromotrice d'induction qui agit dans l'élément ds est égale à la dérivée par rapport au temps du potentiel électrodynamique de tout le système traversé par les courants qui le traversent en réalité sur l'élément ds traversé par un courant égal à l'unité.

Supposons que le conducteur induit que nous étudions soit un conducteur fermé, formé par des éléments $ds_1, ds_2, \ldots, ds_n$. *Supposons aussi que nous soyons assurés, par un moyen quelconque, de l'exactitude de la proposition suivante : Le courant qui traverse le conducteur en question (courant dû en partie à l'induction, en partie aux forces électromotrices étrangères à l'induction), est un courant uniforme.*

Soit J l'intensité de ce courant.

Soient $R_1\,ds_1$, $R_2\,ds_2$, ... les résistances des éléments ds_1, ds_2, ...

Soient $\eta_1\,ds_1$, $\eta_2\,ds_2$, ... les forces électromotrices étrangères à l'induction qu'ils renferment.

Nous aurons

$$(7)\quad \begin{cases} J = \dfrac{(\eta_1 + \mathcal{E}_1)\,ds_1}{R_1\,ds_1} = \dfrac{(\eta_2 + \mathcal{E}_2)\,ds_2}{R_2\,ds_2} = \ldots = \dfrac{(\eta_n + \mathcal{E}_n)\,ds_n}{R_n\,ds_n} \\ \quad = \dfrac{(\eta_1\,ds_1 + \eta_2\,ds_2 + \ldots + \eta_n\,ds_n) + (\mathcal{E}_1\,ds_1 + \mathcal{E}_2\,ds_2 + \ldots + \mathcal{E}_n\,ds_n)}{R_1\,ds_1 + R_2\,ds_2 + \ldots + R_n\,ds_n}. \end{cases}$$

La quantité

$$R = R_1\,ds_1 + R_2\,ds_2 + \ldots + R_n\,ds_n$$

est la résistance totale du circuit considéré.

La quantité

$$H = \eta_1\,ds_1 + \eta_2\,ds_2 + \ldots + \eta_n\,ds_n$$

est la force électromotrice totale étrangère à l'induction qui agit dans le circuit considéré.

Nous donnerons à la quantité

$$(8)\qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1\,ds_1 + \mathcal{E}_2\,ds_2 + \ldots + \mathcal{E}_n\,ds_n$$

le nom de force électromotrice intégrale d'induction *qui agit dans le circuit considéré.*

L'égalité (7) pourra s'écrire alors

$$J = \frac{H + \mathcal{E}}{R},$$

forme sous laquelle elle nous apprend que, dans le cas où nous nous sommes placés, il ne nous est pas nécessaire de connaître la force électromotrice d'induction qui agit dans chaque élément de l'induit, mais seulement la force électromotrice intégrale d'induction.

Soient $\Pi_1\,ds_1$, $\Pi_2\,ds_2$, ..., $\Pi_n\,ds_n$ les potentiels électrodynamiques de tout le système, *y compris le courant considéré,* sur les éléments ds_1, ds_2, ..., ds_n traversés respectivement par des courants égaux à l'unité. La quantité

$$(9)\qquad \Pi = \Pi_1\,ds_1 + \Pi_2\,ds_2 + \ldots + \Pi\,ds_n$$

sera, par définition, *le potentiel électrodynamique de tout le*

système (y *compris le conducteur induit*) *parcouru par les courants qui y existent en réalité, sur le conducteur induit traversé par un courant égal à l'unité.*

Or on a

$$\mathcal{E}_1\, ds_1 = \frac{d}{dt}(\Pi_1\, ds_1), \quad \mathcal{E}_2\, ds_2 = \frac{d}{dt}(\Pi_2\, ds_2), \quad \ldots, \quad \mathcal{E}_n\, ds_n = \frac{d}{dt}(\Pi_n\, ds_n).$$

On a donc, d'après les égalités (8) et (9),

$$\mathcal{E} = \frac{d\Pi}{dt}. \tag{10}$$

La force électromotrice intégrale d'induction engendrée dans un circuit fermé quelconque qui fait partie d'un système électrodynamique quelconque est égale à la dérivée par rapport au temps du potentiel électrodynamique de tout le système (y *compris le conducteur induit*) *parcouru par les courants qui le traversent en réalité sur le conducteur induit traversé par un courant égal à l'unité.*

Cet énoncé a été obtenu dès 1847 par F.-E. Neumann [1] pour le cas où les courants qui forment le système sont tous fermés et uniformes.

C'est maintenant à ce cas que nous allons nous limiter. Nous supposerons le système étudié formé par n conducteurs fermés, sans dérivation, mobiles ou immobiles, que nous désignerons par les indices $1, 2, \ldots, n$. Nous les supposerons traversés par des courants uniformes, constants ou variables, d'intensité $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Nous y admettrons des forces électromotrices totales, étrangères à l'induction, $H_1, H_2, \ldots, H_n$. $R_1, R_2, \ldots, R_n$ seront les résistances de ces conducteurs.

Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} p_i &= \int_i \int_i [f(r) \cos\theta_i \cos\theta'_i + g(r) \cos\omega]\, ds_i\, ds'_i, \\ P_{ij} &= \int_i \int_j [f(r) \cos\theta_i \cos\theta_j + g(r) \cos\omega]\, ds_i\, ds_j. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

---

(1) F.-E. NEUMANN, *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme.* Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 9 août 1847.

Le potentiel électrodynamique du système tout entier sur le circuit i traversé par un courant égal à l'unité sera

$$P_{1,i}J_1 + P_{2,i}J_2 + \ldots + P_{i-1,i}J_{i-1} + p_iJ_i + P_{i+1,i}J_{i+1} + \ldots + P_{n,i}J_n,$$

dont la dérivée par rapport au temps sera

$$\begin{aligned} &\frac{dP_{1i}}{dt}J_1 + \frac{dP_{2i}}{dt}J_2 + \ldots + \frac{dp_i}{dt}J_i + \ldots + \frac{dP_{ni}}{dt}J_n \\ &+ P_{1i}\frac{dJ_1}{dt} + P_{2i}\frac{dJ_2}{dt} + \ldots + p_i\frac{dJ_i}{dt} + \ldots + P_{ni}\frac{dJ_n}{dt}. \end{aligned}$$

On devra donc, d'après la loi de Neumann énoncée tout à l'heure, avoir dans nos différents circuits les égalités suivantes :

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dp_1}{dt} - R_1\right)J_1 + \frac{dP_{12}}{dt}J_2 + \ldots + \frac{dP_{1n}}{dt}J_n \\ &\quad + p_1\frac{dJ_1}{dt} + P_{12}\frac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{1n}\frac{dJ_n}{dt} + H_1 = 0, \\ &\frac{dP_{21}}{dt}J_1 + \left(\frac{dp_2}{dt} - R_2\right)J_2 + \ldots + \frac{dP_{2n}}{dt}J_n \\ &\quad + P_{21}\frac{dJ_1}{dt} + p_2\frac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{2n}\frac{dJ_n}{dt} + H_2 = 0, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{dP_{n1}}{dt}J_1 + \frac{dP_{n2}}{dt}J_2 + \ldots + \left(\frac{dp_n}{dt} - R_n\right)J_n \\ &\quad + P_{n1}\frac{dJ_1}{dt} + P_{n2}\frac{dJ_2}{dt} + \ldots + p_n\frac{dJ_n}{dt} + H_n = 0. \end{aligned} \right.$$

Si les conducteurs considérés sont animés de mouvements connus, les quantités p et P seront des fonctions déterminées de t; si, en outre, les résistances et les forces électromotrices étrangères à l'induction sont des fonctions déterminées de t, le système (12) représentera un système de n équations différentielles linéaires qui déterminera, en fonction de t, les n intensités J_1, J_2, ..., J_n.

Les quantités p_i et P_{ij} portent le nom de *coefficients d'induction*.

La quantité P_{ij}, évidemment égale à P_{ji}, porte le nom de *coefficient d'induction mutuelle* des deux circuits i et j.

La quantité p_i porte le nom de *coefficient d'induction propre* [1] du circuit i.

Si l'on fait sur les quantités $f(r)$ et $g(r)$ les hypothèses faites au Chapitre III, on pourra, ainsi qu'on l'a vu au Chapitre IV, écrire indifféremment

$$(13)\quad \begin{cases} p_i = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\displaystyle\int_i\int_i \dfrac{\cos\theta_i\cos\theta'_i}{r}\,ds_i\,ds'_i, \\[2ex] \mathrm{P}_{ij} = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\displaystyle\int_i\int_j \dfrac{\cos\theta_i\cos\theta_j}{r}\,ds_i\,ds_j, \end{cases}$$

ou bien

$$(14)\quad \begin{cases} p_i = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\displaystyle\int_i\int_i \dfrac{\cos\omega}{r}\,ds_i\,ds'_i, \\[2ex] \mathrm{P}_{ij} = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\displaystyle\int_i\int_j \dfrac{\cos\omega}{r}\,ds_i\,ds_j. \end{cases}$$

§ 2. - Induction par variation d'intensité dans les circuits pourvus de dérivation.

Supposons, en particulier, que nos n circuits soient immobiles, indéformables et traversés par des courants variables. Les équations (12) se réduisent à

$$(15)\quad \begin{cases} p_1\dfrac{d\mathrm{J}_1}{dt} + \mathrm{P}_{12}\dfrac{d\mathrm{J}_2}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_{1n}\dfrac{d\mathrm{J}_n}{dt} - \mathrm{R}_1\mathrm{J}_1 + \mathrm{H}_1 = 0, \\[1ex] \mathrm{P}_{21}\dfrac{d\mathrm{J}_1}{dt} + p_2\dfrac{d\mathrm{J}_2}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_{2n}\dfrac{d\mathrm{J}_n}{dt} - \mathrm{R}_2\mathrm{J}_2 + \mathrm{H}_2 = 0, \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[1ex] \mathrm{P}_{n1}\dfrac{d\mathrm{J}_1}{dt} + \mathrm{P}_{n2}\dfrac{d\mathrm{J}_2}{dt} + \ldots + p_n\dfrac{d\mathrm{J}_n}{dt} - \mathrm{R}_n\mathrm{J}_n + \mathrm{H}_n = 0. \end{cases}$$

Si les résistances $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_n$, ainsi que les forces électromotrices $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_n$, sont constantes, on a affaire à un système de n équations différentielles linéaires à coefficients constants, à seconds membres constants, dont nous avons déjà étudié, au Chapitre précédent, les principales propriétés.

---

[1] On emploie, en général, aujourd'hui, le nom de *coefficient de self-induction* pour désigner la quantité p_i. Pourquoi ce nom anglais, puisque l'invention des formules (12) a été faite presque simultanément par deux Allemands, M. F.-E. Neumann et W. Weber?

Nous avons, dans cette étude, supposé que les divers circuits étaient des circuits fermés ne présentant aucune dérivation ; mais on peut entreprendre une étude analogue pour les circuits fermés présentant un nombre quelconque de dérivations ; ce cas a été étudié d'une manière très complète par M. H. von Helmholtz (1) et, plus récemment, par M. Marcel Brillouin (2).

Considérons un circuit inducteur formé de fils en nombre quelconque, reliés entre eux d'une manière quelconque, et dont chacun est parcouru par un courant uniforme. Soit $A'B'$ un de ces fils et soit J' le courant qui le parcourt de A' en B'. Ce système se déplace et se déforme d'une manière quelconque en présence d'un élément ds. Si ds' représente un élément de $A'B'$, cet élément engendre dans l'élément ds une force électromotrice $e\,ds\,ds'$, et l'on a

$$e\,ds\,ds' = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)J'\,ds\,ds'\right].$$

Le fil $A'B'$ engendre dans l'élément ds une force électromotrice d'induction égale à

$$\mathcal{E}\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left[J'\,ds\int_{A'}^{B'}\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)ds'\right].$$

L'égalité connue [Introduction, Chap. I, égalité (6)]

$$\cos\theta\cos\theta' = \cos\omega + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$$

permet de transformer l'expression de $\mathcal{E}\,ds$.

Soient α, β les angles de la direction ds avec les droites qui vont de l'élément ds aux points A, B. Nous aurons

$$\mathcal{E}\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left[J'\,ds\left(\int_{A'}^{B'}\frac{\cos\omega}{r}\,ds' + \cos\alpha - \cos\beta\right)\right].$$

La force électromotrice engendrée en un point de l'élément ds

(1) H. von Helmholtz, *Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromsschwankungen inducirten elektrischen Ströme* (*Pogg. Ann.*, Bd. LXXXIII, p. 505 ; 1851. — Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 429).

(2) M. Brillouin, *Intégration des équations différentielles auxquelles conduit l'étude des phénomènes d'induction dans les circuits dérivés* (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. X, p. 9 ; 1881).

par tout le circuit inducteur aura pour valeur, comme on le voit aisément,

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left[ds\left(\sum J'\int_{A'}^{B'}\frac{\cos\omega}{r}\,ds' + \cos\alpha\sum J' + \cos\beta\sum J' + \ldots\right)\right].$$

Dans cette formule, le signe $\sum$, qui figure dans

$$\sum J'\int_{A'}^{B}\frac{\cos\omega}{r}\,ds',$$

représente une sommation qui s'étend à tous les segments de fils tels que A′B′ qui composent l'inducteur.

Dans

$$\cos\alpha\sum J',$$

la quantité $\sum J'$ est la somme des intensités des courants qui passent au sommet A′, ces intensités étant prises avec le signe + lorsqu'elles correspondent à une dérivation issue du point A′, et avec le signe — lorsqu'elles correspondent à une dérivation aboutissant au point A′.

Dans

$$\cos\beta\sum J',$$

la quantité $\sum J'$ a une signification analogue, etc.

Mais, d'après le lemme bien connu de G. Kirchhoff, toutes ces quantités $\sum J'$ sont égales à o. La force électromotrice précédente se réduit donc à

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left(ds\sum J'\int_{A'}^{B'}\frac{\cos\omega}{r}\,ds'\right).$$

Soit 1 un segment de fil; posons

$$p_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int_1\int_1\frac{\cos\omega}{r}\,ds\,ds'_1.$$

Soit 2 un autre segment de fil; posons

$$P_{12} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int_1\int_2\frac{\cos\omega}{r}\,ds_1\,ds_2.$$

Supposons que ces deux segments fassent partie d'un système formé d'un nombre quelconque n de fils reliés d'une manière quelconque et traversés par des courants uniformes d'intensités J_1, $J_2, \ldots, J_n$. La force électromotrice d'induction agissant dans le fil 1 sera

$$p_1 \frac{dJ_1}{dt} + P_{12} \frac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{1n} \frac{dJ_n}{dt}$$
$$+ J_1 \frac{dp_1}{dt} + J_2 \frac{dP_{12}}{dt} + \ldots + J_n \frac{dP_{1n}}{dt}.$$

Si V_1 est la valeur de la fonction potentielle à l'origine de ce segment et V'_1 sa valeur à l'extrémité; si H_1 est la force électromotrice thermo-électrique ou hydro-électrique que renferme le segment, la force électromotrice totale qui agit dans le segment 1 s'obtiendra en ajoutant à la quantité précédente la quantité

$$\varepsilon(V_1 - V'_1) + H_1.$$

Désignons par $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les résistances des n fils qui forment le système et nous trouverons les équations suivantes, pour déterminer les variations des courants uniformes dans ce système

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 \dfrac{dJ_1}{dt} + P_{12} \dfrac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{1n} \dfrac{dJ_n}{dt} \\ \quad + J_1 \dfrac{dp_1}{dt} + J_2 \dfrac{dP_{12}}{dt} + \ldots + J_n \dfrac{dP_{1n}}{dt} - R_1 J_1 = \varepsilon(V'_1 - V_1) - H_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{n1} \dfrac{dJ_1}{dt} + P_{n2} \dfrac{dJ_2}{dt} + \ldots + p_n \dfrac{dJ_n}{dt} \\ \quad + J_1 \dfrac{dP_{n1}}{dt} + J_2 \dfrac{dP_{n2}}{dt} + \ldots + J_n \dfrac{dp_n}{dt} - R_n J_n = \varepsilon(V'_n - V_n) - H_n. \end{array} \right.$$

Ces équations sont au nombre de n; or, si k est le nombre des sommets, les fonctions inconnues sont les n fonctions $J_1, J_2, \ldots, J_n$ et les k valeurs de V aux sommets. Pour les déterminer il faudra joindre aux équations précédentes k équations de la forme

$$(17)\qquad \sum J' = 0,$$

obtenues en appliquant le lemme de G. Kirchhoff à chacun des sommets.

Supposons en particulier le système immobile ; les équations (16) deviendront

$$(18)\quad \begin{cases} p_1\dfrac{dJ_1}{dt} + P_{12}\dfrac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{1n}\dfrac{dJ_n}{dt} - R_1 J_1 = \varepsilon(V'_1 - V_1) + H_1, \\ P_{21}\dfrac{dJ_1}{dt} + p_2\dfrac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{2n}\dfrac{dJ_n}{dt} - R_2 J_2 = \varepsilon(V'_2 - V_2) + H_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{n1}\dfrac{dJ_1}{dt} + P_{n2}\dfrac{dJ_2}{dt} + \ldots + p_n\dfrac{dJ_n}{dt} - R_n J_n = \varepsilon(V'_n - V_n) + H_n. \end{cases}$$

L'intégrale générale de ces équations s'obtiendra de la manière suivante :

Soient $j_1, j_2, \ldots, j_n$ les intensités des courants qui traverseraient les fils $1, 2, \ldots, n$, si les forces électromotrices H_1, $H_2, \ldots, H_n$, que nous supposons constantes, agissaient en dehors de tout phénomène d'induction ;

$$J_1 = j_1, \qquad J_2 = j_2, \qquad \ldots, \qquad J_n = j_n$$

est une intégrale particulière du système des équations précédentes. L'intégrale générale sera donc

$$(19)\quad \begin{cases} J_1 = j_1 + \sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i e^{\alpha_i t}, \\ J_2 = j_2 + \sum\limits_{i=1}^{i=n} B_i e^{\alpha_i t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ J_n = j_n + \sum\limits_{i=1}^{i=n} L_i e^{\alpha_i t}, \end{cases}$$

les n^2 constantes $A_i, B_i, \ldots, L_i$, dépendant des conditions initiales, tandis que les n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} p_1 - R_1\alpha & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & p_2 - R_2\alpha & \ldots & P_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & p_n - R_n\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

La marche suivie au Chapitre IV permet de démontrer que toutes les racines de cette équation sont réelles et négatives. Donc, d'après

les équations (19), l'état stationnaire, stable sur un système sans dérivation, l'est aussi sur un système présentant des dérivations quelconques.

Les équations (16) montrent que, pour un système à dérivations comme pour un système sans dérivation, lorsque tous les courants sont uniformes, la constante d'Helmholtz disparaît des lois de l'induction.



CHAPITRE VI.

L'INDUCTION PAR SEUL MOUVEMENT DES CONDUCTEURS.

Supposons qu'un système soit formé de n circuits fermés, variables de forme et de position, mais traversés par des courants constants. Les équations (12) du Chapitre précédent deviendront alors

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{dp_1}{dt} - R_1\right) J_1 + \frac{dP_{12}}{dt} J_2 + \ldots + \frac{dP_{1n}}{dt} J_n + H_1 = 0, \\ \frac{dP_{21}}{dt} J_1 + \left(\frac{dp_2}{dt} - R_2\right) J_2 + \ldots + \frac{dP_{2n}}{dt} J_n + H_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dP_{n1}}{dt} J_1 + \frac{dP_{n2}}{dt} J_2 + \ldots + \left(\frac{dp_n}{dt} - R_n\right) J_n + H_n = 0. \end{array}\right.$$

Les intensités $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sont alors déterminées en fonction du temps par n équations algébriques linéaires.

Ces équations ont été découvertes dès 1845, par F.-E. Neumann [1]; elles lui ont ensuite servi, en 1847 [2], à établir la loi générale de l'induction. Elles n'ont guère d'ailleurs que cet intérêt historique. Il est rare que l'on ait à faire usage de ces équations simplifiées.

Envisageons un des circuits d'un système quelconque de n courants fermés et uniformes, le circuit 1, par exemple; la force

---

[1] F.-E. Neumann, *Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1845).

[2] F.-E. Neumann, *Ueber ein Allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischen Ströme*, lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 9 août 1847.

électromotrice d'induction qui s'y développe a pour valeur

$$E_1 = p_1 \frac{dJ_1}{dt} + P_{12} \frac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{1n} \frac{dJ_n}{dt}$$
$$+ \frac{dp_1}{dt} J_1 + \frac{dP_{12}}{dt} J_2 + \ldots + \frac{dP_{1n}}{dt} J_n.$$

Elle est la somme de deux autres forces électromotrices : l'une

$$E'_1 = p_1 \frac{dJ_1}{dt} + P_{12} \frac{dJ_2}{dt} + \ldots + P_{1n} \frac{dJ_n}{dt},$$

est la force électromotrice qui serait induite à l'instant t dans le circuit 1 si les intensités subissaient pendant le temps dt les variations qu'elles doivent subir, tandis que tous les circuits demeureraient invariables de forme et de position.

L'autre

$$E''_1 = \frac{dp_1}{dt} J_1 + \frac{dP_{12}}{dt} J_2 + \ldots + \frac{dP_{1n}}{dt} J_n$$

est la force électromotrice qui serait induite à l'instant t dans le circuit 1 si les intensités demeuraient invariables pendant le temps dt, tandis que les circuits resteraient animés du mouvement qui les anime en réalité.

On peut se proposer d'étudier séparément les propriétés de ces deux sortes de forces. Dans le présent Chapitre, nous allons nous proposer d'étudier les forces électromotrices de la seconde espèce.

La force E''_1 est la somme d'un certain nombre de termes.

L'un, le terme $\frac{dp_1}{dt} J_1$, représente la force électromotrice engendrée dans le circuit 1 par l'effet de la déformation de ce circuit. Il disparaît, dans le cas très fréquemment réalisé dans la pratique, et que nous supposerons réalisé dans la démonstration suivante, où *le circuit* 1 *est indéformable.*

Les autres termes sont tous de même forme que la quantité $\frac{dP_{12}}{dt} J_2$ qui représente, dans l'hypothèse où le circuit 1 est indéformable, la force électromotrice engendrée dans ce circuit 1 par la déformation du circuit 2 et le déplacement relatif des deux circuits 1 et 2. On peut toujours, puisque ce déplacement relatif intervient seul, supposer, pour la commodité du langage, que *le circuit* 1 *est immobile.*

Soient v, v', ... les vitesses, à l'instant t, des divers points du circuit 2. Imaginons un autre déplacement de ce circuit dans lequel les vitesses des mêmes points aient pour valeurs kv, kv', ... Le coefficient d'induction mutuelle P_{12} des deux circuits 1 et 2 éprouvera alors dans le temps $\frac{dt}{k}$ la variation dP_{12} qu'il éprouvait précédemment dans le temps dt, en sorte que la quantité

$$E''_{12} = \frac{dP_{12}}{dt} J_2$$

sera multipliée par k. D'où le théorème suivant :

Lorsqu'un circuit 2, traversé par un courant d'intensité invariable, se déplace et se déforme en présence d'un circuit immobile 1, il y induit une force électromotrice proportionnelle à la vitesse avec laquelle il se déplace et se déforme.

Cette proposition est souvent désignée par le nom de *loi de F.-E. Neumann*. C'est, en réalité, à titre d'hypothèse fondamentale qu'elle se trouve dans la théorie de F.-E. Neumann.

Voici un nouveau théorème qui s'applique au cas où les deux circuits 1 et 2 se déplacent en présence l'un de l'autre, et se déforment d'une manière quelconque, le circuit 2 étant traversé par un courant d'intensité constante; si cette intensité est variable, ce théorème devra être restreint à la partie de la force électromotrice induite par le circuit 2 dans le circuit 1 qui est due au seul mouvement des conducteurs.

Nous avons vu que l'on pouvait écrire (Chap. V, égalité 14)

$$P_{12} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\cos\omega}{r} ds_1 \, ds_2.$$

Supposons que, par les deux courbes C_1, C_2 (*fig.* 27), on puisse faire passer deux aires à un seul côté A_1, A_2 telles que la courbe C_1 ne rencontre pas l'aire A_2, ni la courbe C_2 l'aire A_1; si $d\Omega_1$, $d\Omega_2$ sont les éléments de ces deux aires, et N_1, N_2 les normales à leurs faces positives, on aura, d'après le théorème d'Ampère [Introduction, Chap. II, égalité (6)],

$$\int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\cos\omega}{r} ds_1 \, ds_2 = - \mathrm{S}_{A_1} \mathrm{S}_{A_2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial N_1 \, \partial N_2} d\Omega_1 \, d\Omega_2.$$

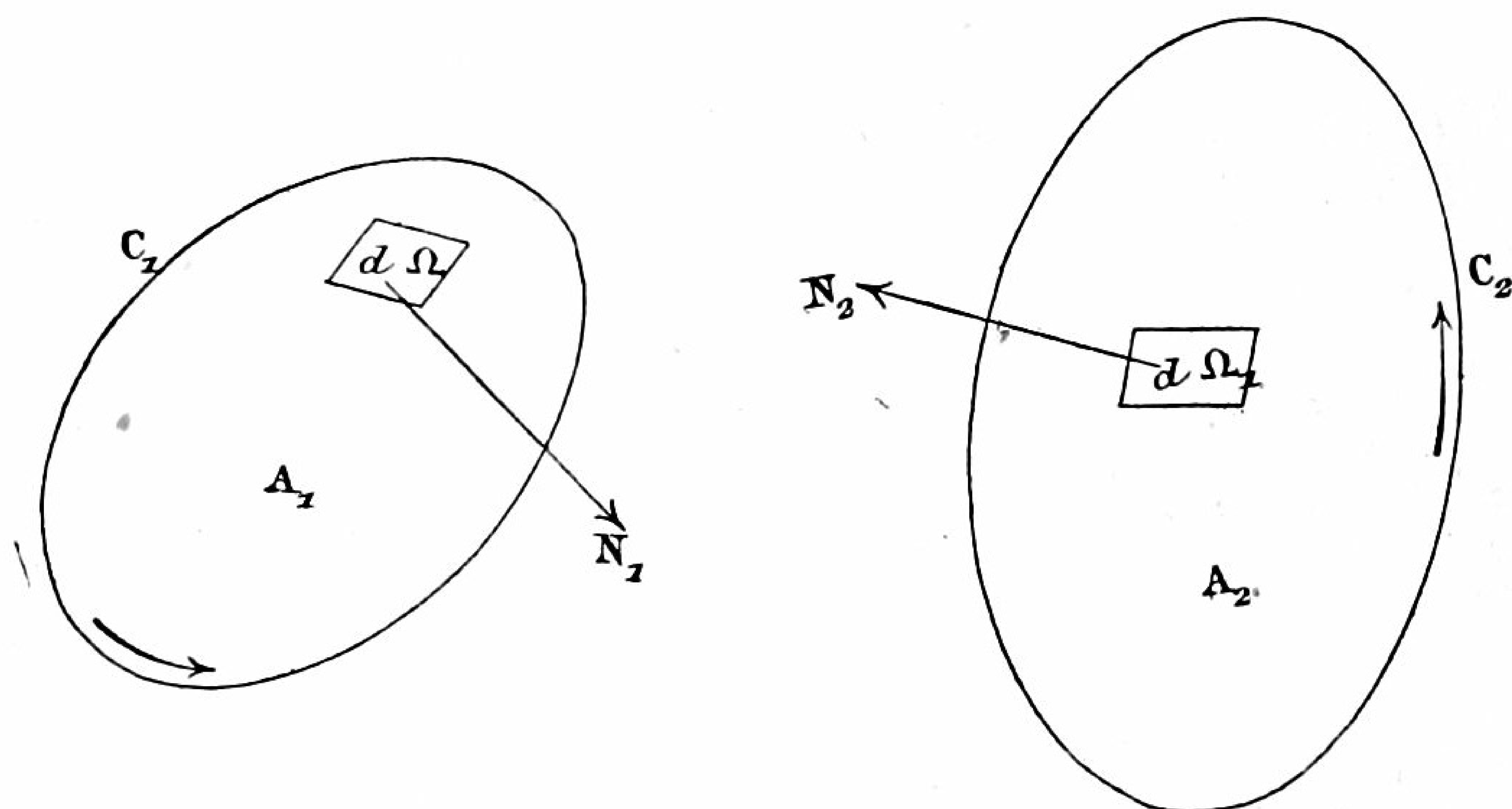
Ainsi, au lieu de l'égalité

$$E''_{12} = \frac{dP_{12}}{dt} J_2,$$

on pourra écrire

$$E''_{12} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J_2 \frac{d}{dt} \mathbf{S}_{A_1} \mathbf{S}_{A_2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial N_1 \, \partial N_2} d\Omega_1 \, d\Omega_2.$$

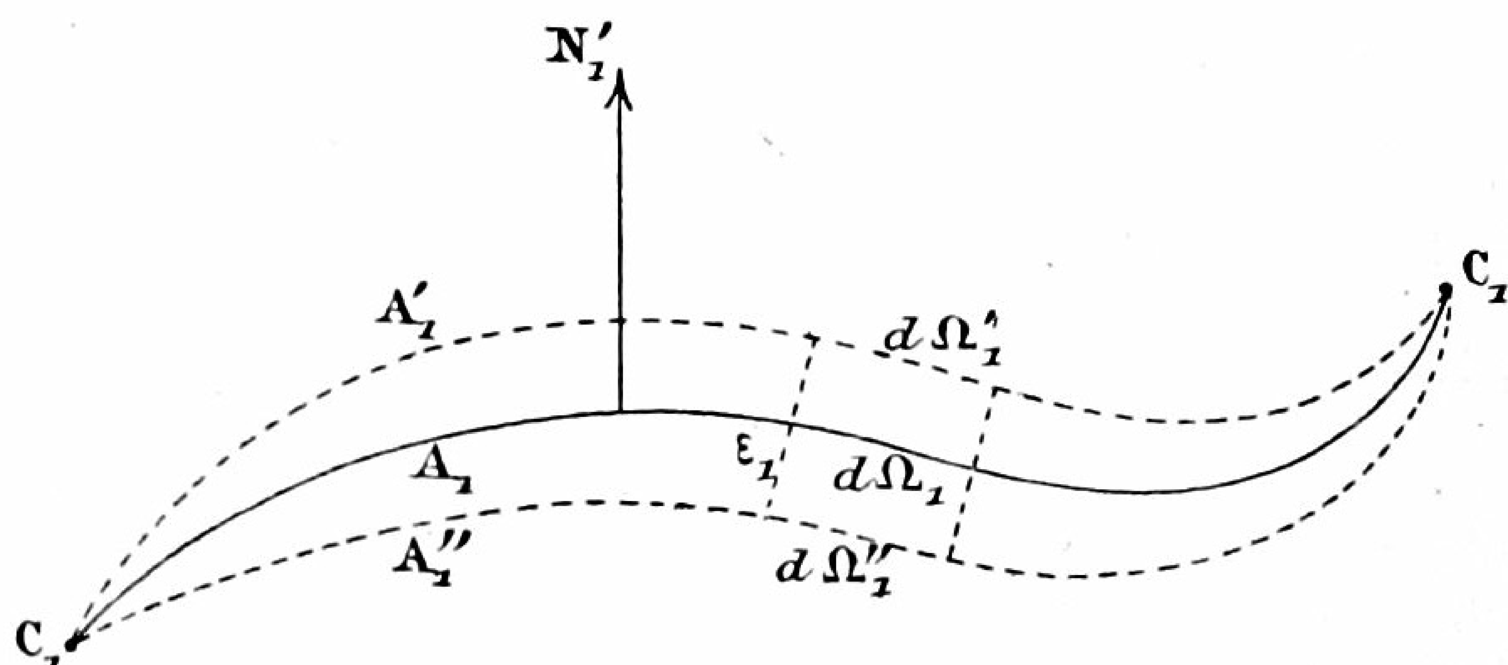
Fig. 27.



Nous allons interpréter cette expression.

Imaginons que de part et d'autre de la surface A_1 (*fig.* 28) on dispose deux surfaces A'_1, A''_1, distantes l'une de l'autre d'une

Fig. 28.



quantité très petite, variable d'un point à l'autre, ε_1. L'élément $d\Omega_1$ de la surface A_1 est la projection sur cette surface de deux éléments $d\Omega'_1$, $d\Omega''_1$ des surfaces A'_1, A''_1. Soit $d\Omega'_1$ l'élément qui se trouve du côté positif de A_1. Sur cet élément, plaçons une quantité q de fluide magnétique positif, et sur l'élément $d\Omega''_1$ une quantité q de fluide magnétique négatif, de telle façon que

$$q = \frac{1}{\varepsilon_1} d\Omega_1.$$

Nous aurons ainsi constitué un *feuillet magnétique* F_1 dont

l'aimantation aura en chaque point pour direction de la normale N_1, et pour intensité $\frac{1}{\varepsilon_1}$.

Les composantes de cette aimantation seront

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}\cos(N_1, x), \qquad \mathcal{B}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}\cos(N_1, y), \qquad \mathcal{C}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}\cos(N_1, z).$$

La fonction potentielle de l'aimantation ainsi constituée est donnée par la formule générale

$$\mathcal{V}_1 = \iiint\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

l'intégration s'étendant au volume entier de l'aimant. Or, l'élément de volume de notre aimant ayant pour valeur

$$\varepsilon_1\,d\Omega_1,$$

on voit sans peine que l'on peut écrire

$$\mathcal{V}_1 = \mathbf{S}_{A_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_1}d\Omega_1.$$

De là, nous déduisons

$$\mathbf{S}_{A_1}\mathbf{S}_{A_2}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial N_1\,\partial N_2}d\Omega_1\,d\Omega_2 = \mathbf{S}_{A_2}\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial N_2}d\Omega_2$$
$$= \mathbf{S}_{A_2}\left[\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial N_2}\cos(N_2, x) + \frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_2}\cos(N_2, y) + \frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_2}\cos(N_2, z)\right]d\Omega_2.$$

Sur la surface A_2 constituons un feuillet magnétique F_2 exactement comme sur la surface A_1 nous avons constitué le feuillet magnétique F_1. En chaque point du feuillet F_2, l'intensité d'aimantation aura pour composantes

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{\varepsilon_2}\cos(N_2, x), \qquad \mathcal{B}_2 = \frac{1}{\varepsilon_2}\cos(N_2, y), \qquad \mathcal{C}_2 = \frac{1}{\varepsilon_2}\cos(N_2, z).$$

D'ailleurs l'élément de volume du feuillet F_2 peut être pris égal à $\varepsilon_2\,d\Omega_2$. On voit alors que l'on peut écrire la quantité précédente

$$\iiint\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right)dx_2\,dy_2\,dz_2,$$

ce qui nous fait reconnaître le *potentiel magnétique* Y_{12} des actions mutuelles des deux feuillets F_1, F_2. On a donc

$$\int_{C_1}\int_{C_2} \frac{\cos\omega}{r}\, ds_1\, ds_2 = -Y_{12} \tag{3}$$

et

$$E''_{12} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J_2 \frac{dY_{12}}{dt}. \tag{4}$$

Si, au lieu de distribuer sur la face positive du feuillet F_1 le fluide magnétique avec la densité $\frac{1}{\varepsilon_1}$, nous l'avions distribué avec la densité

$$\rho_1 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\varepsilon_1};$$

si au lieu de distribuer sur la face positive du feuillet F_2 le fluide magnétique avec la densité $\frac{1}{\varepsilon_2}$, nous l'avions distribué avec la densité

$$\rho_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{J_2}{\varepsilon_2},$$

nous aurions obtenu deux nouveaux feuillets, F'_1, F'_2, dont le potentiel eût été lié à celui des feuillets F_1, F_2 par la relation

$$Y'_{12} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J_2 Y_{12},$$

et l'égalité (4) serait devenue

$$E''_{12} = \frac{dY'_{12}}{dt}. \tag{5}$$

Or les actions mutuelles des deux feuillets F'_1, F'_2 effectuent, dans le temps dt, un travail $d\mathfrak{T}$, et l'on a

$$d\mathfrak{T} = -\frac{dY'_{12}}{dt} dt,$$

en sorte que l'égalité précédente peut s'écrire

$$E''_{12} = -\frac{d\mathfrak{T}}{dt}.$$

Ainsi, *lorsque deux circuits*, 1 *et* 2, *dont l'un, le circuit* 2, *est traversé par un courant d'intensité constante* J_2, *se déforment et se déplacent d'une manière quelconque, le circuit* 2

engendre dans le circuit 1 une force électromotrice d'induction que l'on peut calculer de la manière suivante :

Par le circuit 1, on fait passer un feuillet magnétique, d'épaisseur ε_1, *dont la face positive porte une distribution superficielle de densité* $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\varepsilon_1}$. *Par le circuit 2, on fait passer un feuillet magnétique, d'épaisseur* ε_2, *dont la face positive porte une distribution superficielle de densité* $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{J_2}{\varepsilon_2}$. *On calcule le travail produit par les actions mutuelles de ces deux feuillets dans un temps infiniment petit ; on divise par ce temps infiniment petit, et on change le signe du quotient.*

On observera que ce théorème suppose, à titre de restriction, que le conducteur 1 n'a aucun point commun avec le feuillet F_2, ni le conducteur 2 avec le feuillet F_1.

Voici un troisième théorème capital dans la théorie de l'induction :

Imaginons que ds_1 soit un élément d'un circuit 1, mobile devant un conducteur 2, fermé, immobile, parcouru par un courant d'intensité constante J_2. La force électromotrice engendrée dans l'élément ds_1 par ce conducteur 2 a pour valeur

$$e\,ds_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} J_2 \frac{d}{dt}\left(ds_1 \int_{C_2} \frac{\cos\omega}{r}\,ds_2\right).$$

Soit A_1B_1 (*fig.* 29) l'élément ds_1, qui, au bout du temps dt, est venu en $A'_1B'_1$. Il est facile de voir que nous aurons, en désignant par γ le contour infiniment petit $A_1B_1B'_1A'_1A_1$, et par $d\sigma$ un élément de ce contour

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(ds_1 \int_{C_2} \frac{\cos\omega}{r}\,ds_2\right) dt = &\int_\gamma \int_{C_2} \frac{\cos\omega}{r}\,ds_2\,d\sigma \\
&- B_1B'_1 \int_{C_2} \frac{1}{r}\cos(B_1B'_1, ds_2)\,ds_2 \\
&+ A_1A'_1 \int_{C_2} \frac{1}{r}\cos(A_1A'_1, ds_2)\,ds_2.
\end{aligned}$$

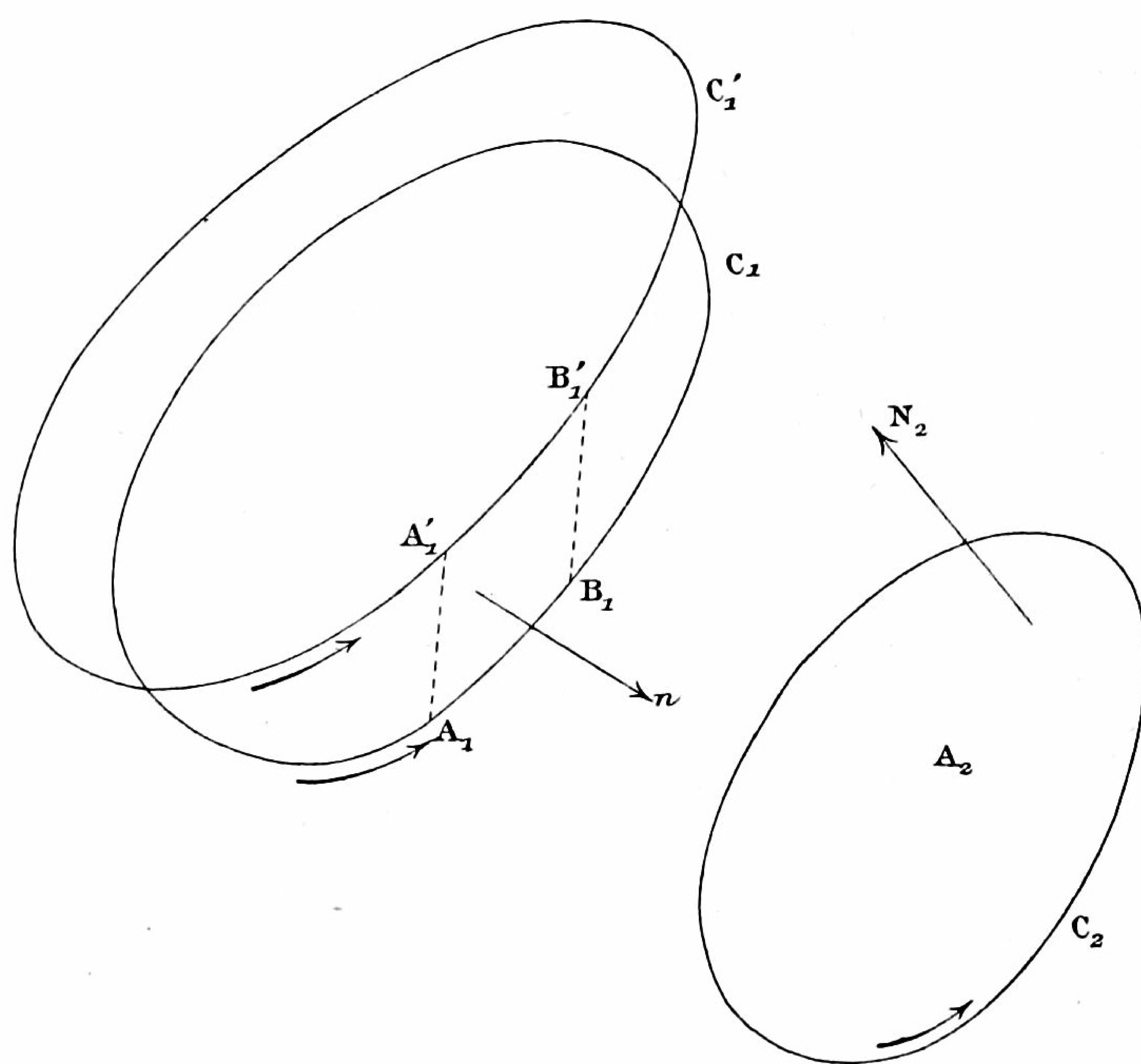
Supposons maintenant que nous écrivions toutes les égalités analogues auxquelles donnent lieu les éléments ds_1 d'un circuit fermé 1, et que nous les ajoutions membre à membre ; il est fa-

cile de voir que tous les termes en $A_1 A'_1$, $B_1 B'_1$ ... disparaîtront, et qu'il nous restera finalement

$$E_{12}\, dt = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J_2 \sum \int_\gamma \int_{C_2} \frac{\cos\omega}{r}\, ds_2\, d\sigma. \tag{6}$$

C'est cette expression que nous allons chercher à interpréter.

Fig. 29.



Par le courant C_2, faisons passer un feuillet F_2, d'épaisseur ε_2; soit

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{J_2}{\varepsilon_2}$$

la densité du fluide magnétique sur la face positive de ce feuillet.

Soit $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle magnétique de ce feuillet; soit $d\Sigma$ l'aire du petit circuit γ; soit n la normale à sa face positive. Nous aurons

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J_2 \int_\gamma \int_{C_2} \frac{\cos\omega}{r}\, ds_2\, d\sigma = -\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n}\, d\Sigma$$

et, par conséquent,

$$E_{12}\, dt = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathbf{S} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n}\, d\Sigma. \tag{7}$$

La fonction potentielle $\mathcal{V}_2$, étant égale à

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J_2 \mathbf{S}_{F_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Omega_1,$$

est, comme nous l'avons vu au Chapitre III de l'Introduction, une quantité définie, au moins à un multiple près de 4π, par la connaissance du courant 2, sans qu'il soit nécessaire de préciser quel est le feuillet F_2. La seule connaissance du courant 2 suffit donc à déterminer la famille des surfaces

$$\mathcal{V}_2 = \text{const.}$$

qui sont les surfaces de niveau magnétiques pour tout feuillet magnétique tel que F_2 passant par le courant 2, et que nous nommerons les *surfaces de niveau du courant* 2; et aussi les trajectoires orthogonales à ces surfaces, que nous nommerons, selon une expression créée par Faraday, les *lignes de force du courant* 2.

La quantité

$$-\mathbf{S} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N} d\Omega,$$

étendue à une surface S à deux côtés quelconques S se nomme le *flux de force, émané du feuillet* F_2, *qui entre par la face négative de la surface* S.

Pour deux surfaces terminées au même contour, et telles que l'on puisse déformer l'une d'une manière continue jusqu'à venir l'appliquer sur l'autre sans qu'elle rencontre jamais le feuillet F_1, cette quantité a la même valeur.

En effet, pour démontrer cette proposition, on peut toujours supposer que les deux surfaces S_1, S_2 que l'on considère n'aient aucun point commun; car, s'il en était autrement, on prendrait une troisième surface S_3 terminée au même contour et n'ayant avec les précédentes aucun point commun, et l'on démontrerait que le flux de force a la même valeur pour chacune des deux surfaces S_1, S_2, et pour la surface S_3.

Les surfaces S_1, S_2 terminées au même contour, n'ayant aucun point commun, forment, par leur ensemble, une surface fermée. Si la face positive de la surface S_1 est intérieure à cette surface

fermée, la face positive de la surface S_2 lui sera extérieure, en sorte que l'on aura

$$\mathrm{S}_{S_1} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_1} d\Omega_1 - \mathrm{S}_{S_2} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_2} d\Omega_2 = \mathrm{S} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_i} d\Omega,$$

la dernière intégration s'étendant à la surface fermée tout entière.

Or on a

$$\mathrm{S} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_i} d\Omega = -\iiint \Delta \mathcal{V}_2 \, dx \, dy \, dz,$$

quantité qui est égale à o, car, d'après les hypothèses faites, la surface fermée en question ne renferme aucune portion du feuillet agissant.

On a donc, comme nous l'avions annoncé,

$$\mathrm{S}_{S_1} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_1} d\Omega_1 = \mathrm{S}_{S_2} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_2} d\Omega_2.$$

On dit souvent que la quantité

$$-\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N} d\Omega$$

est proportionnelle au *nombre de lignes de forces qui entrent dans l'élément de surface* $d\Omega$ *par sa face négative.* Cette expression peut se justifier de la manière suivante :

Imaginons une surface $\mathcal{V}_2 = \text{const.}$ Sur cette surface σ (*fig.* 30) marquons une infinité de points, de telle façon que tout élément $d\Sigma$ de cette surface renferme un nombre ν de points, proportionnel au produit $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n} d\Sigma$; nous aurons

$$\nu = -k \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n} d\Sigma,$$

n étant la direction de la normale à la surface σ dans le sens où $\mathcal{V}$ est *décroissant* et k une constante positive infiniment grande.

Par ces points, traçons des lignes de force, dont la direction est toujours supposée celle où $\mathcal{V}$ va en décroissant.

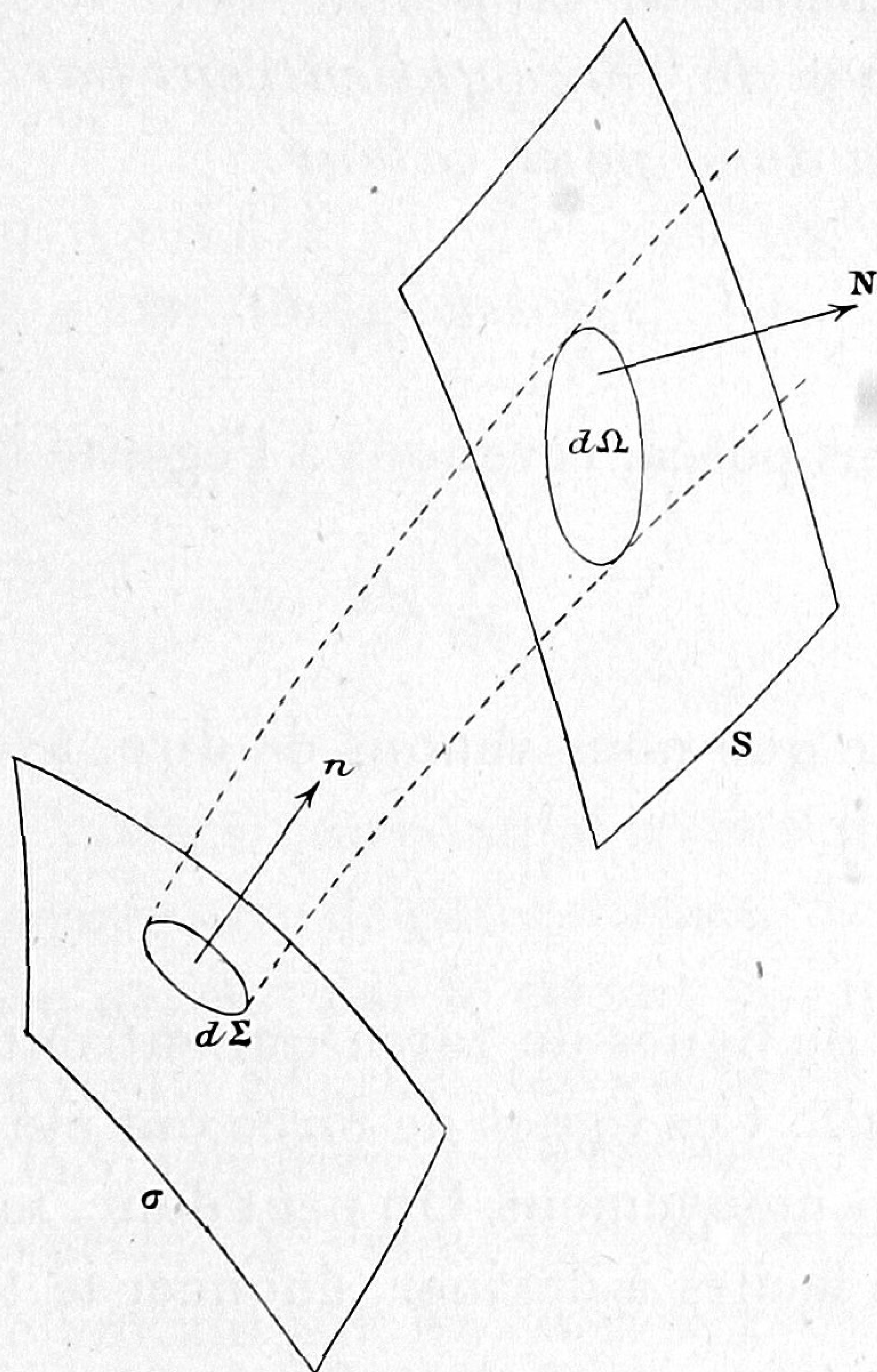
Sur une autre surface quelconque S, ces trajectoires marquent des points; ces points sont distribués sur la surface S de telle manière que tout élément $d\Omega$ de cette surface renferme un

nombre ν de ces points; je dis que ce nombre ν est encore égal en valeur absolue à

$$k \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N} d\Omega,$$

N étant la direction de la normale à la face de $d\Omega$ qui a été choisie comme positive.

Fig. 30.



En effet, l'élément $d\Omega$ est, au sens donné à ce mot en Électrostatique (T. I, p. 302), l'*élément correspondant* d'un certain élément $d\Sigma$ de la surface de niveau fondamentale. Les deux éléments $d\Omega$ et $d\Sigma$ sont évidemment traversés par le même nombre ν de lignes de forces. On a donc, pour valeur du nombre ν,

$$\nu = -k \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n} d\Sigma.$$

Mais la propriété fondamentale des éléments correspondants nous donne cette égalité, *qui a lieu en valeur absolue*,

$$\left| \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n} d\Sigma \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N} d\Omega \right|.$$

On a donc

$$\nu = \left| k \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N} d\Omega \right|,$$

comme nous l'avions annoncé.

Le nombre ν est essentiellement positif; il en est de même de k et de $d\Omega$; $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N}$ est négatif si les lignes de force entrent par la face négative de l'élément $d\Omega$, et positif dans le cas contraire. *Le nombre ν de lignes de force qui entrent par la face négative de l'élément $d\Omega$ a donc pour valeur*

$$\nu = -k \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N} d\Omega.$$

Ces préliminaires posés, revenons à l'égalité (7).

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N} d\Sigma$$

est égal, d'après ce que nous venons de dire, à

$$-\frac{\nu}{k},$$

ν étant le nombre de lignes de force qui entrent par la face négative de l'élément $d\Sigma$. Ces lignes de force ont été coupées par l'élément ds_1 dans son mouvement. On peut donc, moyennant des conventions de signe faciles à deviner, énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'un conducteur fermé 1 se déforme et se déplace devant un conducteur 2 immobile et rigide, traversé par un courant fermé, uniforme et constant, il y naît une force électromotrice d'induction proportionnelle au nombre de lignes de force du courant 2 que, dans son mouvement, le circuit 1 coupe par unité de temps.

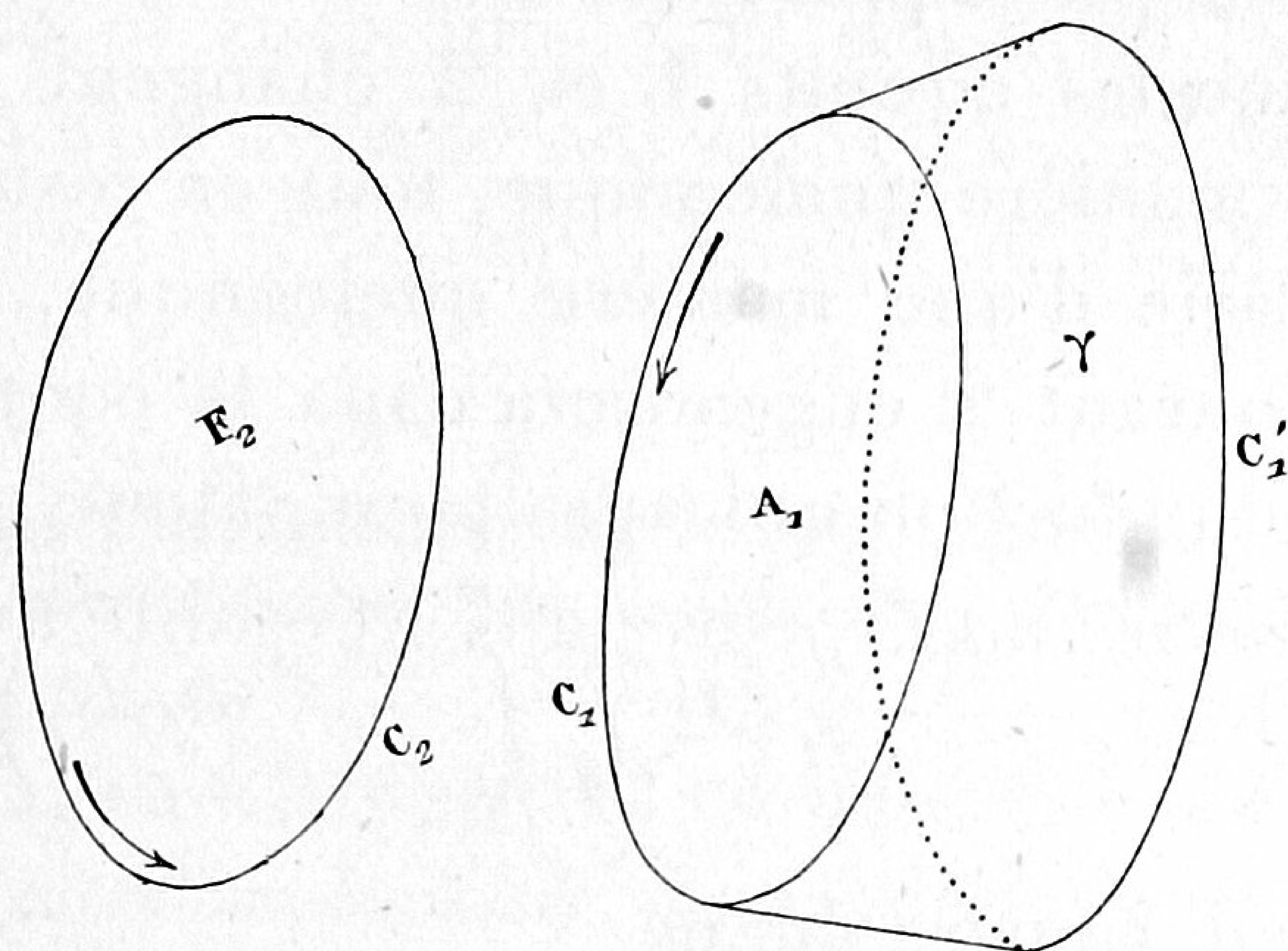
Cette loi a été énoncée, dès 1832, par Faraday [1] qui, du reste, ne connaissait pas le sens mathématique précis de l'expression *ligne de force*.

Supposons que l'on puisse choisir le feuillet F_2 (*fig.* 31) de manière qu'il ne soit pas rencontré par le circuit C_1. Par ce cir-

[1] FARADAY, *Experimental researches in Electricity*. Série II, §§ 231 et seqq.

cuit, on pourra faire passer une surface A_1 ne rencontrant pas le feuillet F_2. Lorsque le conducteur C_1 se déplace et se déforme, il vient dans une nouvelle position C'_1. Soit f le flux de force passant par une surface quelconque menée par le circuit C_1, en entrant par la face négative de cette surface; soit f' le flux de force

Fig. 31.



qui traverse une surface quelconque menée par le circuit C'_1, en entrant par la face négative de cette surface. Si nous observons que A_1 est une surface passant par le circuit C_1, que l'ensemble de A_1 et des aires des circuits γ forme une surface A'_1 passant par le circuit C'_1; que la face négative des aires des circuits γ devient face positive dans la surface A'_1, nous voyons facilement que la somme des flux de force entrant par les faces négatives des aires des circuits γ a pour valeur $(f - f')$.

En d'autres termes,

$$f - f' = -\sum \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n} d\Sigma$$

et l'égalité (7) devient

$$\text{(8)} \qquad E_{12}\, dt = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(f - f') = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{df}{dt} dt.$$

En présence d'un conducteur fermé, immobile, 2, *traversé par un courant uniforme dont l'intensité* J_2 *est invariable, se déplace et se déforme un conducteur fermé* 1; *on suppose que, par le conducteur* 1, *on puisse faire passer une surface à deux côtés* A_1 *qui se déplace et se déforme avec lui sans jamais rencontrer le circuit* 2. *Le conducteur* 1 *subit de la*

part du courant 2 une force électromotrice d'induction égale au produit par $\left(-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\right)$ *de la dérivée par rapport au temps du flux de force du courant 2 qui entre par la face négative de la surface* A_1.

Cette dernière proposition est susceptible d'une extension beaucoup plus grande que la précédente.

Imaginons que les circuits 1 et 2 changent de forme et de position, d'une manière quelconque, tout en restant fermés; que l'intensité J_2 varie d'une manière quelconque, tout en restant uniforme. Le courant 2 engendrera dans le contour 1 une force électromotrice d'induction qui aura pour valeur

$$E_{12} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left(J_2\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{\cos\omega}{r}\,ds_1\,ds_2\right).$$

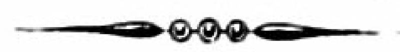
Or le théorème d'Ampère donne

$$\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{\cos\omega}{r}\,ds_1\,ds_2 = -\mathbf{S}_{A_1}\mathbf{S}_{A_2}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial N_1\,\partial N_2}\,d\Omega_1\,d\Omega_2.$$

On a donc

$$(9)\qquad E_{12} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}\mathbf{S}_{A_1}d\Omega_1\frac{\partial}{\partial N_1}\mathbf{S}_{A_2}\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}J_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_2}\,d\Omega_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}\mathbf{S}_{A_1}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial N_1}\,d\Omega_1.$$

Donc, *dans le cas le plus général, la force électromotrice d'induction engendrée par un courant fermé et uniforme 2 dans un conducteur fermé 1 par lequel on peut faire passer une surface à deux côtés* A_1 *qui se déplace et se déforme avec lui sans jamais rencontrer le circuit 2 est égale au produit par* $\left(-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\right)$ *de la dérivée par rapport au temps du flux de force du courant 2 qui entre par la face négative de la surface* A_1.



CHAPITRE VII.

QUELQUES PRINCIPES UTILES POUR L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE L'INDUCTION.

§ 1. — Principe fondamental sur lequel reposent les méthodes de détermination des coefficients d'induction.

Nous avons vu, au Chapitre V, ce qu'il fallait entendre par le mot de *coefficient d'induction*. Si C_i désigne un circuit fermé quelconque, le *coefficient d'induction propre* de ce circuit est l'intégrale

$$P_i = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\int\frac{\cos\omega}{r}\,ds_i\,ds'_i,$$

étendue deux fois au circuit C_i; de même, si C_i, C_j sont deux circuits fermés quelconques, le *coefficient d'induction mutuelle* de ces deux circuits est l'expression

$$P_{ij} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\int\frac{\cos\omega}{r}\,ds_i\,ds_j,$$

dans laquelle l'une des intégrations s'étend au circuit C_i, l'autre au circuit C_j.

Ces coefficients renferment dans leur expression une constante, la constante fondamentale de l'Électrodynamique, dont la valeur doit être demandée à l'expérience; mais, si l'on fait abstraction de cette constante, les coefficients d'induction se présentent comme des quantités dont l'expression analytique est entièrement définie; en sorte que le rapport de deux coefficients d'induction pourrait toujours être calculé si l'on connaissait avec exactitude la forme et les dimensions des conducteurs auxquels ces coefficients se rapportent.

Mais ce calcul, toujours concevable théoriquement, est, dans

la plupart des cas, infaisable pratiquement; il est donc nécessaire de posséder des méthodes expérimentales propres à comparer entre eux les coefficients d'induction.

Les méthodes employées consistent toutes à faire usage de certaines propriétés des phénomènes d'induction dans les circuits immobiles. L'exposé que l'on donne ordinairement de ces méthodes suppose que les courants qui traversent les conducteurs considérés demeurent uniformes pendant toute la durée de l'induction. C'est là une hypothèse qui n'est rien moins que vraisemblable. Lorsque l'intensité d'un courant varie, il est fort peu probable, en général, que les variations de cette intensité aient la même valeur, en même temps, en tous les points du circuit. Il serait donc regrettable que l'on pût croire la légitimité des méthodes de comparaison des coefficients d'induction subordonnée à cette hypothèse inexacte. Aussi, bien que l'indication des méthodes expérimentales propres à comparer deux coefficients d'induction soit, comme l'exposé des méthodes propres à comparer les résistances ou les forces électromotrices, hors du plan de notre Ouvrage, allons-nous indiquer ici le principe qui permet de les justifier. Ce principe trouve d'ailleurs son application dans la discussion d'une foule d'autres méthodes expérimentales où interviennent les phénomènes d'induction.

Imaginons un système que, pour simplifier, nous supposerons formé de deux circuits C_1, C_2. Le premier est traversé par un courant dont l'intensité est J_1 à l'instant t, en un point de l'élément ds_1; le second est traversé par un courant dont l'intensité est J_2 à l'instant t, en un point de l'élément ds_2. Soit R_1 la résistance spécifique en un point de l'élément ds_1. Durant le temps dt, l'induction met en mouvement, dans l'élément ds_1, une quantité d'électricité dQ_1, et l'on a

$$dQ_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2R_1}\left[\quad dt\int_{s_1}\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta_1\cos\theta'_1\right)\frac{dJ'_1}{dt}\,ds'_1 \right.$$
$$\left. + dt\int_{s_2}\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta_1\cos\theta_2\right)\frac{dJ_2}{dt}\,ds_2\right].$$

Supposons que, jusqu'à l'instant T, le système ait été parcouru par des courants constants et uniformes ayant pour intensités I_1 dans le circuit C_1 et I_2 dans le circuit C_2; supposons qu'à partir

du temps T′ le système soit encore parcouru par des courants constants et uniformes ayant pour intensités I'_1 dans le circuit C_1 et I'_2 dans le circuit C_2. Intégrons les deux membres de l'égalité précédente entre T et T′; si Q_1 désigne la quantité d'électricité que, pendant ce temps, l'induction met en mouvement dans l'élément ds_1, nous aurons

$$Q_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2R_1}\left[(I'_1 - I_1)\int_{s_1}\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta_1\cos\theta'_1\right)ds'_1 \right.$$
$$\left. + (I'_2 - I_2)\int_{s_2}\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta_1\cos\theta_2\right)ds_2\right],$$

égalité que l'on peut écrire

$$Q_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2R_1\,ds_1}\left[ds_1(I'_1 - I_1)\int_{s_1}\frac{\cos\omega}{r}\,ds'_1 + ds_1(I'_2 - I_2)\int_{s_2}\frac{\cos\omega}{r}\,ds'_2\right].$$

La quantité Q_1 n'est pas la même pour tous les éléments ds_1; l'électricité libre a, à l'instant T, une densité linéaire ρ_1 en un point de l'élément ds_1; à l'instant T′, elle a une densité linéaire ρ'_1, et l'on a

$$\frac{dQ_1}{ds_1} = (\rho_1 - \rho'_1).$$

Si nous admettons que l'électrisation des fils soit négligeable au début comme à la fin de l'expérience, nous pourrons écrire

$$\frac{dQ_1}{ds_1} = 0.$$

D'où ce théorème :

Si les courants qui traversent un système de conducteurs fermés et immobiles non pourvus de dérivation, d'abord constants et uniformes, se mettent à varier, pour redevenir au bout d'un certain temps constants et uniformes, la quantité d'électricité mise en mouvement par l'induction, durant ce temps, a la même valeur en tous les points d'un même conducteur.

Écrivons que la quantité d'électricité mise en mouvement par l'induction dans les éléments $d\sigma_1$, $d\sigma'_1$, ... du circuit C_1 a une va-

leur unique Q_1; nous aurons

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2 R_1 d\sigma_1} d\sigma_1 \left[(I'_1 - I_1) \int_{s_1} \frac{\cos\omega}{r} ds_1 + (I'_2 - I_2) \int_{s_2} \frac{\cos\omega}{r} ds_2 \right] \\ &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2 R'_1 d\sigma'_1} d\sigma'_1 \left[(I'_1 - I_1) \int_{s_1} \frac{\cos\omega}{r} ds_1 + (I'_2 - I_2) \int_{s_2} \frac{\cos\omega}{r} ds_2 \right] \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

De ces égalités on déduit sans peine

$$\begin{aligned} Q_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{1}{\int R_1 d\sigma_1} \Bigg[& (I'_1 - I_1) \int\int \frac{\cos\omega}{r} ds_1 d\sigma_1 \\ & + (I'_2 - I_2) \int\int \frac{\cos\omega}{r} ds_2 d\sigma_1 \Bigg], \end{aligned}$$

ou, en désignant par $\mathcal{R}_1$ la résistance du circuit C_1,

$$\mathcal{R}_1 Q_1 = p_1 (I'_1 - I_1) + P_{12} (I'_2 - I_2).$$

D'où ce théorème :

Dans les conditions précédemment indiquées, l'induction met en mouvement en chaque point du circuit la même quantité d'électricité que si les courants variaient en demeurant uniformes pendant toute la durée du phénomène.

On démontrerait aisément que ce théorème demeure vrai pour un système quelconque de conducteurs fermés, mobiles ou immobiles, présentant ou non des dérivations.

§ 2. — Détermination de la quantité d'électricité mise en mouvement par un courant instantané.

La plupart des études expérimentales relatives aux phénomènes d'induction conduisent au problème suivant : *Déterminer la quantité d'électricité mise en mouvement dans un circuit, par un courant d'induction de très courte durée*. Indiquons ici le principe de la méthode propre à résoudre ce problème.

Nous verrons plus tard qu'un fil parcouru par un courant exerce certaines actions sur un aimant; ces actions peuvent se ramener à des actions élémentaires exercées par chaque élément de courant sur chaque élément magnétique; l'action d'un élément de courant sur un élément magnétique se réduit à une force appliquée

au milieu de l'élément magnétique et à un couple; la grandeur et la direction de la force, la grandeur et la direction de l'axe du couple, dépendent de la position mutuelle de l'élément de courant et de l'élément magnétique; mais, et c'est le point qui nous importe pour la suite, la grandeur de la force, la grandeur de l'axe du couple, sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelles à la longueur ds de l'élément de conducteur et à l'intensité J du courant qui le traverse.

Cela étant, considérons un *galvanomètre,* c'est-à-dire un fil, qui peut être parcouru par un courant, placé au voisinage d'un aimant mobile autour d'un axe vertical.

A l'instant t, le fil est parcouru par un courant dont l'intensité est J en un point de l'élément ds. Les actions de l'élément de courant ds sur l'élément magnétique dv ont, par rapport à l'axe autour duquel se meut l'aimant, un moment

$$a\,\mathrm{J}\,ds,$$

a dépendant de l'aimantation de l'élément dv et de sa position par rapport à l'élément ds; de même, les actions de l'élément de courant ds sur l'élément magnétique dv' ont, par rapport au même axe, un moment

$$a'\,\mathrm{J}\,ds.$$

Les actions de l'élément ds sur tout l'aimant ont, par rapport au même axe, un moment

$$(a + a' + \ldots)\mathrm{J}\,ds = \mathrm{A}\,\mathrm{J}\,ds,$$

A dépendant de l'aimantation de l'aimant et de la situation respective de l'aimant et de l'élément ds.

Enfin les actions du courant tout entier sur l'aimant ont pour moment par rapport à l'axe autour duquel se meut l'aimant

$$\mathrm{M} = \int_s \mathrm{A}\mathrm{J}\,ds.$$

Imaginons que, jusqu'au temps T, le conducteur ne soit parcouru par aucun courant; l'aimant est alors en équilibre sous l'action du magnétisme terrestre; entre les instants T et T', le conducteur est parcouru par un courant variable; enfin, après l'instant T', tout courant cesse de nouveau dans le conducteur.

Si, comme il arrive dans un grand nombre de phénomènes d'induction, et comme nous le supposerons dans ce qui va suivre, les deux instants T et T′ sont extrêmement rapprochés, les actions exercées sur l'aimant par le courant pendant ce temps constitueront ce qu'on nomme en Mécanique une *percussion*.

Le moment de la percussion par rapport à l'axe autour duquel se meut l'aimant sera

$$\int_T^{T'} M\,dt = \int_T^{T'}\int_s AJ\,ds\,dt,$$

Si l'on remarque que pendant le temps extrêmement court $(T' - T)$, la position de l'aimant, par rapport au courant, varie extrêmement peu, en sorte que la quantité A demeure sensiblement invariable, on aura

$$\int_T^{T'} M\,dt = \int_s A\left(\int_T^{T'} J\,dt\right) ds.$$

Si Q désigne la quantité d'électricité mise en mouvement dans l'élément ds pendant le temps considéré, on aura

$$\int_T^{T'} M\,dt = \int_s AQ\,ds.$$

Mais, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la quantité Q a sensiblement la même valeur pour tous les éléments ds; si donc on désigne par G la quantité $\int_s A\,ds$, c'est-à-dire *le moment, par rapport à l'axe autour duquel se meut l'aimant de toutes les forces qu'un courant d'intensité égale à l'unité, parcourant le cadre du galvanomètre, exerce sur l'aimant placé dans sa position d'équilibre*, on aura

$$\int_T^{T'} M\,dt = GQ.$$

D'après un théorème connu de la théorie des percussions, cette quantité doit être égale au moment, par rapport à l'axe autour duquel se meut l'aimant, de la quantité de mouvement initiale de l'aimant. Si donc K^2 est le moment d'inertie de l'aimant, α l'angle de

l'axe magnétique de cet aimant avec la méridienne magnétique, on aura

$$\text{(1)} \qquad K^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{T'} = GQ.$$

A partir de l'instant T′, l'aimant se met en mouvement sous l'action du magnétisme terrestre; l'équation de son mouvement est, en désignant par $\mathfrak{M}$ son moment magnétique, par H la composante horizontale du magnétisme terrestre

$$K^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\mathfrak{M} H \sin\alpha.$$

Cette équation, intégrée en observant que, pour $t = T'$, α est sensiblement égal à 0, donne

$$K^2 \left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_t^2 - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{T'}^2\right] = 2\,\mathfrak{M} H(\cos\alpha - 1),$$

ou bien, en vertu de l'égalité (1),

$$K^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 2\,\mathfrak{M} H(\cos\alpha - 1) + \frac{G^2Q^2}{K^2}.$$

L'aimant, soumis à l'impulsion due au courant, s'écarte de sa position d'équilibre d'un angle a, puis revient en sens contraire; on obtient l'*angle d'impulsion* a en exprimant que $\frac{d\alpha}{dt}$ devient égal à 0 au moment où $\alpha = a$, ce qui donne

$$2\,\mathfrak{M} H(\cos a - 1) + \frac{G^2Q^2}{K^2} = 0.$$

Mais

$$\cos a - 1 = -2\sin^2\frac{a}{2}.$$

On a donc

$$\text{(2)} \qquad Q = \frac{2K}{G}\sqrt{\mathfrak{M} H}\,\sin\frac{a}{2}.$$

Si l'on connaissait la valeur du coefficient

$$\frac{2K}{G}\sqrt{\mathfrak{M} H}$$

(et nous rencontrerons plus tard un galvanomètre, la boussole des tangentes, pour lequel il est possible de déterminer la valeur de ce

coefficient), on pourrait, de l'observation de l'angle d'impulsion, déduire la quantité d'électricité que le courant instantané a transportée dans le galvanomètre.

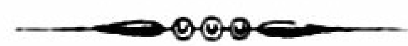
Lors même que l'on suppose inconnue la valeur de la quantité

$$\frac{2K}{G}\sqrt{\mathfrak{M}H},$$

si, dans deux circonstances différentes, des courants instantanés ont donné à l'aiguille du même galvanomètre des impulsions a et a', ces courants ont mis en mouvement des quantités d'électricité Q et Q' liées par la relation

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\sin\frac{a'}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

L'emploi du *galvanomètre balistique* permet donc de comparer les quantités d'électricité mises en mouvement par des courants instantanés.



CHAPITRE VIII.

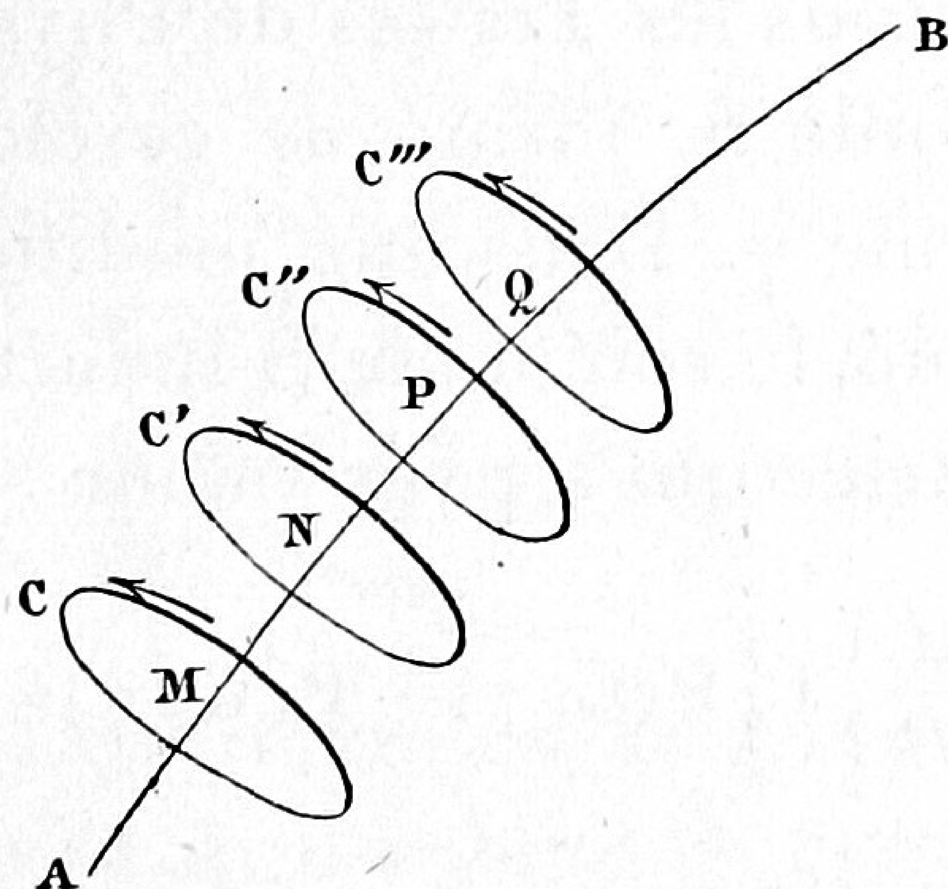
L'INDUCTION PAR LES SOLÉNOÏDES.

Imaginons une ligne quelconque AB (*fig.* 32). Partageons cette ligne en parties infiniment petites égales entre elles

$$MN = NP = PQ = \ldots = D.$$

Prenons les points de divisions M, N, P, Q, ..., pour centres de cercles C, C′, C″, C‴, ..., ayant tous leur plan normal à la courbe AB, ayant tous un même rayon infiniment petit.

Fig. 32.



Supposons que tous ces cercles soient des conducteurs parcourus par un même courant d'intensité J, marchant dans le même sens en tous ces cercles.

Nous aurons obtenu un système de courants, doué, comme nous le verrons, de propriétés très remarquables ; c'est à un semblable système qu'Ampère a donné le nom de *solénoïde électrodynamique*.

La ligne AB est l'*axe du solénoïde*.

Lorsque la ligne AB est une courbe fermée, on dit que le solénoïde est *fermé*.

Lorsque le solénoïde est *ouvert*, si l'on suppose un observateur

placé de manière à voir l'une des extrémités du solénoïde devant lui, et les parties du solénoïde, voisines de cette extrémité, derrière cette extrémité, il verra, dans le cercle extrême qu'il regarde, le courant marcher soit dans le sens des aiguilles d'une montre, soit en sens inverse des aiguilles d'une montre.

L'extrémité du solénoïde où l'observateur voit le courant marcher en sens inverse des aiguilles d'une montre prend, pour des raisons que nous examinerons plus tard, le nom de pôle austral *du solénoïde. L'autre extrémité prend le nom de* pôle boréal.

Lorsque nous aurons, dans la suite, à prendre un sens de parcours sur l'axe du solénoïde, nous prendrons le sens de parcours qui coïncide en chacun des points M, N, P, Q, ... avec la direction de la normale à la face positive des cercles C, C′, C″, C‴, ... Dans le cas où le solénoïde est ouvert, cette direction est celle qui va du pôle boréal au pôle austral.

Nous n'insisterons pas sur les moyens par lesquels on réalise pratiquement, au moins d'une manière approchée, un solénoïde; ils sont décrits dans tous les Traités de Physique.

Plaçons un solénoïde S, formé de cercles C, C′, en présence d'un conducteur fermé γ. Dans une modification quelconque du système ainsi constitué, le solénoïde S induit dans le conducteur γ une force électromotrice qui a pour valeur

$$E = \frac{d}{dt}\left\{ J\left[P(C, \gamma) + P(C', \gamma) + \ldots\right]\right\}, \tag{1}$$

en désignant par

$$P(C^{(i)}, \gamma)$$

le coefficient d'induction mutuelle des deux conducteurs $C^{(i)}$ et γ.

Supposons que l'on fasse sur les fonctions $f(r)$ et $g(r)$ les hypothèses faites au Chapitre III. On aura alors

$$P(C^{(i)}, \gamma) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int_{\gamma}\int_{C^{(i)}} \frac{\cos\omega}{r}\, d\sigma\, ds_i, \tag{2}$$

$d\sigma$ étant un élément du conducteur γ, et ds_i un élément du conducteur $C^{(i)}$.

D'après le théorème d'Ampère, si $d\Sigma$ désigne un élément d'une aire à deux côtés passant par le circuit γ; si Ω désigne l'aire infi-

niment petite du cercle $C^{(i)}$; si N désigne la normale à la face positive de γ, et l le sens du parcours positif de l'axe du solénoïde, nous aurons

$$P(C^{(i)}, \gamma) = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \Omega \frac{\partial}{\partial l} \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Sigma,$$

et, par conséquent,

$$E = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{d}{dt} \left\{ J \sum \Omega \frac{\partial}{\partial l} \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Sigma \right\}.$$

D désignant la distance infiniment petite de deux des cercles C, un élément de longueur dl du solénoïde renferme un nombre $\frac{dl}{D}$ de ces cercles. On voit donc aisément que la quantité précédente peut s'écrire

$$(3) \qquad E = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Omega J}{D} \int_{BA} \frac{\partial}{\partial l} \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Sigma \, dl \right\}.$$

Soit (x, y, z) un point de l'axe du solénoïde; soit $f(x, y, z)$ la fonction continue, mais non uniforme, que nous avons nommée (Introduction, Chap. III) *l'angle sous lequel du point* (x, y, z), *on voit la face positive d'une surface à deux côtés* Σ *passant par le conducteur* γ. L'égalité précédente pourra s'écrire

$$(4) \qquad E = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Omega J}{D} \int_{BA} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l} dl \right\}.$$

Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point B; soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point A. Au point B, $f(x_0, y_0, z_0)$ est susceptible d'une infinité de déterminations; prenons-en arbitrairement une que nous désignerons par σ_B.

Du point B au point A, on peut toujours passer par un trajet ba qui ne perce pas la surface à deux côtés menée par le circuit γ. Soit σ_A la quantité parfaitement déterminée définie par l'égalité

$$\sigma_A - \sigma_B = \int_{ba} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l} dl.$$

Si le solénoïde est fermé, σ_A sera évidemment identique à σ_B; sinon, il en sera en général différent.

Supposons maintenant que l'axe du solénoïde perce n fois la surface à deux côtés Σ menée par le courant γ en passant du côté

négatif au côté positif, et n' fois en passant du côté positif au côté négatif. D'après ce que nous avons dit au Chapitre III de l'Introduction, nous aurons

$$\int_{BA} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l}\, dl = \sigma_A - \sigma_B + 4\pi(n - n',$$

et l'égalité (4) deviendra

$$E = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Omega J}{D} \left[\sigma_A - \sigma_B + 4\pi(n - n') \right] \right\}. \tag{5}$$

La quantité $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\Omega J}{D} = \varphi$ porte le nom de *puissance du solénoïde*.

Supposons d'abord que, dans la modification étudiée, *la puissance du solénoïde demeure constante*. Cette condition sera réalisée si l'intensité du courant qui traverse le solénoïde demeure invariable, et si, de plus, les petits cercles conservent des dimensions constantes et demeurent à une distance invariable les uns des autres.

La modification se réduira alors à des déformations et à des déplacements de l'axe du solénoïde et du conducteur γ.

Or, pour un déplacement infiniment petit de ce genre, on aura toujours pu choisir la surface passant par le conducteur γ, de telle façon que ce déplacement infiniment petit ne fasse pas varier le nombre n et n'. On aura donc

$$E = \frac{\mathfrak{A}^2}{\sqrt{2}} \frac{\Omega J}{D} \frac{d}{dt} (\sigma_A - \sigma_B). \tag{6}$$

On pourra regarder, dans toute modification d'un système formé par un conducteur fermé et par un solénoïde de puissance φ *invariable, le pôle austral du solénoïde comme engendrant dans le conducteur une force électromotrice d'induction ayant pour valeur*

$$E_A = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \varphi \frac{d\sigma_A}{dt}, \tag{7}$$

et le pôle boréal du solénoïde comme engendrant dans le même conducteur une force électromotrice d'induction ayant pour valeur

$$E_B = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \varphi \frac{d\sigma_B}{dt}. \tag{7 bis}$$

Si le solénoïde est fermé, σ_A est, comme nous l'avons vu, identique à σ_B. La formule (6) donne donc

$$E = 0.$$

Ainsi : *si l'on déforme et déplace d'une manière quelconque en présence l'un de l'autre un conducteur fermé et un solénoïde fermé de puissance invariable, aucun phénomène d'induction ne se manifeste dans le conducteur.*

Voyons maintenant ce qui arrive si on laisse immobiles l'axe du solénoïde et le conducteur fermé, tout en faisant varier la puissance du solénoïde, ce qu'on réalise aisément en faisant varier l'intensité du courant qui traverse un solénoïde rigide.

Dans ces circonstances, nous distinguerons deux cas :

1° *Par le conducteur fermé, on peut mener une surface à deux côtés que le solénoïde ne rencontre pas.*

Dans ce cas, on a

$$n = 0, \quad n' = 0.$$

La formule (5) donne

$$E = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\sigma_A - \sigma_B)\frac{d\varphi}{dt}. \tag{8}$$

On peut regarder le pôle austral d'un solénoïde rigide dont la puissance varie comme engendrant dans un conducteur fermé immobile une force électromotrice d'induction

$$E_A = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sigma_A\frac{d\varphi}{dt}, \tag{9}$$

et le pôle boréal comme engendrant une force électromotrice d'induction

$$E_B = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sigma_B\frac{d\varphi}{dt}. \tag{9 bis}$$

Si le solénoïde est fermé, $\sigma_A = \sigma_B$ et l'égalité (8) donne

$$E = 0.$$

Un solénoïde rigide et fermé dont la puissance varie n'engendre aucune force électromotrice d'induction dans un conducteur fermé, pourvu que, par ce conducteur, on puisse faire passer une surface à deux côtés que ne rencontre pas le solénoïde.

2° Ces propriétés cessent d'être exactes *lorsqu'il n'est pas possible de faire passer par le conducteur fermé une aire à deux côtés que ne rencontre pas le solénoïde.*

Supposons, en particulier, le solénoïde fermé. Nous aurons $\sigma_A = \sigma_B$, et la formule (5) donnera

$$E = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} 4\pi(n - n') \frac{d\varphi}{dt}. \tag{10}$$

Un solénoïde fermé et rigide dont la puissance varie engendre dans un conducteur fermé immobile une force électromotrice d'induction indépendante de la forme et de la grandeur du solénoïde et du conducteur, et dépendant seulement du nombre des rencontres du solénoïde avec une surface à deux côtés passant par le conducteur et de la nature de ces rencontres.

La formule (10) conduit à des conséquences susceptibles d'une vérification expérimentale précise.

Imaginons un solénoïde fermé et rigide placé en présence d'un contour fermé γ qui renferme un galvanomètre balistique.

Supposons qu'au début de l'expérience le solénoïde et le circuit γ ne soient traversés par aucun courant. On lance dans le solénoïde le courant d'une pile; pendant qu'il s'établit, un courant d'induction parcourt le circuit γ; lorsque, dans le solénoïde, le courant de la pile est devenu constant, tout courant a cessé dans le circuit qui renferme le galvanomètre.

Dans une semblable expérience, sont vérifiées les trois conditions suivantes :

1° Le système, formé par des conducteurs immobiles, est traversé par des courants qui sont uniformes au début et à la fin de l'expérience.

2° Le circuit qui renferme le galvanomètre balistique ne renferme aucun courant au début et à la fin de l'expérience.

3° La durée de la période variable est très courte.

Ces conditions entraînent, comme nous l'avons vu au Chapitre précédent, les conséquences suivantes :

1° Toute section du circuit du galvanomètre balistique est traversée par la même quantité Q d'électricité pendant la durée totale de la période variable.

2° Pour calculer cette quantité Q, on peut raisonner comme si les courants étaient à tout instant uniformes.

3° Le galvanomètre balistique permet de mesurer Q.

La deuxième proposition nous permet de calculer Q au moyen de la théorie précédente.

L'égalité (10) donne, en désignant par dQ la quantité d'électricité que le courant d'induction transporte dans le conducteur γ pendant le temps dt; par p le coefficient d'induction propre de ce conducteur; par R sa résistance; par j le courant qui le traverse au temps t,

$$dQ = \frac{1}{R}\left[\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} 4\pi(n - n')\frac{d\varphi}{dt}\,dt + \frac{d}{dt}(pj)\,dt\right].$$

Entre les instants t_0 et t_1, la quantité d'électricité transportée par l'induction sera

$$Q = \frac{1}{R}\left[\frac{4\pi\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(n - n')(\varphi_1 - \varphi_0) + p(j_1 - j_0)\right]$$

Si l'instant t_0 coïncide avec l'instant initial de la période variable, on aura

$$\varphi_0 = 0, \qquad j_0 = 0.$$

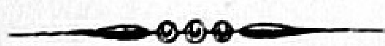
Si l'instant t_1 coïncide avec l'instant final de la période variable, on aura, en désignant par I l'intensité du courant engendré par la pile dans le solénoïde

$$\varphi_1 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\Omega J}{D}, \qquad j_1 = 0.$$

La quantité cherchée sera donc donnée par la formule

$$Q = \frac{1}{R} 2\pi\mathfrak{A}^2(n - n')\frac{\Omega J}{D},$$

facile à comparer aux indications du galvanomètre balistique.



CHAPITRE IX.

DÉVELOPPEMENT DE LA LOI ÉLÉMENTAIRE DE L'INDUCTION. LIGNES DE GLISSEMENT. — INDUCTION UNIPOLAIRE.

§ 1. — Des contacts glissants.

La force électromotrice élémentaire d'induction, $e\,ds\,ds'$, engendrée par l'élément ds' dans l'élément ds, est donnée par la relation générale

$$(1)\qquad e\,ds\,ds'\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left[J'\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)ds\,ds'\right].$$

C'est cette égalité (1) que nous allons discuter plus complètement que nous n'avons eu à le faire jusqu'ici.

1° Supposons, en premier lieu, que les deux éléments ds et ds' fassent partie l'un du circuit C et l'autre du circuit C′, aussi bien à l'instant t qu'à l'instant $t+dt$; que tous les paramètres qui figurent dans notre formule varient d'une manière continue. On a alors

$$\delta J' = \frac{dJ'}{dt}\,dt,$$

$$\delta\,ds = u\,ds\,dt,$$

$$\delta\,ds' = u'\,ds'\,dt,$$

u et u' étant deux quantités finies. L'égalité (2) devient

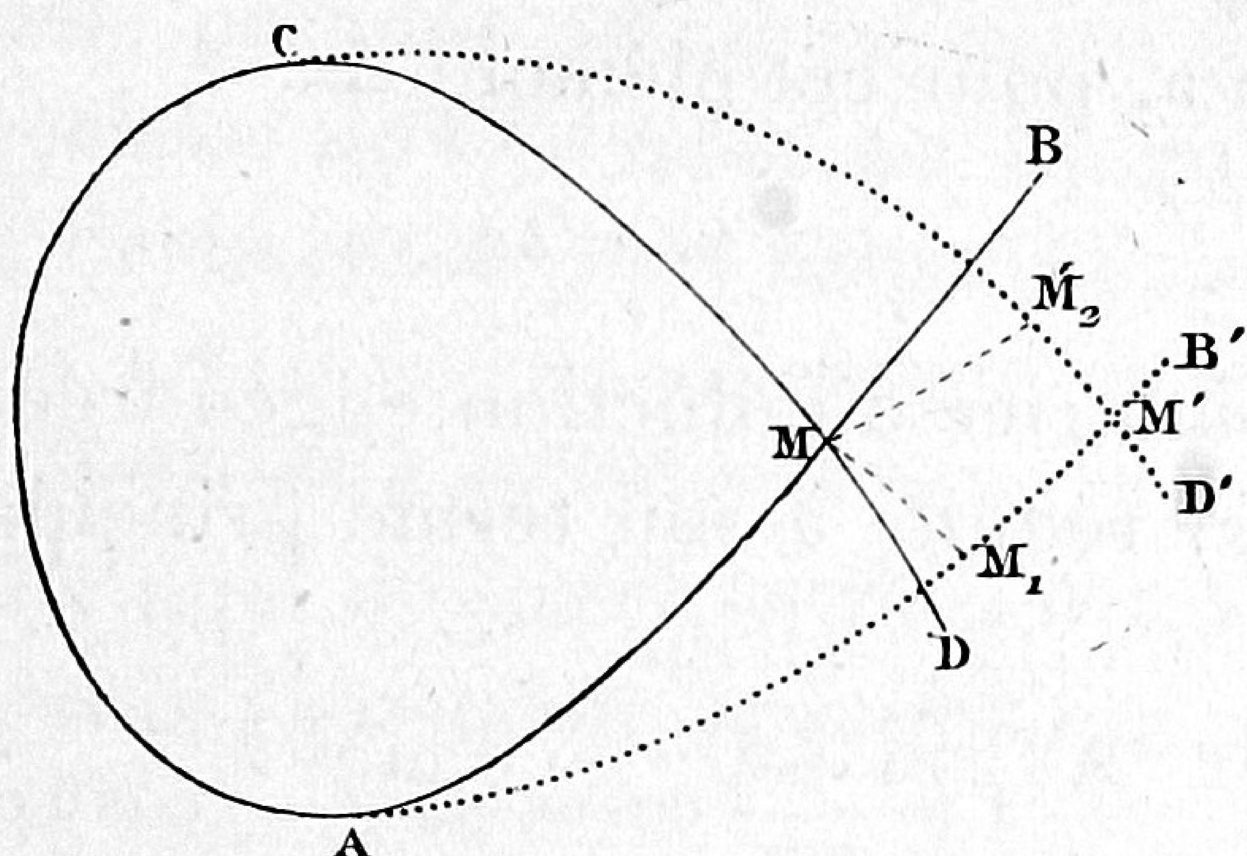
$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} e = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{dJ'}{dt}\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,J'\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,J'\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)(u+u'). \end{aligned}\right.$$

2° Supposons que l'élément ds fasse partie du circuit induit

aussi bien à l'instant t qu'à l'instant $(t+dt)$, mais que l'élément ds' ne fasse pas partie du circuit inducteur à l'instant t et en fasse partie à l'instant $(t+dt)$. Cela peut se réaliser de la manière suivante.

Le conducteur C' renferme au temps t deux parties AB, CD (*fig.* 33) se coupant en M, qui glissent l'une sur l'autre ; au

Fig. 33.



temps $(t+dt)$, ces deux parties sont en AB', CD'; elles se coupent en M'. Le point qui, au temps t, se trouve en M sur le conducteur AB est en M_1 au temps $(t+dt)$; le point qui, au temps t, se trouve en M sur le conducteur CD est en M_2 au temps $(t+dt)$. Les deux éléments M_1M', $M'M_2$ ont été introduits dans le circuit C' entre les instants t et $t+dt$.

Une disposition de ce genre se réalise aisément en formant un des conducteurs par une rigole pleine de mercure, l'autre par un fil de fer plongeant dans ce mercure.

Soit donc $\Delta s'$ un tel élément. Pour cet élément, on a

$$\delta J' = J',$$
$$\delta\, \Delta s' = 0;$$

la force électromotrice engendrée par l'élément $\Delta s'$ dans l'élément ds a pour valeur $e\, ds\, \Delta s'$, et l'on a

$$(3)\qquad e\, ds\, \Delta s'\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} J' \left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right) ds\, \Delta s',$$

en négligeant des termes infiniment petits par rapport à ceux que l'on conserve.

La quantité $e\, ds\, \Delta s'$ n'est plus ici de l'ordre de grandeur de $ds\, \Delta s'$, mais simplement de l'ordre de grandeur de ds. Cela n'em-

pêche pas la somme des forces électromotrices d'induction engendrées dans l'élément ds par les divers éléments du conducteur C' de demeurer finie, car il ne s'introduit jamais qu'un nombre limité d'éléments dans le conducteur C' entre les instants t et $(t + dt)$.

3° Supposons que l'élément ds' fasse partie du circuit C' aussi bien à l'instant t qu'à l'instant $(t + dt)$, mais que l'élément Δs soit introduit dans le circuit C entre ces deux instants. On pourra admettre que l'on a, pour cet élément Δs,

$$\delta \, \Delta s = \Delta s,$$

et la force électromotrice d'induction engendrée par l'élément ds' dans l'élément Δs, réduite à son terme principal, aura pour valeur

$$e \, ds' \, \Delta s \, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathrm{J}' \left(\frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' \right) \Delta s \, ds'. \tag{4}$$

L'ensemble du circuit C' engendre, dans l'élément Δs, une force électromotrice totale $\mathcal{E} \, \Delta s$, et l'on a

$$\mathcal{E} \, \Delta s \, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \Delta s \int_{C'} \mathrm{J}' \left(\frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' \right) ds'. \tag{5}$$

Cette force électromotrice n'est pas de l'ordre de Δs ; elle est finie. Ainsi, tout élément introduit dans le circuit induit entre les instants t et $(t + dt)$ est, au moment de son introduction, le siège d'une force électromotrice d'induction de grandeur finie.

Si cette force électromotrice finie agissait seule dans l'élément Δs, elle y engendrerait un courant d'intensité infinie. Mais elle n'agit pas seule en cet élément ; lors même (ce que nous supposerons) que cet élément ne renferme pas de force électromotrice thermo-électrique ou hydro-électrique, il faut tenir compte de la force électromotrice engendrée en cet élément par les charges électriques distribuées à la surface ou dans l'intérieur des fils conducteurs. Si, à l'instant $(t + dt)$, la fonction potentielle de ces charges a pour valeur V à l'origine de l'élément Δs et V' à l'extrémité, cette nouvelle force électromotrice a pour valeur

$$\varepsilon(\mathrm{V} - \mathrm{V}').$$

L'intensité du courant qui parcourt l'élément Δs sera finie, si

l'on a, aux infiniment petits près,

$$\varepsilon(V - V')\,dt + \mathcal{E}\,\Delta s\,dt = 0$$

ou bien

$$(6)\qquad \varepsilon(V - V')\,dt = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Delta s \int_{C'} J'\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)ds'.$$

Cette différence de fonction potentielle doit être *finie*.

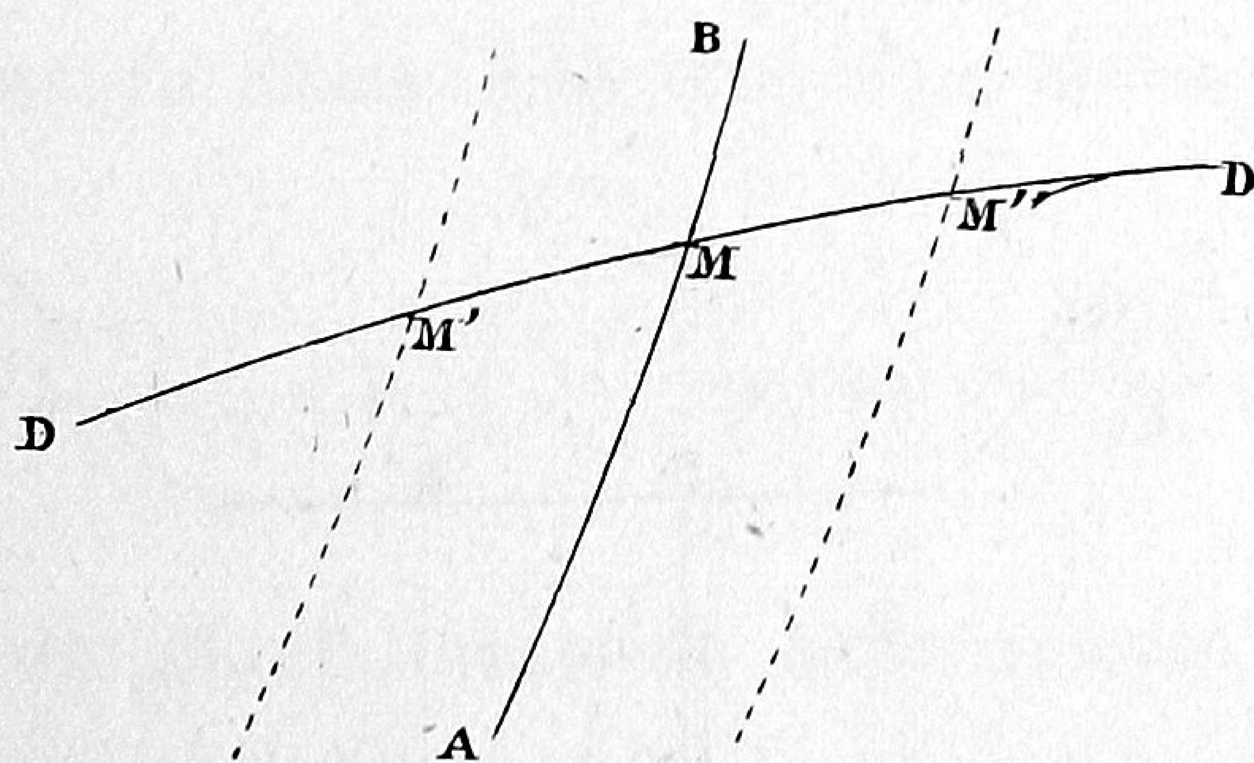
Il est aisé de comprendre comment cette différence finie de fonction potentielle prendra naissance entre les deux extrémités infiniment rapprochées de l'élément Δs. Si, en effet, elle n'existe pas à l'instant t, l'élément Δs sera parcouru par un courant d'intensité infinie, qui, en un temps infiniment court, accumulera une quantité finie d'électricité positive à une extrémité de l'élément Δs, et une quantité finie d'électricité négative à l'autre extrémité, ce qui assure aussitôt l'existence de la différence finie de fonction potentielle dans le sens désiré.

Si, au contraire, l'élément Δs fait partie du circuit C à l'instant t et n'en fait plus partie à l'instant $(t + dt)$, il est, à l'instant t, le siège d'une force électromotrice finie ; entre l'origine de cet élément et son extrémité existe une différence de niveau potentiel donnée par l'égalité

$$\varepsilon(V - V')\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Delta s \int_{C'} J'\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)ds'.$$

Supposons que le conducteur AB glisse sur le conducteur CD (*fig.* 34) ; le point de contact, qui était en M' à l'instant $(t - dt)$,

Fig. 34.



est en M à l'instant t et en M'' à l'instant $(t + dt)$. On a

$$M'M = MM'' = v\,dt,$$

v étant la vitesse du mouvement du point M. D'après les égalités

précédentes, on a, aux infiniment petits près,

$$\varepsilon(V_{M'} - V_M) = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} v \int_{C'} J' \left(\frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' \right) ds',$$

$$\varepsilon(V_M - V_{M''}) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} v \int_{C'} J' \left(\frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' \right) ds'.$$

On déduit de là, en premier lieu,

$$V_{M'} = V_{M''}.$$

La fonction potentielle sur le conducteur fixe, aux points infiniment voisins du contact glissant, a la même valeur de part et d'autre du contact glissant.

On a, en outre,

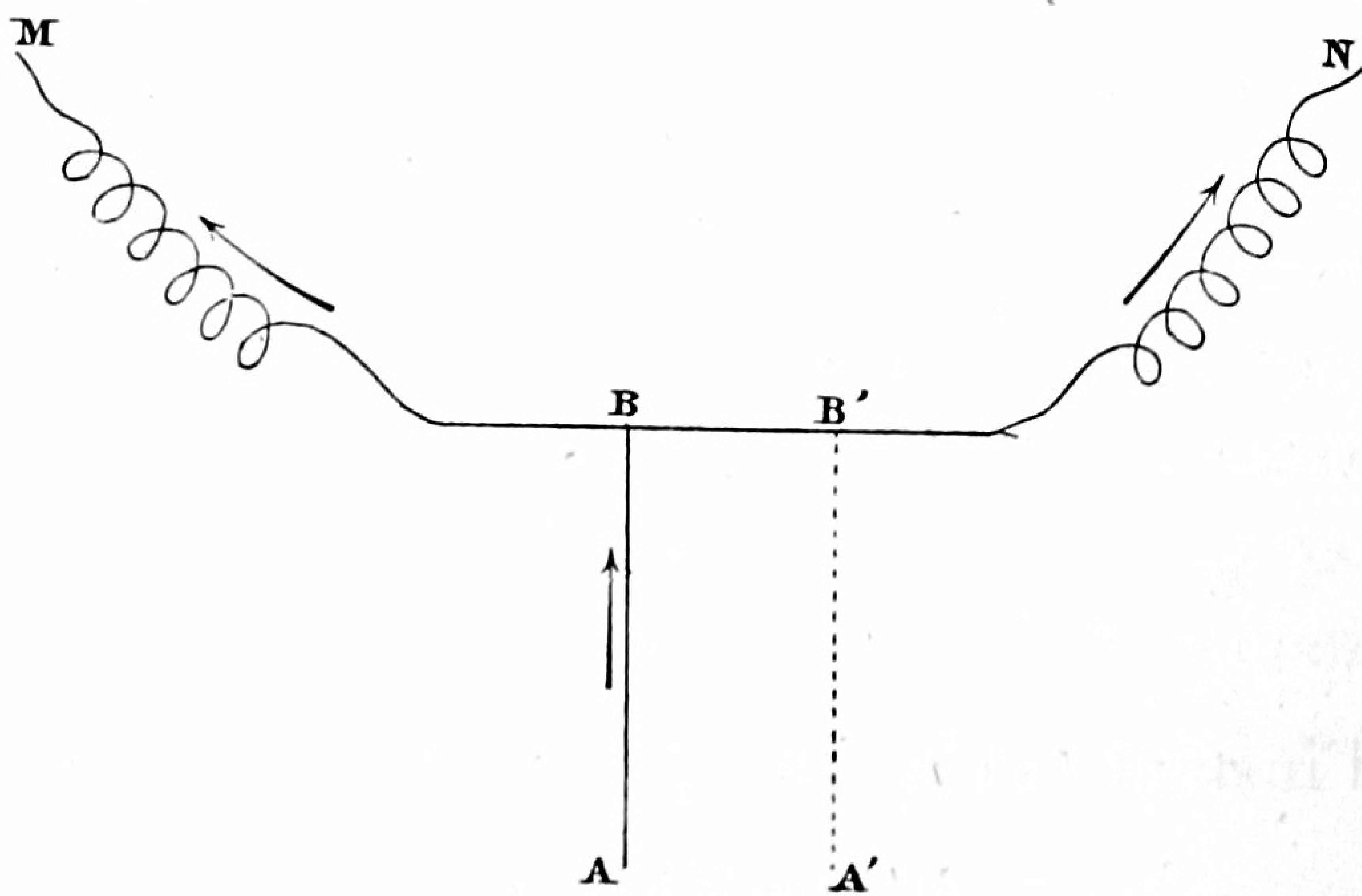
$$\varepsilon(V_M - V_{M'}) = \varepsilon(V_M - V_{M''})$$
$$= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} v \int_{C'} J' \left(\frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' \right) ds'.$$

Entre le contact glissant et les parties infiniment voisines du conducteur fixe s'établit une différence de niveau potentiel proportionnelle à la vitesse du contact glissant et changeant de signe avec cette vitesse.

4° Nous avons supposé que les paramètres r, $\cos\omega$, $\cos\theta$, $\cos\theta'$ variaient, avec t, d'une manière continue ; cela a forcément lieu pour r, mais non pas pour les trois autres.

Supposons qu'un courant arrive par un conducteur AB (*fig.* 35),

Fig. 35.



au temps t, en un autre conducteur présentant deux branches, BM

et BN, dans lesquelles les intensités sont comptées positivement dans les sens BM et BN.

Au temps $(t + dt)$, le conducteur AB est venu en A′B′.

Les deux branches en lesquelles le courant se partage sont maintenant B′M et B′N.

Envisageons l'élément de conducteur BB′. A l'instant t, le sens de cet élément était le sens BB′; à l'instant $(t + dt)$, ce même élément est compté dans le sens B′B. Il a donc brusquement changé de sens. Si l'on considère un autre élément ds quelconque, on voit que les paramètres

$$\cos(\mathrm{BB}', r), \quad \cos(\mathrm{BB}', ds)$$

auront changé de signe entre l'instant t et l'instant $(t + dt)$.

Supposons, en premier lieu, qu'une pareille modification se produise en un point de l'inducteur. Soit ds' l'élément BB′; soit J_0 l'intensité dans la branche BM dont il fait partie à l'instant t; soit J_1 l'intensité dans la branche dont il faisait partie à l'instant $(t + dt)$.

Nous désignerons par θ'_0 et ω_0 les valeurs qu'ont ces angles à l'instant T; à l'instant $(t + dt)$, ils ont les valeurs $\theta'_0 + \pi$, $\omega_0 + \pi$. Nous aurons alors

$$\delta J' = J_1 - J_0,$$

$$\delta \cos\theta' = -2\cos\theta'_0,$$

$$\delta \cos\omega = -2\cos\omega_0;$$

les autres paramètres subissent des variations nulles ou infiniment petites. La force électromotrice élémentaire $e\, ds\, ds'$ engendrée par l'élément ds' dans l'élément ds a alors une valeur donnée par

$$(7) \qquad e\, ds\, ds'\, dt = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}(J_0 + J_1)\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega_0 + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'_0\right) ds\, ds'.$$

Comme la force électromotrice représentée par l'égalité (3), elle n'est plus de l'ordre de $ds\, ds'$, mais de l'ordre de $\frac{ds\, ds'}{dt}$.

5° Supposons maintenant que le système en question fasse partie du circuit induit. Au moyen de notations analogues, nous trouverons que l'élément BB′ est le siège d'une force électromo-

trice $e\,ds\,ds'$, donnée par l'égalité

$$(8)\qquad e\,ds\,ds'\,dt = \mathfrak{A}^2\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega_0 + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta_0\cos\theta'\right)J'\,ds\,ds'.$$

Soit u la vitesse avec laquelle le contact glissant se meut sur MN. La force électromotrice en question est dirigée dans le sens de ce mouvement et a pour valeur

$$e\,ds\,ds' = \mathfrak{A}^2 u\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega_0 + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta_0\cos\theta'\right)J'\,ds'.$$

D'ailleurs,

$$\cos\omega_0 = -\cos(u, ds'),$$
$$\cos\theta_0 = -\cos(u, r).$$

Donc, lorsque l'induit renferme un contact AB dont le point B glisse sur un conducteur MN formant dérivation pour un courant qui y serait amené par AB, si l'on désigne par u la vitesse du déplacement du contact glissant B sur MN, il existe entre le point B et le point où se trouvait le contact immédiatement auparavant une force électromotrice d'induction finie, dirigée en sens contraire de la vitesse u, et donnée par l'égalité

$$(9)\qquad \mathcal{E} = \mathfrak{A}^2 u\sum\left[\frac{1+\lambda}{2r}\cos(u, ds') + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta'\cos(u, r)\right]J'\,ds',$$

la sommation s'étendant à tous les éléments de l'inducteur.

Le courant devant toujours avoir une intensité finie, entre les points B et B' devra exister une différence de niveau potentiel $(V - V')$, telle que

$$(10)\qquad V - V' = \frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}u\sum\left[\frac{1+\lambda}{2r}\cos(u, ds') + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta'\cos(u, r)\right]J'\,ds'.$$

Cette différence de niveau potentiel entre le point que vient de quitter le contact glissant et le point où il se trouve à l'instant considéré s'établira forcément, ainsi que nous l'avons expliqué au n° 3.

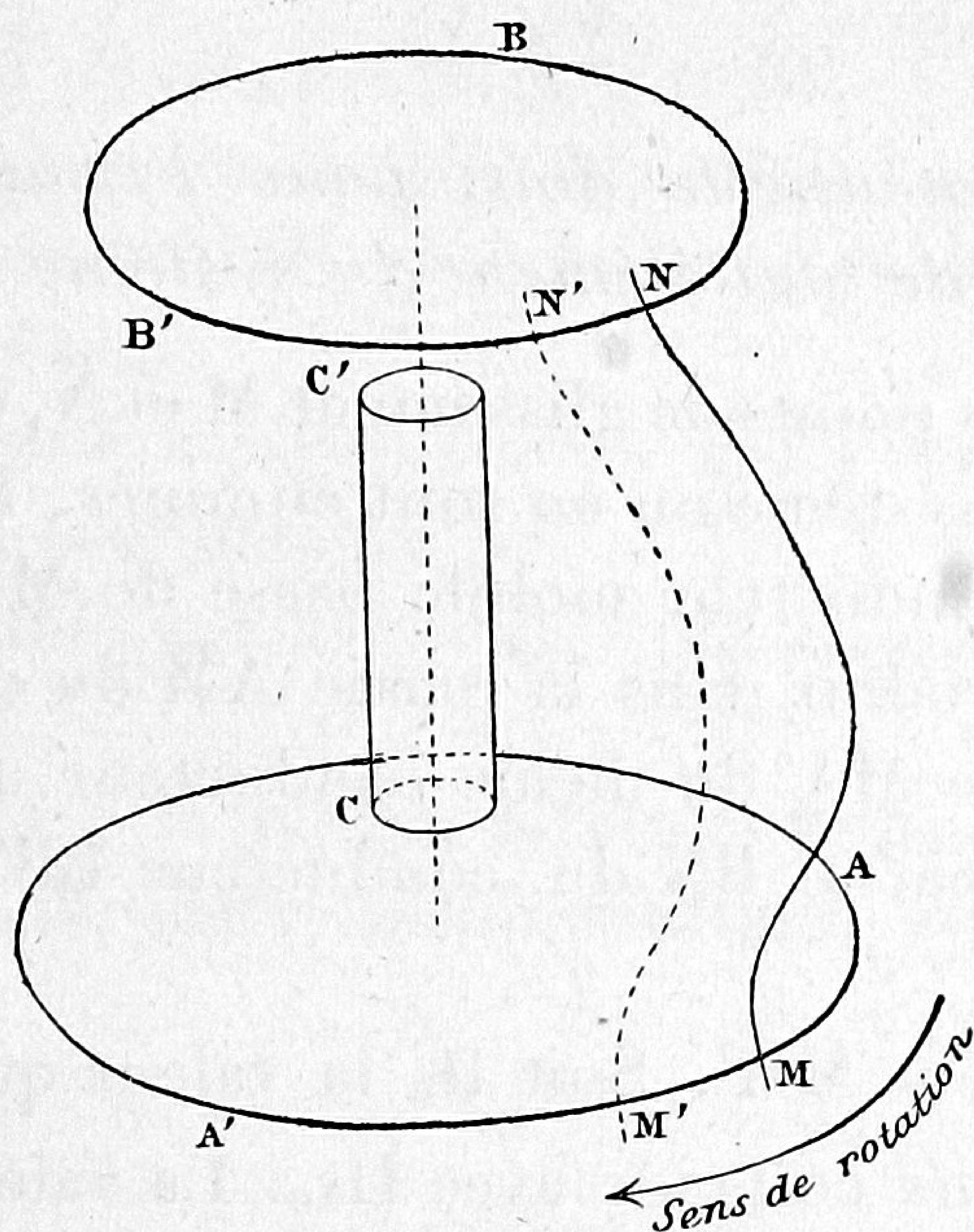
§ 2. — Induction unipolaire.

Ces diverses expressions de la force électromotrice vont nous permettre immédiatement d'expliquer un phénomène qui a donné lieu à de longues controverses, controverses qui sont loin d'être

encore terminées ; nous voulons parler du phénomène de l'*induction unipolaire*.

AA' et BB' (*fig.* 36) sont deux conducteurs circulaires ayant même axe ; CC' est un système de courants qui est de révolution

Fig. 36.



autour du même axe (pratiquement, on le remplace par un aimant). Sur les deux conducteurs AA', BB' vient s'appuyer un troisième conducteur MN que l'on peut animer d'un mouvement de rotation autour de l'axe de l'appareil.

Nous allons chercher la condition de l'équilibre électrique sur le système formé par les conducteurs AA', BB', MN.

Prenons un élément ds faisant partie de ce conducteur. Il est le siège d'une force électromotrice d'induction qui a pour valeur $\mathcal{E}\, ds$; lorsqu'on passe d'une extrémité de cet élément à l'autre, le niveau potentiel varie de V à V'. La condition d'équilibre électrique s'obtient en écrivant que l'on a, pour chaque élément,

$$\mathcal{E}\, ds + \varepsilon(\mathrm{V} - \mathrm{V}') = 0.$$

Considérons un élément ds du circuit induit qui ne soit pas l'un des éléments balayés par un des contacts glissants entre les instants t et $t + dt$. Cet élément étant rigide, on a

$$\delta\, ds = 0.$$

Grâce à la forme du système, on a aussi

$$\delta \sum \varphi \, ds' = 0.$$

On a donc

$$\mathcal{E} \, ds = 0$$

et, par conséquent,

$$V = V'.$$

La fonction potentielle doit, pour l'équilibre, demeurer constante le long de tout élément du système induit.

Au voisinage des points de glissement M et N, des éléments sont introduits dans le système ou en sont éliminés. Entre les instants t et $(t + dt)$, le conducteur mobile passe de MN en M'N'. L'élément MM' est introduit dans la partie AM du conducteur AA' et éliminé de la partie MA' du même conducteur. L'élément NN' est introduit dans la partie BN du conducteur BB' et éliminé de la partie NB'.

Soit Ds_0 l'élément MM'. Soit Π_0 la valeur que prend $\sum \varphi \, ds'$, lorsque l'élément ds coïncide avec Ds_0. La valeur W de la fonction potentielle au point M devra surpasser la valeur constante U que prend la même fonction sur toute la partie M'A'M' du cercle AA' de la quantité

$$\frac{1}{\varepsilon} \Pi_0 \frac{Ds_0}{dt}.$$

Soient R_0 le rayon du cercle AA' et Ω la vitesse angulaire du mouvement de MN. On aura

$$Ds_0 = R_0 \Omega \, dt$$

et

$$W - U = \frac{1}{\varepsilon} R_0 \Pi_0 \Omega. \tag{11}$$

Soit Ds_1 l'élément NN'. Soit Π_1 la valeur que prend $\sum \varphi \, ds'$ lorsque l'élément ds coïncide avec Ds_1. Soit R_1 le rayon du cercle BB'. Entre le point N et les points de la partie N'B'B du cercle BB' existe une différence de niveau potentiel

$$W - V = \frac{1}{\varepsilon} R_1 \Pi_1 \Omega. \tag{11 bis}$$

Les égalités (11) et (11 *bis*) fournissent les conditions de l'équilibre électrique sur le système induit.

Or elles nous donnent

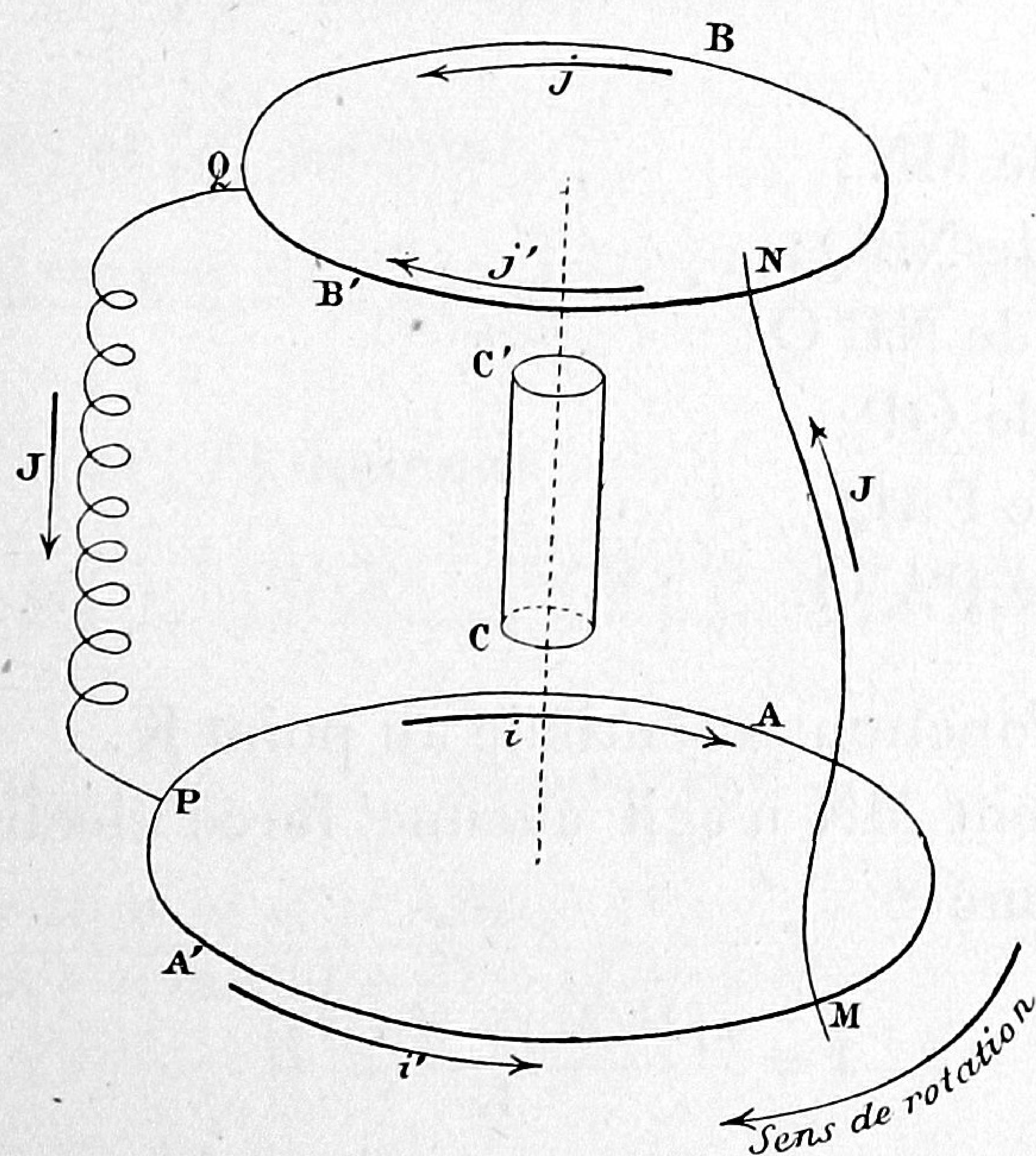
$$(12) \qquad U - V = \frac{1}{\varepsilon}(R_1 \Pi_1 - R_0 \Pi_0)\Omega.$$

Ainsi, *entre les deux cercles* AA′ *et* BB′, *il existe une différence de niveau proportionnelle à la vitesse angulaire du mouvement du conducteur* MN *et changeant de signe lorsque cette vitesse change de sens.*

Supposons qu'une communication autre que MN, immobile, réunisse les deux conducteurs AA′ et BB′. L'équilibre électrique ne sera plus possible sur le système qui sera alors parcouru par un courant.

Soit PQ (*fig.* 37) la communication immobile en question. Avant l'existence de cette communication, le système tout en-

Fig. 37.



tier demeurait parfaitement invariable de forme lorsqu'on faisait tourner MN. Cette parfaite symétrie de forme n'existe plus après l'addition de la communication PQ. Le système repasse seulement périodiquement par la même forme à chaque révolution du système. L'intensité du courant induit, si le segment MN tourne d'un

mouvemect uniforme, devra, au bout d'un temps suffisant, repasser périodiquement par la même valeur (¹).

Mais supposons ce courant induit assez faible pour qu'il soit possible de négliger l'induction que ce courant exerce sur lui-même en comparaison de l'induction exercée par le conducteur CC'. Dans ces conditions, lorsque MN tourne d'un mouvement uniforme, voyons quelle est l'intensité des courants uniformes et périodiques qui traversent le système.

Supposons ce régime périodique établi. Un courant d'intensité J traverse MN de M en N. Au point N, il se partage en deux courants : l'un, d'intensité j, passe par NBQ; l'autre, d'intensité j', par NB'Q. Ces deux courants se rejoignent en Q pour former un courant d'intensité J marchant de Q en P. En P, celui-ci se partage en deux courants : l'un, d'intensité i, suit le parcours PAM; l'autre, d'intensité i', suit le parcours PA'M.

On a

$$J = i + i' = j + j',$$

en vertu du lemme de Kirchhoff.

Soient

L la résistance de MN;
m la résistance de NBQ;
m' la résistance de NB'Q;
L' la résistance de QP;
l la résistance de PAQ;
l' la résistance de PA'Q.

Soit U(K) la fonction potentielle au point K.

Dans le segment MN n'agit aucune force électromotrice d'induction. On a donc

$$(a) \qquad J = \frac{\varepsilon[U(M) - U(N)]}{L}.$$

(¹) On ne saurait démontrer cette proposition; mais on peut la regarder comme une application de ce principe dont Laplace fait un constant usage dans la *Mécanique céleste*, et notamment dans la *Théorie des marées : L'état d'un système de corps, dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent* (LAPLACE, *Mécanique céleste*, 1ʳᵉ Partie, Livre IV, Chap. III, Art. 16).

Dans NBQ existe une force électromotrice d'induction

$$-2R_1\Pi_1\Omega;$$

on a donc

$$(b)\qquad j=\frac{\varepsilon[U(M)+U(Q)]-2R_1\Pi_1\Omega}{m}.$$

Dans NB′Q ne se produit aucune force électromotrice d'induction. On a donc

$$(c)\qquad j'=\frac{\varepsilon[U(N)-U(Q)]}{m'}.$$

Dans QP, on a

$$(d)\qquad J=\frac{\varepsilon[U(Q)-U(P)]}{L'}.$$

Dans PAM, on a

$$(e)\qquad i=\frac{\varepsilon[U(P)-U(M)]+2R_0\Pi_0\Omega}{l}.$$

Dans PA′M, on a

$$(f)\qquad i'=\frac{\varepsilon[U(P)-U(M)]}{l'}.$$

Les formules (b) et (e) donnent

$$(g)\qquad J=\frac{\varepsilon(m+m')[U(N)-U(Q)]-2m'R_1\Pi_1\Omega}{mm'}.$$

Les formules (e) et (f) donnent

$$(h)\qquad J=\frac{\varepsilon(l+l')[U(P)-U(M)]+2l'R_0\Pi_0\Omega}{ll'}.$$

Les formules (a), (d), (g), (h) donnent

$$J=\frac{2\Omega[(m+m')l'R_0\Pi_0-(l+l')m'R_1\Pi_1]}{ll'(m+m')+mm'(l+l')+(L+L')(m+m')(l+l')},$$

ou bien

$$(12)\qquad J=2\Omega\frac{\left(\dfrac{l'}{l+l'}R_0\Pi_0-\dfrac{m'}{m+m'}R_1\Pi_1\right)}{\dfrac{ll'}{l+l'}+\dfrac{mm'}{m+m'}+L+L'}.$$

La quantité

$$\frac{ll'}{l+l'}+\frac{mm'}{m+m'}$$

varie périodiquement avec la position des points M, N; il en est de même des quantités

$$\frac{l'}{l+l'}, \quad \frac{m'}{m+m'}.$$

On a donc bien une intensité qui varie périodiquement avec le temps, la période étant égale à la durée d'une révolution du conducteur MN.

En général, les deux cercles sur lesquels se meuvent les points M, N sont constitués par deux godets de mercure de résistance négligeable. Les quantités

$$\frac{ll'}{l+l'}, \quad \frac{mm'}{m+m'}$$

sont donc négligeables devant L et L'.

Soit ω_0 le potentiel électrodynamique du conducteur CC' tout entier sur le cercle PAMA', parcouru, dans le sens du mouvement du point M, par un courant égal à l'unité; soit ω_1 le potentiel électrodynamique du conducteur CC' tout entier sur le cercle QBNB', parcouru, dans le sens du mouvement du point N, par un courant égal à l'unité. Nous aurons

$$\omega_0 = 2\pi R_0 \Pi_0,$$
$$\omega_1 = 2\pi R_1 \Pi_1.$$

L'égalité (12) deviendra

$$J = \frac{\frac{\Omega}{\pi}\left(\omega_0 \frac{l'}{l+l'} - \omega_1 \frac{m'}{m+m'}\right)}{L+L'},$$

ou, en désignant par T la durée d'une révolution

$$J = \frac{2}{T}\frac{1}{L+L'}\left(\omega_0 \frac{l'}{l+l'} - \omega_1 \frac{m'}{m+m'}\right). \tag{13}$$

Si la durée de la révolution est très petite, et si l'on fait passer le courant dans un galvanomètre, on observera seulement son intensité moyenne

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} J\,dt.$$

D'après l'égalité (13), cette intensité a pour valeur

$$\mathfrak{J} = \frac{\omega_0}{L+L'}\frac{1}{\pi T}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{l'}{l+l'}\Omega\,dt - \frac{\omega_1}{L+L'}\frac{1}{\pi T}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{m'}{m+m'}\Omega\,dt.$$

Évaluons l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{l'}{l+l'}\, \Omega\, dt.$$

On a

$$\frac{l'}{l+l'} = \frac{\text{arc}\, PA'M}{\text{arc}\, PA'MA} = \frac{\text{arc}\, PA'M}{2\pi R_0},$$

$$\Omega\, dt = -\frac{d\,\text{arc}\, PA'M}{R_0}.$$

L'intégrale en question a donc pour valeur

$$-\frac{1}{4\pi R_0^2}\left[(\text{arc}\, PA'M)^2\right]_{t=t_0}^{t=t_0+T}.$$

On peut supposer que l'on prenne pour époque t_0 le moment où le point M part du point P dans la direction PA. On a alors

$$(\text{arc}\, PA'M)_{t=t_0} = 2\pi R_0,$$
$$(\text{arc}\, PA'M)_{t=t_0+T} = 0.$$

L'intégrale cherchée a donc pour valeur π,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{l'}{l'+l'}\, \Omega\, dt = \pi.$$

De même

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{m'}{m+m'}\, \Omega\, dt = \pi.$$

On a donc

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{T}\frac{\omega_0 - \omega_1}{L+L'}. \tag{14}$$

L'intensité moyenne du courant engendré est en raison inverse de la durée de révolution du conducteur tournant.

Si l'on renverse le sens du mouvement de ce conducteur, ω_0 et ω_1 changent de signe sans changer de grandeur. Donc

L'intensité moyenne du courant engendré change de signe sans changer de grandeur lorsqu'on renverse le sens de la rotation sans en modifier la vitesse.

Si l'on observe que l'on a

$$\omega_0 = 2\pi R_0 \Pi_0,$$
$$\omega_1 = 2\pi R_1 \Pi_1,$$
$$\Omega T = 2\pi,$$

on voit que la *force électromotrice moyenne,* qui donnerait naissance au courant $\mathfrak{J}$ dans une résistance $(L + L')$, aurait pour valeur

$$E = (R_0 \Pi_0 - R_1 \Pi_1)\Omega.$$

Elle est liée à la différence du niveau potentiel qui existerait entre les deux cercles BB′ et AA′ si la communication PQ n'existait pas, par la relation suivante, qui résulte de l'égalité (12),

$$\varepsilon(V - U) = E.$$

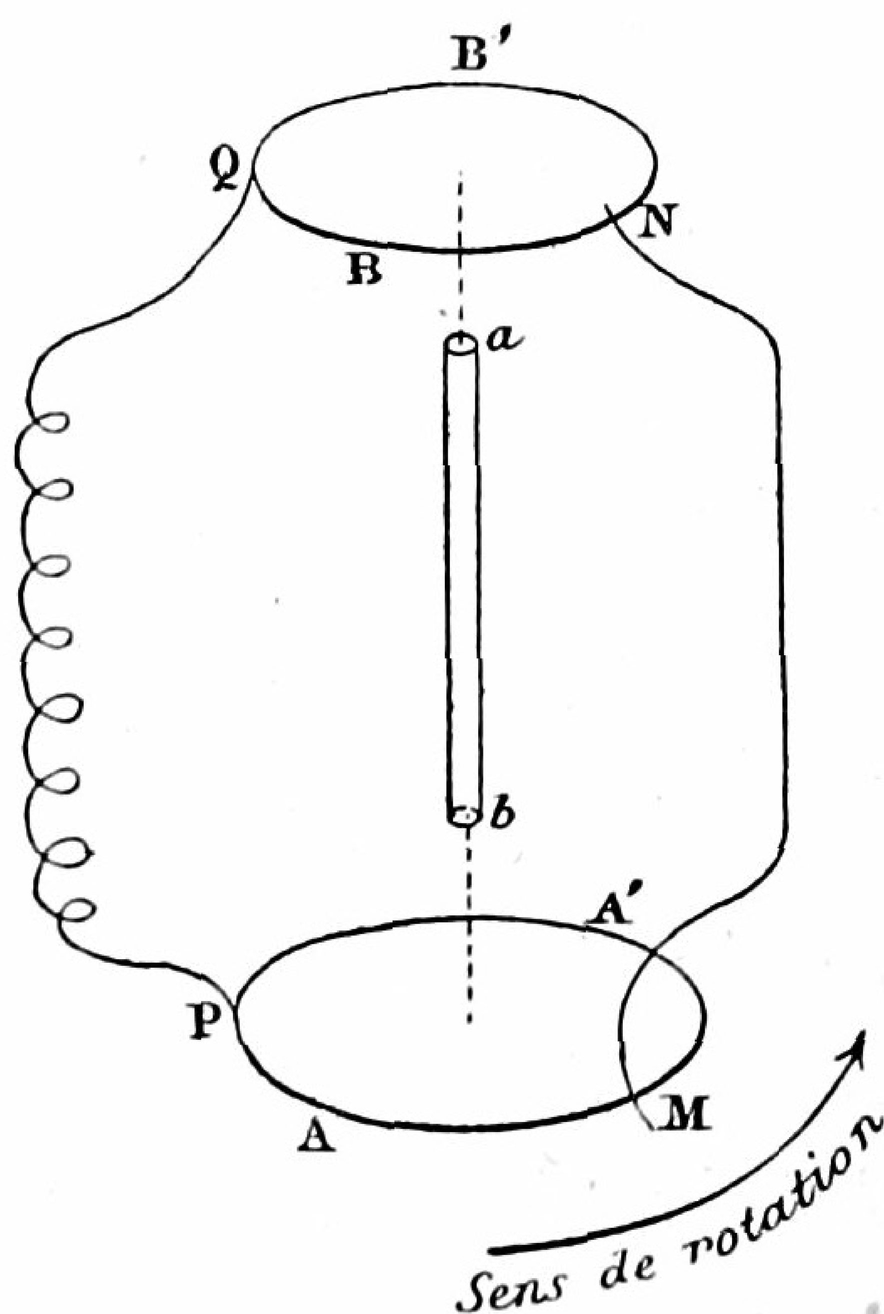
Nous allons faire usage de la formule (14) pour le cas particulier où le courant de révolution CC′ est un solénoïde limité ayant pour axe l'axe des deux cercles. Nous supposerons le pôle austral a du solénoïde ab tourné vers le haut. Il est facile de voir que, s'il était tourné vers le bas, tous les effets que nous allons décrire changeraient de sens sans changer de grandeur. Nous distinguerons trois cas :

1° *Le solénoïde ne perce le plan d'aucun des deux cercles* (*fig.* 38).

Calculons ω_0 et ω_1.

Supposons que le conducteur MN tourne de gauche à droite.

Fig. 38.



D'un point quelconque du solénoïde, on voit la face positive du cercle PAMA′ et la face négative du cercle QBNB′.

Soient Ψ_0 et Ψ_1 la *valeur absolue* des angles sous lesquels

d'un point du solénoïde on voit les cercles PAMA′ et QBNB′. Le potentiel électrodynamique du solénoïde sur le cercle PAMA′ aura pour valeur, d'après ce qui a été dit au Chapitre précédent,

$$\omega_0 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi[\Psi_{0a} - \Psi_{0b}],$$

Φ étant la puissance du solénoïde.

De même, le potentiel électrodynamique du solénoïde sur le cercle QBNB′ aura pour valeur

$$\omega_1 = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi[\Psi_{1a} - \Psi_{1b}].$$

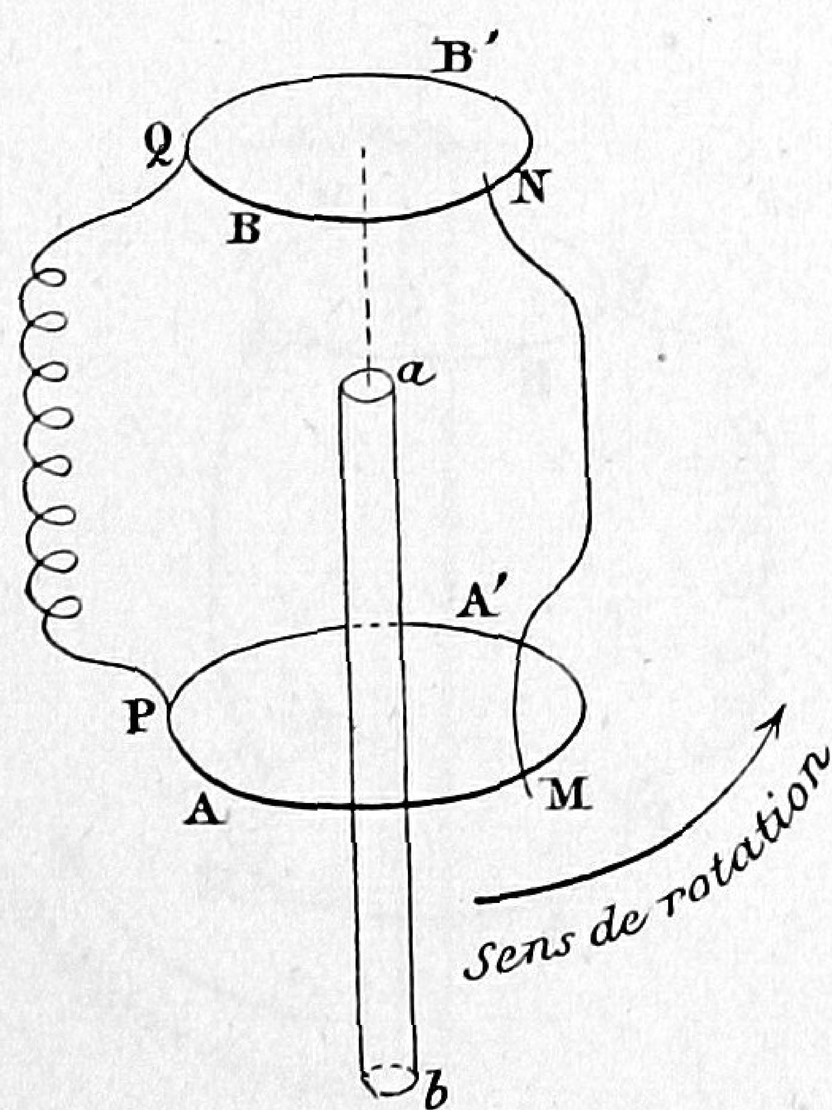
La formule (14) deviendra donc

$$(15) \qquad \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{1}{T} \frac{\Phi}{L+L'} [\Psi_{0a} + \Psi_{1a} - \Psi_{0b} - \Psi_{1b}].$$

Si les deux cercles sont très petits, les quatre quantités entre crochets seront très petites, et *l'intensité du courant induit sera sensiblement nulle.*

2° *Le solénoïde ab perce le plan de l'un des deux cercles,* par exemple du cercle inférieur (*fig.* 39).

Fig. 39.



La direction ba traverse alors une fois le plan de ce cercle en passant de la face négative à la face positive. On a

$$\omega_0 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi[\Psi_{0a} + \Psi_{0b} + 4\pi],$$

$$\omega_1 = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi[\Psi_{1a} + \Psi_{1b}],$$

et la formule (14) devient, dans ce cas,

$$(16) \qquad \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{1}{T} \frac{\Phi}{L + L'} [\Psi_{0a} + \Phi_{0b} + \Psi_{1a} + \Psi_{1b} + 4\pi].$$

Si les deux cercles sont très petits, elle devient

$$(17) \qquad \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{4\pi}{T} \frac{\Phi}{L + L'}.$$

Le courant marche du cercle inférieur au cercle supérieur dans le contact tournant :

Si la rotation a lieu de gauche à droite;

Si le pôle austral du solénoïde est dirigé vers le haut;

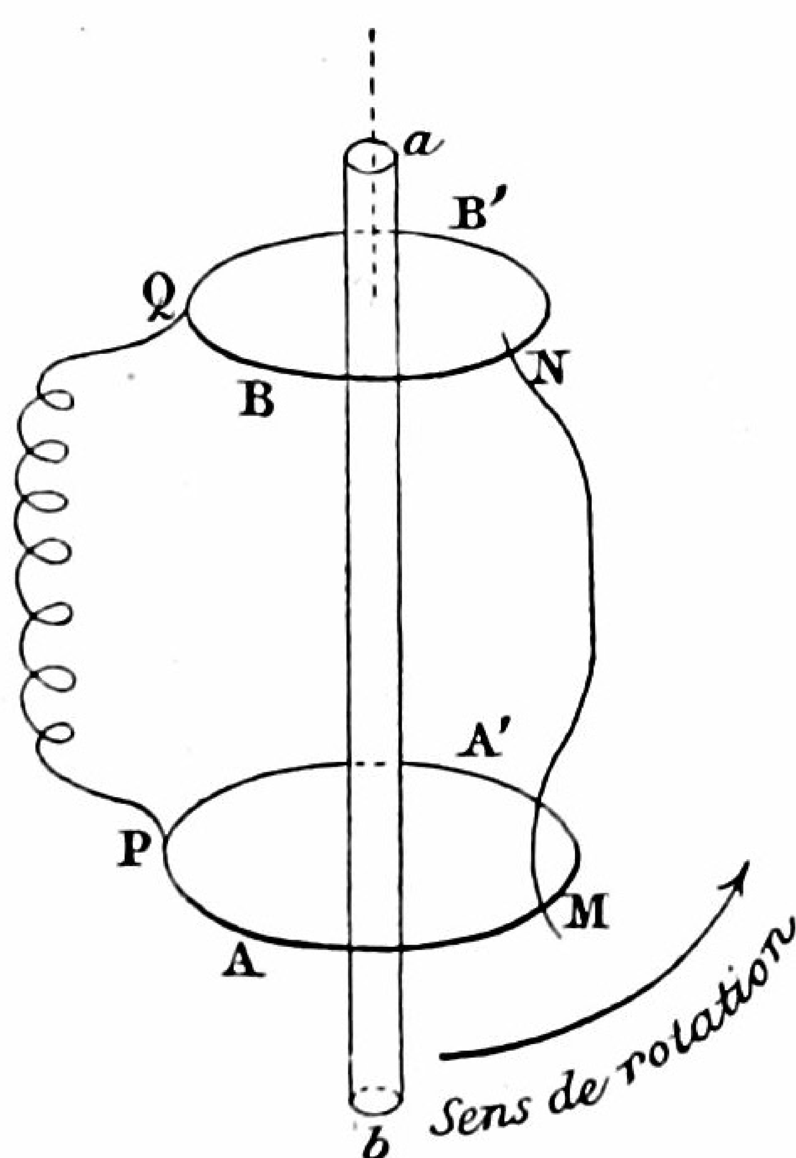
Si le solénoïde perce le plan du cercle inférieur.

En renversant une de ces conditions, on renverserait le sens du courant.

L'intensité du courant est proportionnelle à la puissance du solénoïde; elle est en raison inverse de la durée de révolution et de la résistance des conducteurs qui réunissent les deux cercles. Elle ne dépend point d'autres variables.

3° *Le solénoïde perce les plans des deux cercles* (*fig.* 40).

Fig. 40.



La direction ba traverse le plan de chaque cercle en passant de la face négative à la face positive. On a donc

$$\omega_0 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi [\Psi_{0a} + \Psi_{0b} + 4\pi],$$

$$\omega_1 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi [\Psi_{1a} + \Psi_{1b} + 4\pi],$$

et la formule (14) devient

$$(18) \qquad \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{1}{T} \frac{\Phi}{L + L'} [\Psi_{0a} + \Psi_{0b} - \Psi_{1a} - \Psi_{1b}].$$

Si les deux cercles sont très petits, l'intensité du courant induit est très petite.

On voit donc que, dans le cas où les deux cercles sont très petits, le courant d'induction n'a point de valeur notable à moins que l'un des pôles du solénoïde ne soit entre les deux cercles, et l'autre en dehors des deux cercles. De là le nom d'*induction unipolaire* donné par W. Weber à cette classe de phénomènes.

Lenz, W. Weber, M. F.-E. Neumann, M. Felici ont, à plusieurs reprises, vérifié expérimentalement l'exactitude des lois que nous venons d'établir.



APPENDICE AU LIVRE XIII.

COMPARAISON DE LA LOI ÉLÉMENTAIRE DE L'INDUCTION PROPOSÉE PAR M. VON HELMHOLTZ AVEC LES LOIS PROPOSÉES PAR D'AUTRES AUTEURS.

§ 1. — Énumération des diverses lois proposées pour l'induction électrodynamique.

Nous avons vu que, si $e\,ds\,ds'$ est la force électromotrice d'induction engendrée dans l'élément conducteur ds par l'élément de courant de longueur ds' et d'intensité J', on a

$$(1)\qquad e\,ds\,ds'\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left[\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)J'\,ds\,ds'\right].$$

Cette loi élémentaire de l'induction a été donnée explicitement par M. H. von Helmholtz en 1874 ([1]).

Mais d'autres lois de l'induction avaient été auparavant proposées par d'autres auteurs.

W. Weber ([2]), qui proposa, le premier, en 1846, une loi élémentaire de l'induction, était parvenu, en s'appuyant sur ses idées relatives à l'action mutuelle des particules électriques en mouvement, à la formule sui-

([1]) H. von Helmholtz, *Ueber die Theorie der Elektrodynamik*. Dritte Abhandlung : *Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern* (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*. Bd. LXXVIII, p. 273; 1874. *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 702).

([2]) W. Weber, *Elektrodynamische Maassbestimmungen;* 1e Heft : *Abhandlungen Leibnitzens Gesellschafts*. Leipzig, 1846. On trouvera un exposé précis et correct des idées de W. Weber dans F.-E. Neumann, *Vorlesungen über elektrische Ströme* (Teubner, 1884). L'exposé de Maxwell (*Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 557 de la traduction française) renferme de graves erreurs qui ont été reproduites dans Mascart et Joubert (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. I, p. 685), et dans Jamin et Bouty (*Cours de Physique*, t. IV, fasc. II, p. 455).

vante

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
e\,ds\,ds'\,dt = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left\{\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\frac{dJ'}{dt}\right.\\
&-\Big[[2\cos(v, ds') - 3\cos\theta'\cos(v, r)]v\\
&\left.+[2\cos(v', ds') - 3\cos\theta'\cos(v', r)]v'\Big]\frac{J'}{r^2}\cos\theta\right\}ds\,ds'\,dt,
\end{aligned}
\right.
$$

v étant la vitesse avec laquelle se meut l'élément ds, et v' la vitesse avec laquelle se meut l'élément ds'.

M. F.-E. Neumann s'est surtout occupé de la loi intégrale de l'induction exercée par un courant fermé et uniforme sur un conducteur fermé parcouru par un courant uniforme. Néanmoins, d'après M. Carl Neumann [1], la lecture attentive de certains passages [2] de ses deux Mémoires sur l'induction, écrits en 1845 et 1847, montre que F.-E. Neumann adoptait pour loi élémentaire de l'induction la loi exprimée par la formule suivante

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
e\,ds\,ds'\,dt = &-J'R\frac{dr}{dt}ds\,ds'\,dt\\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{dJ'}{dt}\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)ds\,ds'\,dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans cette formule, R désigne la quantité suivante

$$
(4)\qquad R = \frac{\mathfrak{A}^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta' - \cos\omega\right),
$$

en sorte que, comme nous le verrons bientôt, $R\,ds\,ds'$ désigne la force répulsive qui s'exerce, d'après la loi d'Ampère, entre les deux éléments ds et ds', chacun d'eux étant parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité. Quant au facteur λ, M. F.-E. Neumann hésitait pour lui entre les valeurs $+1$ et -1.

M. Carl Neumann [3] a proposé, de son côté, une loi élémentaire de

---

[1] CARL NEUMANN, *Die elektrischen Kräfte. Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff, entwickelten mathematischen Theorien.* Erster Theil : *Die durch die Arbeiten von A. Ampère und F. Neumann angebahnte Richtung,* p. 219-222. Leipzig, 1873.

[2] F.-E. NEUMANN, *Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften,* für 1845; Berlin, 1846 (fin du § 1). — *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirten elektrischer Ströme.* Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 9 août 1847. Berlin, 1848 (les trois premières pages du § 4).

[3] C. NEUMANN, *Die elektrischen Kräfte,* p. 218. — *Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze* (*Abhandlungen der Königlichen Sächsischen Akademie der Wissenschaften. Math. Phys. Classe,* Bd. X).

l'induction, représentée par la formule

$$(5)\quad \begin{cases} e\,ds\,ds'\,dt = -\,J'R\dfrac{dr}{dt}\,ds\,ds'\,dt + \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial s'}\left(\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{dr}{dt}\right)J'\,ds\,ds'\,dt \\ \qquad -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\dfrac{dJ'}{dt}\,ds\,ds'\,dt, \end{cases}$$

formule qui peut encore s'écrire

$$(5\ bis)\quad \begin{cases} e\,ds\,ds'\,dt = \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\dfrac{\cos\omega - \cos\theta\cos\theta'}{r^2}\dfrac{dr}{dt}\,ds\,ds'\,dt \\ \qquad -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{d}{dt}(J'\cos\theta')\,ds\,ds'\,dt. \end{cases}$$

M. H. von Helmholtz ([1]) a montré qu'en supprimant une des hypothèses sur lesquelles repose la déduction de M. Carl Neumann, on trouvait la forme plus générale

$$(6)\quad \begin{cases} e\,ds\,ds'\,dt = \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\dfrac{\cos\omega - \cos\theta\cos\theta'}{r^2}\dfrac{dr}{dt}\,ds\,ds'\,dt \\ \qquad -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{d}{dt}(J'\cos\theta'\,ds')\,ds\,dt \\ \qquad +\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{1+\lambda}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{J'}{r}(\cos\theta\cos\theta' - \cos\omega)\,ds\,ds'\right]dt. \end{cases}$$

Dans le cas où l'on fait $\lambda = -1$, cette formule devient

$$(7)\quad \begin{cases} e\,ds\,ds'\,dt = \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\dfrac{\cos\omega - \cos\theta\cos\theta'}{r^2}\dfrac{dr}{dt}\,ds\,ds'\,dt \\ \qquad -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{d}{dt}(J'\cos\theta'\,ds')\,ds\,dt, \end{cases}$$

qui ne diffère de la forme (5 *bis*) adoptée par M. Carl Neumann que par le terme

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}J'\frac{d\,ds'}{dt}\,ds\,dt.$$

R. Clausius ([2]), à son tour, a donné une loi élémentaire de l'induction,

---

([1]) H. von Helmholtz, *loc. cit.*, § 20 : *Das Inductionsgesetz unter Voraussetzung ausschliesslicher Gültigkeit des Ampèreschen Gezetzes,* équation (86).

([2]) R. Clausius, *Die mechanische Wärmetheorie,* 2e édition, Bd. II. *Mechanische Behandlung der Electricität,* chap. X : *Anwendung des neuen elektrodynamischen Grundgesetzes auf die zwischen linearen Strömen und Leitern stattfindenden ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte,* p. 298.

déduite de ses idées sur la loi fondamentale de l'Électrodynamique, et représentée par la formule suivante

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} e\,ds\,ds'\,dt = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,ds\,ds'\,dt\,\frac{d}{dt}\left(\mathrm{J}'\,\frac{\cos\omega}{r}\right)\\ &+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\mathrm{J}'\left[\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{v\cos(v,ds')}{r}-\frac{\partial}{\partial s'}\,\frac{v'\cos(v,ds)}{r}\right]ds\,ds'\,dt\\ &+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\mu\,\mathrm{J}\,\frac{\partial}{\partial s'}\,\frac{\cos\omega}{r}\,ds\,ds'.\end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, v et v' sont les vitesses des éléments ds et ds'; μ est une constante dont la valeur est inconnue. On remarquera que la force électromotrice donnée par la formule de Clausius à la différence des forces électromotrices proposées par d'autres auteurs ne dépend pas seulement du changement de position relative des deux éléments ds et ds' l'un par rapport à l'autre, mais de leur mouvement *absolu* dans l'espace.

Sans examiner ici les théories qui ont fourni ces formes multiples de la loi d'induction, comparons entre elles les conséquences de ces diverses formules.

§ 2. — Application de ces diverses lois à l'induction par seule variation d'intensité.

Examinons d'abord le cas où un courant inducteur est maintenu immobile en présence d'un élément induit également immobile. Nous trouvons, d'après les diverses lois indiquées, les valeurs suivantes pour la force électromotrice induite dans cet élément :

1° *Lois d'Helmholtz* [formule (1)]; *de F.-E. Neumann* [formule (3)]; *de Carl Neumann-Helmholtz* [formule (6)] :

$$(9)\qquad \mathrm{E}\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,ds\int\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega+\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\frac{d\mathrm{J}'}{dt}\,ds'.$$

2° *Lois de Weber* [formule (2)]; *de Carl Neumann* [formule (5)] :

$$(10)\qquad \mathrm{E}\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,ds\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,\frac{d\mathrm{J}'}{dt}\,ds'.$$

3° *Loi de Clausius* [formule (8)] :

$$(11)\qquad \mathrm{E}\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,ds\int\frac{\cos\omega}{r}\,\frac{d\mathrm{J}'}{dt}\,ds'+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\mu\,ds\int\mathrm{J}'\,\frac{\partial}{\partial s'}\,\frac{\cos\omega}{r}\,ds'.$$

Commençons par étudier cette dernière. Supposons que l'inducteur présente au point P un point anguleux (*fig.* 41). Lorsqu'on passe par ce

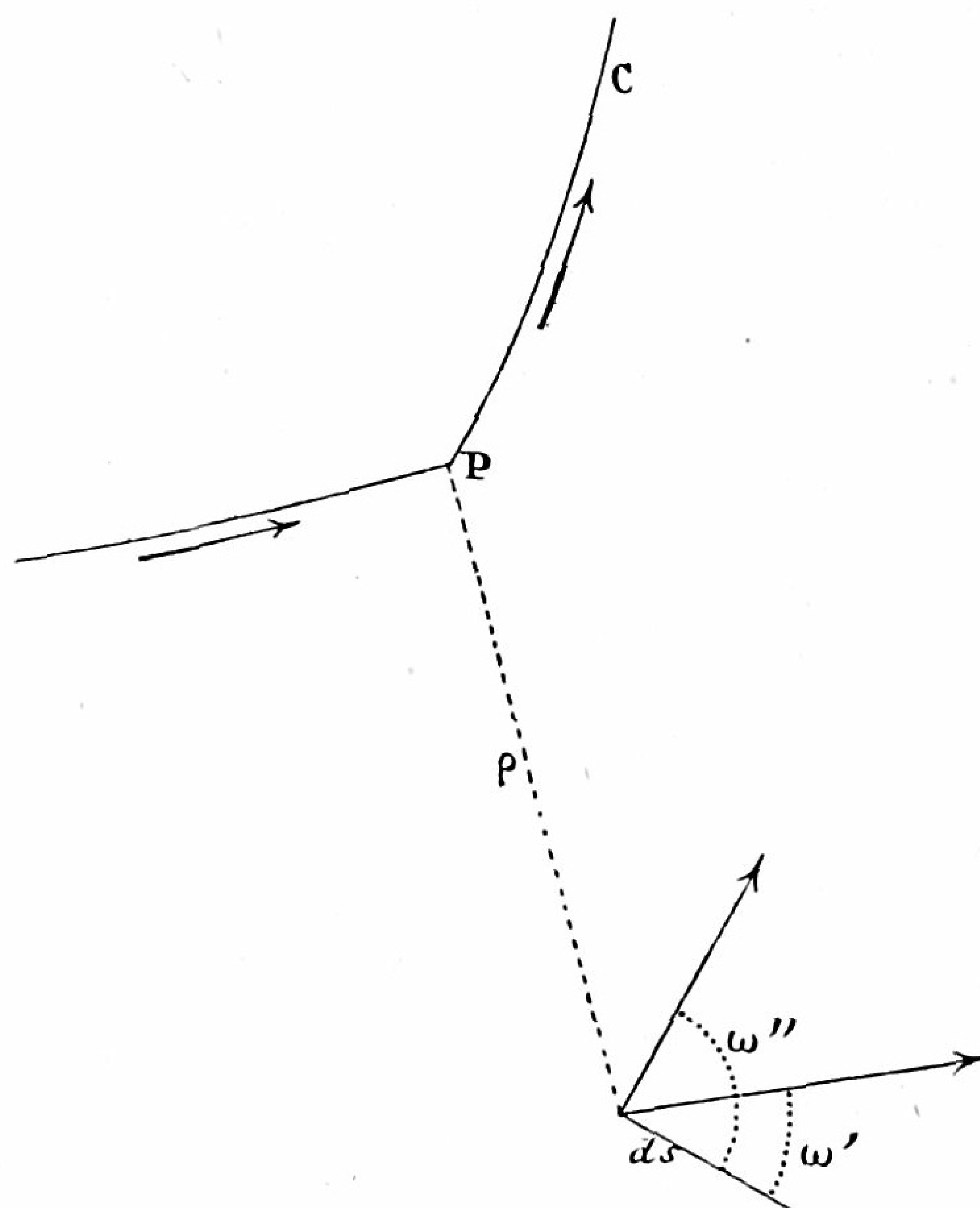
point, l'angle ω saute de la valeur ω' à la valeur ω''. Nous aurons alors

$$\int J' \frac{\partial}{\partial s'} \frac{\cos\omega}{r} ds' = \left(J' \frac{\cos\omega}{r}\right)_0^1 + J'_p \frac{\cos\omega'' - \cos\omega'}{\rho} - \int \frac{\cos\omega}{r} \frac{dJ'}{ds} ds',$$

ρ étant la distance du point P à l'élément ds.

Ou bien le conducteur est fermé; ou bien, s'il est ouvert, l'intensité du

Fig. 41.



courant est nulle aux deux extrémités; on a donc

$$\left(J' \frac{\cos\omega}{r}\right)_0^1 = 0$$

et la formule (11) peut s'écrire

$$E\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} ds \int \frac{\cos\omega}{r} \frac{dJ'}{dt} ds'$$
$$- \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mu\, ds \int \frac{\cos\omega}{r} \frac{dJ'}{ds'} ds' + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mu\, ds\, J'_p \frac{\cos\omega'' - \cos\omega'}{\rho}.$$

Supposons que le courant inducteur soit uniforme, cas auquel

$$\frac{dJ'}{ds'} = 0,$$

et calculons la force électromotrice intégrale induite dans un conducteur fermé. Cette force aura pour valeur

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \int\int \frac{\cos\omega}{r} \frac{dJ'}{dt} ds\, ds' + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mu J' \int \frac{\cos\omega'' - \cos\omega'}{\rho} ds,$$

tandis qu'elle doit avoir pour valeur

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\int \frac{\cos\omega}{r}\frac{dJ'}{dt}\,ds\,ds'.$$

La loi de Clausius n'est donc acceptable que si l'on a

$$\mu = 0.$$

La formule (11) devient alors

$$\text{(12)} \qquad E\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,ds\int \frac{\cos\omega}{r}\frac{dJ'}{dt}\,ds'.$$

Nous remarquerons maintenant que la formule (9) renferme comme cas particuliers les formules (10) et (12). Il suffit, pour en déduire la formule (10), de donner à λ la valeur -1, et pour en déduire la formule (12), de donner à λ la valeur 1.

Si nous nous souvenons [Introduction, Chap. I, égalité (6)] que

$$\frac{\cos\omega}{r} - \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r} = -\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

nous verrons que les trois expressions (9), (10) et (12) de $E\,ds$ deviennent équivalentes dans le cas particulier où l'inducteur est un courant fermé et uniforme. Toutes les lois proposées conduisent donc au même résultat pour l'induction entre courants fermés, uniformes et immobiles.

§ 3. — Comparaison de ces diverses lois élémentaires avec la loi intégrale de l'induction.

Nous allons maintenant discuter ces lois pour le cas où il y a mouvement des conducteurs. Auparavant, nous commencerons par introduire, dans la loi de Clausius donnée par la formule (8), l'hypothèse $\mu = 0$, sans laquelle nous savons qu'elle serait inacceptable. La formule qui exprime cette loi deviendra alors

$$\text{(13)} \quad \begin{cases} e\,ds\,ds'\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\,ds\,ds'\,dt\,\dfrac{d}{dt}\left(J'\dfrac{\cos\omega}{r}\right) \\ \quad + \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\left[\dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{v\cos(v, ds')}{r} - \dfrac{\partial}{\partial s'}\dfrac{v'\cos(v', ds)}{r}\right]ds\,ds'\,dt. \end{cases}$$

Supposons l'inducteur fermé et uniforme, l'induit fermé, et cherchons dans quelles conditions la force électromotrice intégrale d'induction donnée par les formules (2), (3), (5), (6), (13) aura la valeur

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} \mathcal{E} = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{d}{dt}\left(J'\displaystyle\int\int\dfrac{\cos\omega}{r}\,ds\,ds'\right) \\ \quad = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{d}{dt}\left(J'\displaystyle\int\int\dfrac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'\right), \end{cases}$$

admise comme certaine depuis les travaux de M. F.-E. Neumann et de W. Weber.

1° *Loi de Clausius.*

Soit P un point où, sur l'induit, existe une ligne de glissement. En ce point, la vitesse v varie d'une manière discontinue; la grandeur géométrique qui la représente passe brusquement de v_1 à v_2; l'angle ω varie de ω_1 à ω_2. En ce point s'introduisent des éléments nouveaux Δs_1, Δs_2. On a

$$\int \frac{\partial}{\partial s} \frac{v \cos(v, ds')}{r} ds = \frac{v_2 \cos(v_2, ds') - v_1 \cos(v_1, ds')}{r},$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(J' \frac{\cos\omega}{r}\right) ds = \frac{d}{dt}\int J' \frac{\cos\omega}{r} ds - \int J' \frac{\cos\omega}{r} \frac{d\frac{ds}{dt}}{ds} ds$$
$$- J' \frac{1}{r}\left(\cos\omega_1 \frac{\Delta s_1}{dt} + \cos\omega_2 \frac{\Delta s_2}{dt}\right).$$

Soit de même P' un point où l'inducteur présente une ligne de glissement. Nous aurons

$$\int \frac{\partial}{\partial s'} \frac{v' \cos(v', ds)}{r} ds' = \frac{v'_2 \cos(v'_2, ds) - v'_1 \cos(v'_1, ds)}{r}$$

et

$$\int ds' \frac{d}{dt}\int J' \frac{\cos\omega}{r} ds = \frac{d}{dt}\int\int J' \frac{\cos\omega}{r} ds\, ds' - \int\int J' \frac{\cos\omega}{r} \frac{d\frac{ds'}{dt}}{ds'} ds\, ds'$$
$$- J'\left(\frac{\Delta s'_1}{dt}\int \frac{\cos\omega'_1}{r} ds + \frac{\Delta s'_2}{dt}\int \frac{\cos\omega_2}{r} ds\right).$$

La formule (13) donne donc

$$\mathcal{E}\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\delta\left(J'\int\int \frac{\cos\omega}{r} ds\, ds'\right)$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J' \int\int \frac{\cos\omega}{r}\left(\frac{d\,\delta s}{ds} + \frac{d\,\delta s'}{ds'}\right) ds\, ds'$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J'\left(\Delta s_1 \int \frac{\cos\omega_1}{r} ds' + \Delta s_2 \int \frac{\cos\omega_2}{r} ds'\right.$$
$$\left. + \Delta s'_1 \int \frac{\cos\omega'_1}{r} ds + \Delta s'_2 \int \frac{\cos\omega'_2}{r} ds\right)$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J'\left[v_2\, dt \int \frac{\cos(v_2, ds')}{r} ds' - v_1\, dt \int \frac{\cos(v_1, ds')}{r} ds'\right]$$
$$- \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J'\left[v'_2\, dt \int \frac{\cos(v'_2, ds)}{r} ds - v'_1\, dt \int \frac{\cos(v'_1, ds)}{r} ds\right].$$

Ce résultat diffère notablement de celui qui nous est présenté par l'égalité (14). Pour que ces résultats concordent, il faut et il suffit :

Que l'inducteur et l'induit ne présentent pas de lignes de glissement, ce qui fait disparaître les trois derniers termes du second membre;

Que l'inducteur et l'induit soient inextensibles, ce qui fait disparaître le deuxième terme du second membre.

Donc, *pour que la loi de Clausius concorde avec la loi de l'induction entre courants fermés et uniformes, il faut et il suffit que l'inducteur et l'induit soient formés de fils inextensibles et dépourvus de contacts glissants.*

2° *Loi de Weber.*

Soient dl et dl' les éléments de chemin parcourus, pendant le temps dt, par un point de chacun des éléments ds et ds'. L'égalité (2) pourra s'écrire

$$\begin{aligned} e\,ds\,ds'\,dt = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Bigg\{ & \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{dJ'}{dt} \\ & + \left[\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial l} - \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial l}\right)\frac{dl}{dt}\right. \\ & + \left.\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial l'} - \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{dl'}{dt}\right]\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}J'\Bigg\}\,ds\,ds'\,dt. \end{aligned}$$

Nous aurons alors

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E} = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{dJ'}{dt}\int_s\int_{s'}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds' \\ & + \mathfrak{A}^2 J'\int_s\int_{s'}\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial l} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{dl}{dt}\,ds\,ds' \\ & + \mathfrak{A}^2 J'\int_s\int_{s'}\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial l'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{dl'}{dt}\,ds\,ds'. \end{aligned}\right.$$

Nous allons transformer cette expression.

Nous marquerons la position d'un point sur l'induit non par l'arc s qui lui correspond à l'instant t, mais par l'arc σ qui lui correspondrait à un instant arbitrairement choisi t_0; nous marquerons de même la position d'un point sur l'inducteur non par l'arc s' qui lui correspond à l'instant t, mais par l'arc σ' qui lui correspondrait à l'instant t_0.

Soient $d\sigma$, $d\sigma'$ les longueurs des éléments ds, ds' à l'instant t_0. Nous pourrons écrire

$$(15\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E} = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{dJ'}{dt}\int_s\int_{s'}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds' \\ & + \mathfrak{A}^2 J'\int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma'\partial l} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial \sigma'}\frac{\partial r}{\partial l}\right)\frac{dl}{dt}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\,d\sigma\,d\sigma' \\ & + \mathfrak{A}^2 J'\int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial \sigma'\partial l'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial \sigma'}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{dl'}{dt}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\,d\sigma\,d\sigma'. \end{aligned}\right.$$

Considérons la quantité

$$\int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma' \partial l} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{dl}{dt}\, d\sigma\, d\sigma'.$$

On peut l'écrire

$$\int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial \sigma'}\right) \frac{dl}{dt}\, d\sigma\, d\sigma' - \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial r}{\partial \sigma'} \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\right) \frac{dl}{dt}\, d\sigma\, d\sigma'.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial l} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial l}.$$

On a donc

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma' \partial l} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial r}{\partial \sigma'} \frac{\partial r}{\partial l}\right) \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{dl}{dt}\, d\sigma\, d\sigma' \\ &= \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial \sigma'}\right) \frac{dl}{dt}\, d\sigma\, d\sigma' \\ &\quad - \int_\sigma \int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial l} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial l}\right) \frac{\partial r}{\partial \sigma'} \frac{dl}{dt}\, d\sigma\, d\sigma'. \end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant la quantité

$$\int_\sigma \int_\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial l} \frac{\partial r}{\partial \sigma'} \frac{dl}{dt}\, d\sigma\, d\sigma'.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \sigma'} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \sigma'} \frac{dl}{dt}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \sigma \partial \sigma'} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial \sigma'}\right) \frac{\partial r}{\partial l} \frac{dl}{dt} \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma'} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial t}. \end{aligned}$$

La quantité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \sigma'} \frac{dl}{dt}$$

varie d'une manière continue le long du circuit s, sauf aux points où ce conducteur présente des contacts glissants. Supposons qu'il présente en P un contact glissant. Les quantités $\frac{\partial r}{\partial l}$, $\frac{dl}{dt}$ y passent des valeurs $\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_0$, $\left(\frac{dl}{dt}\right)_0$ aux valeurs $\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_1$, $\left(\frac{dl}{dt}\right)_1$.

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
&\int_\sigma\int_{\sigma'} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial l}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\
&= -\left(\frac{dl}{dt}\right)_1 \int_{s'} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_1 \frac{\partial r}{\partial s'}\,ds' + \left(\frac{dl}{dt}\right)_0 \int_{s'} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_0 \frac{\partial r}{\partial s'}\,ds' \\
&\quad - \int_\sigma\int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right)\frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\
&\quad - \int_\sigma\int_{\sigma'} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma\,\partial t}\,d\sigma\,d\sigma'
\end{aligned}$$

et

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_\sigma\int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial l} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\
&= -\left(\frac{dl}{dt}\right)_1 \int_{s'} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_1 \frac{\partial r}{\partial s'}\,ds' + \left(\frac{dl}{dt}\right)_0 \int_{s'} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_0 \frac{\partial r}{\partial s'}\,ds' \\
&\quad - \int_\sigma\int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right)\frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\
&\quad - \int_\sigma\int_{\sigma'} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma\,\partial t}\,d\sigma\,d\sigma'.
\end{aligned}\right.$$

Considérons enfin la quantité

$$\int_\sigma\int_{\sigma'} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma'.$$

On peut écrire

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt} = \frac{\partial}{\partial\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt}\right) - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma'\,\partial l} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{dl}{dt}.$$

La quantité

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt}$$

variant d'une manière continue le long du contour s', on a

$$\begin{aligned}
&\int_\sigma\int_{\sigma'} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\
&= -\int_\sigma\int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma'\,\partial l} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l}\right)\frac{dl}{dt}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,d\sigma\,d\sigma'
\end{aligned}$$

et

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_\sigma\int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right)\frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\
&= -\int_\sigma\int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma'\,\partial l} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l}\right)\frac{dl}{dt}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,d\sigma\,d\sigma'.
\end{aligned}\right.$$

Les égalités (16), (17), (18) donnent

$$(19)\quad \begin{cases} 2\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma'\partial l} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\ = \int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right)\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' + \left(\frac{dl}{dt}\right)_1\int_{s'}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_1\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds' \\ -\left(\frac{dl}{dt}\right)_0\int_{s'}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_0\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds' - \int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial^2 l}{\partial\sigma\,\partial t}\,d\sigma\,d\sigma'. \end{cases}$$

Nous avons de même

$$(16\ bis)\quad \begin{cases} \int_\sigma\int_{\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma'\partial l'} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\ = \int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right)\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\ -\int_\sigma\int_{\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial l'} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma', \end{cases}$$

$$(17\ bis)\quad \begin{cases} \int_\sigma\int_{\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial l'} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\ = -\int_\sigma\int_{\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right)\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma'. \end{cases}$$

Soit P′ un point où l'inducteur présente un contact glissant. En ce point, $\frac{\partial r}{\partial l'}$ et $\frac{dl'}{dt}$ passent des valeurs $\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)_0$ et $\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0$ aux valeurs $\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)_1$ et $\left(\frac{dl'}{dt}\right)_1$. Si donc on remarque que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{dl'}{dt} = \frac{\partial}{\partial\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{dl'}{dt}\right) - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma'\partial l'} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{dl'}{dt} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{\partial^2 l'}{\partial\sigma'\partial t},$$

on trouve l'égalité

$$(18\ bis)\quad \begin{cases} \int_\sigma\int_{\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right)\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\ = -\left(\frac{dl'}{dt}\right)_1\int_s\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)_1 ds + \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0\int_s\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)_0 ds \\ -\int_\sigma\int_{\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma'\partial l'} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\ -\int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{\partial^2 l'}{\partial\sigma'\partial t}\,d\sigma\,d\sigma'. \end{cases}$$

Les égalités (16 *bis*), (17 *bis*), (18 *bis*) donnent

$$(19\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &2\int_\sigma\int_{\sigma'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial\sigma'}-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\ &=\int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right)\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\ &+\left(\frac{dl'}{dt}\right)_1\int_s\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)_1 ds-\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0\int_s\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)_0 ds \\ &+\int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{\partial^2 l'}{\partial\sigma'\,\partial t}\,d\sigma\,d\sigma'. \end{aligned}\right.$$

Considérons le contact glissant P de l'induit (*fig.* 42). Il est en P à l'instant t. A l'instant $(t+dt)$, ce contact glissant est en Π. Les deux points

Fig. 42.

du conducteur qui étaient en contact à l'instant t sont, à l'instant $(t+dt)$, en P_0 et P_1. On a

$$PP_0 = dl_0,\qquad PP_1 = dl_1,\qquad P_0\Pi = \Delta s_0,\qquad \Pi P_1 = \Delta s_1.$$

Exprimons que les deux contours $PP_0\Pi$, $PP_1\Pi$ ont même projection sur la droite r. Nous aurons

$$dt\left(\frac{dl}{dt}\right)_0\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_0+\Delta s_0\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0 = dt\left(\frac{dl}{dt}\right)_1\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_1-\Delta s_1\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_1$$

et, par conséquent,

$$(20)\quad \left(\frac{dl}{dt}\right)_0\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_0-\left(\frac{dl}{dt}\right)_1\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)_1=\left[\frac{\Delta s_0}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0+\frac{\Delta s_1}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_1\right].$$

De même

$$(20\,bis)\quad \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)_0-\left(\frac{dl'}{dt}\right)_1\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)_1=\left[\frac{\Delta s'_0}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_0+\frac{\Delta s'_1}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_1\right].$$

En vertu des égalités (19), (19 *bis*), (20), (20 *bis*), l'égalité (15 *bis*) devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Bigg[&\frac{dJ'}{dt}\int_s\int_{s'}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds' \\
&+J'\int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial \sigma'}\right)\frac{dl}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\
&+J'\int_\sigma\int_{\sigma'}\frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial \sigma'}\right)\frac{dl'}{dt}\,d\sigma\,d\sigma' \\
&+J'\frac{\Delta s_0}{dt}\int_{s'}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds' \\
&+J'\frac{\Delta s_1}{dt}\int_{s'}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_0\frac{\partial r}{\partial s}\,ds \\
&+J'\frac{\Delta s'_0}{dt}\int_{s}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_0\frac{\partial r}{\partial s}\,ds \\
&+J'\frac{\Delta s'_1}{dt}\int_{s}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_1\frac{\partial r}{\partial s}\,ds\Bigg] \\
+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\int_s\int_{s'}&\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{\partial^2 l'}{\partial s'\,\partial t}+\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial^2 l}{\partial s\,\partial t}\right)ds\,ds'.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que cette égalité peut encore s'écrire

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{E} = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left[J'\int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'\right] \\
&+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\int_s\int_{s'}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{\partial^2 l'}{\partial s'\,\partial t}+\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial^2 l}{\partial s\,\partial t}\right)ds\,ds'.
\end{aligned}\right.$$

De cette égalité, il résulte que *la loi de Weber ne concorde pas, en général, lorsque l'inducteur et l'induit sont mobiles, avec la loi de F.-E. Neumann.*

3° *Loi de F.-E. Neumann.* — D'après la formule (3) on a

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{E} = &-J'\int\int \mathrm{R}\frac{dr}{dt}\,ds\,ds' \\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{dJ'}{dt}\int\int\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega+\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)ds\,ds'.
\end{aligned}\right.$$

D'après l'égalité (4)

$$\mathrm{R} = \frac{\mathfrak{A}^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'-\cos\omega\right).$$

Or on a [Introduction, Chap. I, égalités (5) et (7)]

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s},\qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\cos\omega = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}+r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right).$$

On voit donc aisément que l'on peut écrire

$$\mathrm{R} = 2\mathfrak{A}^2 \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 r^{\frac{1}{2}}}{\partial s\, \partial s'},$$

ou encore

$$\mathrm{R} = 4\mathfrak{A}^2 \frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dr} \frac{\partial^2 r^{\frac{1}{2}}}{\partial s\, \partial s'},$$

Étudions la quantité

$$(23) \qquad \int_s \int_{s'} \mathrm{R} \frac{dr}{dt}\, ds\, ds' = 4\mathfrak{A}^2 \int_s \int_{s'} \frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dr} \frac{\partial^2 r^{\frac{1}{2}}}{\partial s\, \partial s'} \frac{dr}{dt}\, ds\, ds',$$

qui peut encore s'écrire

$$(23\, bis) \qquad 4\mathfrak{A}^2 \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial^2 r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma\, \partial \sigma'} \frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt}\, d\sigma\, d\sigma'.$$

On a identiquement

$$2 \frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt} \frac{\partial^2 r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma\, \partial \sigma'} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt} \frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma'}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma'}\left(\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt} \frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} \frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma'}\right).$$

Nous avons donc, d'après les égalités (23) et (23 *bis*)

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_s \int_{s'} \mathrm{R} \frac{dr}{dt}\, d\sigma\, d\sigma' = {} & 2\mathfrak{A}^2 \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt} \frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma'}\right) d\sigma\, d\sigma' \\ & + 2\mathfrak{A}^2 \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial \sigma'}\left(\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt} \frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma}\right) d\sigma\, d\sigma' \\ & - 2\mathfrak{A}^2 \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} \frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma'}\right) d\sigma\, d\sigma'. \end{aligned} \right.$$

Mais on a

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial \sigma'}\left(\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt} \frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma}\right) ds\, ds' = {} & -\frac{1}{4} \int_s \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s'} \left(\frac{dr}{dt}\right)_1 ds' \\ & + \frac{1}{4} \int_{s'} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s'} \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 ds' \end{aligned} \right.$$

et

$$(25\, bis) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial \sigma'}\left(\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt} \frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma}\right) ds\, ds' \\ & = -\frac{1}{4} \int_s \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{dr}{dt}\right)_1 ds + \frac{1}{4} \int_s \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 ds. \end{aligned} \right.$$

Soit $r + \frac{d\rho}{dt}\,dt$ la distance du point Π à l'élément ds'. On aura, sur l'induit

$$\frac{d\rho}{dt}\,dt = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 dt + \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0 \Delta s_0$$

et aussi

$$\frac{d\rho}{dt}\,dt = \left(\frac{dr}{dt}\right)_1 dt - \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_1 \Delta s_1.$$

Donc

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = \left[\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_1 \Delta s_1 + \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0 \Delta s_0\right].$$

De même, sur l'inducteur

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = \left[\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_1 \Delta s'_1 + \left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_0 \Delta s'_0\right].$$

Les égalités (25) et (25 *bis*) deviennent donc

$$(26)\quad \begin{cases} -\int_\sigma\int_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt}\frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial\sigma'}\right) d\sigma\,d\sigma' \\ = \frac{\Delta s_0}{4\,dt}\int_{s'} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0 ds' + \frac{\Delta s_1}{4\,dt}\int_{s'} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_1 ds'; \end{cases}$$

$$(26\,bis)\quad \begin{cases} -\int_\sigma\int_{\sigma'} \frac{\partial}{\partial\sigma'}\left(\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dt}\frac{\partial r^{\frac{1}{2}}}{\partial\sigma'}\right) d\sigma\,d\sigma' \\ = \frac{\Delta s'_0}{4\,dt}\int_{s} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_0 ds + \frac{\Delta s'_1}{4\,dt}\int_{s} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_1 ds. \end{cases}$$

En vertu des égalités (26) et (26 *bis*), l'égalité (24) devient

$$\begin{aligned} \int_s\int_{s'} \mathrm{R}\,\frac{dr}{dt}\,ds\,ds' = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Bigg[&\int_\sigma\int_{\sigma'} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial\sigma'}\right) d\sigma\,d\sigma' \\ &+ \frac{\Delta s_0}{dt}\int_{s'} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0 ds' + \frac{\Delta s_1}{dt}\int_{s'} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_1 ds' \\ &+ \frac{\Delta s'_0}{dt}\int_{s} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_0 ds + \frac{\Delta s'_1}{dt}\int_{s} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_1 ds\Bigg] \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(27)\qquad \int_s\int_{s'} \mathrm{R}\,\frac{dr}{dt}\,ds\,ds' = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\int_s\int_{s'} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds'.$$

En vertu de cette égalité (27), l'égalité (22), où l'on peut donner à λ une

valeur arbitraire, par exemple la valeur -1, devient

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{J}'\int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'\right).$$

La loi élémentaire de l'induction donnée par M. F.-E. Neumann conduit donc en toutes circonstances à la loi intégrale de l'induction entre courants fermés et uniformes donnée par le même auteur [1].

4° *Loi de M. Carl Neumann.* — D'après l'égalité (5), la loi de M. Carl Neumann donne

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d\mathrm{J}'}{dt}\int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' - \mathrm{J}'\int_s\int_{s'}\mathrm{R}\frac{dr}{dt}\,ds\,ds'$$
$$+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathrm{J}'\int_s\int_{s'}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\cos\theta}{r}\frac{dr}{dt}\right)ds\,ds',$$

ou bien, en vertu de la formule (27),

$$(28)\quad \begin{cases} \mathcal{E} = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\mathrm{J}'\displaystyle\int_s\int_{s'}\dfrac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'\right) \\ \qquad +\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathrm{J}'\displaystyle\int_s\int_{s'}\dfrac{\partial}{\partial s'}\left(\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{dr}{dt}\right)ds\,ds'. \end{cases}$$

La quantité

$$\frac{\cos\theta}{r}\frac{dr}{dt}$$

varie d'une manière continue le long du contour s', sauf aux points où ce contour présente des contacts glissants. Supposons que le contour s' présente en P′ un contact glissant où $\frac{dr}{dt}$ passe de la valeur $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ à la valeur $\left(\frac{dr}{dt}\right)_1$. Nous avons

$$\int_{s'}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\cos\theta}{r}\frac{dr}{dt}\right)ds' = \frac{\cos\theta}{r}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_1\right].$$

Mais nous savons que

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_1 = -(\cos\theta'_0\,\Delta s'_0 + \cos\theta'_1\,\Delta s'_1).$$

---

[1] C'est évidemment par erreur que M. C. Neumann (*Die elektrischen Kräfte*, p. 227) énonce cette proposition que la loi élémentaire de M. F.-E. Neumann ne concorde avec sa loi intégrale que dans le cas où l'inducteur ne présente aucun contact glissant.

La formule (28) devient donc

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E} = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left(J'\int\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'\right) \\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\left(\Delta s'_0\int_s\frac{\cos\theta'_0\cos\theta}{r}\,ds + \Delta s'_1\int_s\frac{\cos\theta'_1\cos\theta}{r}\,ds\right). \end{aligned} \right.$$

En comparant cette formule à la formule (14), on arrive au résultat suivant :

Pour que la loi élémentaire de l'induction donnée par M. Carl Neumann concorde avec la loi intégrale de l'induction entre courants fermés et uniformes donnée par M. F.-E. Neumann, il faut et il suffit que l'inducteur ne présente aucun contact glissant (¹).

5° *Loi de M. Carl Neumann, modifiée par M. H. von Helmholtz.* — La formule (6) donne

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E} = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{dJ'}{dt}\int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' - J'\int_s\int_{s'}R\frac{dr}{dt}\,ds\,ds' \\ &+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\int_s\int_{s'}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\cos\theta}{r}\frac{dr}{dt}\right)ds\,ds' \\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,\frac{\delta\,ds'}{dt} \\ &+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{d}{dt}\left(J'\int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta' - \cos\omega}{r}\,ds\,ds'\right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on observe que l'on a

$$\int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' = \int_s\int_{s'}\frac{\cos\omega}{r}\,ds\,ds',$$

et si l'on tient compte des égalités (28) et (29), l'égalité (30) donnera

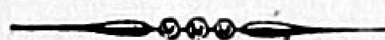
$$\begin{aligned} \mathcal{E} = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left(J'\int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'\right) \\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}J'\left(\frac{\Delta s'_0}{dt}\int_s\frac{\cos\theta'_0\cos\theta}{r}\,ds + \frac{\Delta s'_1}{dt}\int_s\frac{\cos\theta'_1\cos\theta}{r}\,ds + \int_s\int_{s'}\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,\frac{\delta\,ds'}{dt}\right). \end{aligned}$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (14), montre que, *pour que la loi de M. Carl Neumann modifiée par M. H. von Helmholtz concorde avec la loi intégrale de l'induction entre courants fermés et uniformes donnée par M. F.-E. Neumann, il faut et il suffit que l'inducteur soit formé de fils inextensibles sans contact glissant.*

(¹) M. Carl Neumann énonce par erreur (*Die elektrischen Kräfte*, p. 227) que la loi élémentaire de l'induction qu'il propose concorde, en toutes circonstances, avec la loi intégrale de l'induction entre courants fermés et uniformes donnée par M. F.-E. Neumann.

LIVRE XIV.

LES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES ENTRE COURANTS LINÉAIRES.



CHAPITRE PREMIER.

ÉNERGIE INTERNE D'UN SYSTÈME DE COURANTS LINÉAIRES.

§ 1. — Théorèmes fondamentaux sur l'énergie interne d'un système de courants linéaires.

Lorsqu'un système électrisé ne renferme pas de courants, l'expression de l'énergie interne de ce système est connue. Si l'on désigne cette énergie interne par U, on a

$$(1) \qquad EU = E\Upsilon + W + \sum \left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) q,$$

Υ étant l'énergie interne du système à l'état neutre;
W le potentiel électrostatique;
q une des charges électriques que porte le système;
Θ une quantité qui dépend de la nature du corps où se trouve la charge q et de sa température;
enfin le signe $\sum$ s'étendant à toutes les charges électriques du système.

Cette expression n'est plus démontrée pour le cas où le système renferme des courants. *Nous admettrons* toutefois *que la variation d'énergie interne d'un système qui renferme des courants est égale à la variation de la quantité* U *calculée par la*

formule précédente, toutes les fois que les conducteurs traversés par les courants demeurent immobiles et que le flux électrique qui traverse chaque élément de ces conducteurs demeure invariable de grandeur et de direction.

Cette hypothèse forme le point de départ de l'étude de la quantité de chaleur dégagée par un courant thermo-électrique ou hydro-électrique (t. I, p. 552).

Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante :

L'énergie interne d'un système qui renferme des courants a pour expression

$$EU = E\Upsilon + W + \sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q + EU', \tag{2}$$

la quantité U′ demeurant constante si les divers conducteurs qui composent le système demeurent immobiles et si les divers courants qui traversent ces conducteurs demeurent constants.

Tout d'abord, la manière même dont est introduite la quantité U′ montre que *la quantité* U′ *doit se réduire à zéro si tous les courants que renferme le système viennent à s'évanouir.*

La quantité U′, comme la quantité U, doit dépendre exclusivement des quantités qu'il est nécessaire et suffisant de connaître à tout instant pour que l'état du système soit lui-même connu à tout instant. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

La quantité U′ *ne dépend pas des dérivées par rapport au temps de coordonnées des divers points matériels du système, ni des dérivées par rapport au temps des intensités des courants qui traversent le système.*

Cette proposition entraîne une première remarque fondamentale sur la nature de la quantité U′.

Parmi les paramètres qui définissent le système se trouvent non seulement la forme et la position des conducteurs qui le composent, non seulement les intensités des courants qui traversent ces conducteurs, mais encore l'état physique et chimique des conducteurs et les charges d'électricité libre qu'ils portent. Or la proposition précédente entraîne cette conséquence :

La quantité U′ *dépend uniquement de la forme et de la position des conducteurs qui composent le système et des intensités des courants qui les traversent.*

Soient en effet $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les paramètres qui, joints à la forme et à la position des conducteurs, aux intensités des courants qui les traversent, achèvent de déterminer l'état du système, c'est-à-dire ses propriétés physiques et chimiques et la distribution qu'y affecte l'électricité libre. D'après ce que nous avons dit de la quantité U', cette quantité ne doit pas varier si les paramètres α, $\beta, \ldots, \lambda$ varient seuls, en sorte que l'on doit avoir

$$\frac{\partial U'}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial U'}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial U'}{\partial \lambda} d\lambda = 0,$$

quelles que soient les valeurs des variables dont dépend l'état du système, et quelles que soient les valeurs de $d\alpha, d\beta, \ldots, d\lambda$.

On doit donc avoir, quelles que soient les valeurs des variables dont dépend l'état du système

$$\frac{\partial U'}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial U'}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial U'}{\partial \lambda} = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Cette démonstration ne serait plus valable si la fonction U' dépendait des dérivées par rapport au temps des coordonnées et des intensités ; on ne pourrait plus dire, en effet, que l'égalité

$$\frac{\partial U'}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial U'}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial U'}{\partial \lambda} d\lambda = 0$$

a lieu quelles que soient les valeurs des variables dont dépend l'état du système ; elle aurait seulement lieu dans le cas où les dérivées par rapport au temps des coordonnées et des intensités seraient supposées égales à o.

Ce que nous venons de dire sur l'énergie interne d'un système électrisé et parcouru par des courants suffit pour assurer la légitimité des raisonnements renfermés dans les Chapitres suivants. C'est donc *à titre de pure curiosité* que nous allons pousser plus avant l'étude de la quantité U'.

§ 2. — Détermination plus complète de la quantité U'.

La détermination de la quantité U' ne saurait être poussée plus avant si l'on n'invoquait l'hypothèse suivante :

La quantité U′ *est de la forme*

$$U' = \sum \varphi \, ds \, ds',$$

ds et ds′ étant deux quelconques des éléments qui composent le système, et φ *une quantité qui dépend de la position mutuelle des deux éléments ds et ds′ et des intensités* J *et* J′ *des courants qui circulent dans ces deux éléments.*

Le signe $\sum$ *indique une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes que l'on peut former en prenant deux à deux les éléments des divers conducteurs du système.*

La première proposition que nous démontrerons est la suivante :

La quantité φ *est proportionnelle au produit* JJ′ *des intensités* J *et* J′ *des courants qui traversent les éléments ds et ds′.*

Soient en effet J_1 et J_2 deux quantités telles que

$$J = J_1 + J_2.$$

Regardons l'élément ds soit comme un élément unique, parcouru par un courant d'intensité J, soit comme l'ensemble de deux éléments juxtaposés, l'un, ds_1 parcouru par un courant d'intensité J_1, l'autre ds_2 parcouru par un courant d'intensité J_2. La valeur de U′ doit évidemment demeurer la même dans ces deux manières de voir. Or la substitution de la seconde manière de voir à la première a pour effet de substituer dans U′ l'ensemble des termes

$$ds \left[\sum \varphi(J_1, J') \, ds' + \sum \varphi(J_2, J') \, ds' \right],$$

au terme unique

$$ds \sum \varphi(J_1 + J_2, J') \, ds'.$$

On doit donc avoir, de quelque manière que soit composé le système

$$\sum [\varphi(J_1 + J_2, J') - \varphi(J_1, J') - \varphi(J_2, J')] \, ds' = 0.$$

Soient C_1 le conducteur dont fait partie l'élément ds ; $C_2, \ldots, C_n$ les conducteurs qui forment le reste du système. On aura

$$\sum \varphi(J, J') \, ds' = \int_{C_1} \varphi(J, J'_1) \, ds'_1 + \int_{C_2} \varphi(J, J'_2) \, ds'_2 + \ldots + \int_{C_n} \varphi(J, J'_n) \, ds'_n.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{C_1}[\varphi(J_1+J_2, J'_1)-\varphi(J_1, J'_1)-\varphi(J_2, J'_1)]\,ds'_1\\ &+\int_{C_2}[\varphi(J_1+J_2, J'_2)-\varphi(J_1, J'_2)-\varphi(J_2, J'_2)]\,ds'_2\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\int_{C_n}[\varphi(J_1+J_2, J'_n)-\varphi(J_1, J'_n)-\varphi(J_2, J'_n)]\,ds'_n=0. \end{aligned}\right.$$

Supposons qu'on laisse au circuit C_1 sa forme, mais que les circuits $C_2, \ldots, C_n$ soient infiniment éloignés. Le premier terme de la somme précédente conservera sa valeur. Les autres deviendront égaux à o. L'égalité précédente devant subsister, on aura sûrement

$$(4)\quad \int [\varphi(J_1+J_2, J'_1)-\varphi(J_1, J'_2)-\varphi(J_2, J'_2)]\,ds'_1=0.$$

Ramenons ensuite le circuit C_2 à sa position primitive. L'égalité (3) nous donnera

$$\begin{aligned} &\int_{C_1}[\varphi(J_1+J_2, J'_1)-\varphi(J_1, J'_1)-\varphi(J_2, J'_1)]\,ds'_1\\ &+\int_{C_2}[\varphi(J_1+J_2, J'_2)-\varphi(J_1, J'_2)-\varphi(J_2, J'_2)]\,ds'_2=0, \end{aligned}$$

ou bien, à cause de l'égalité (4),

$$(5)\quad \int_{C_2}[\varphi(J_1+J_2, J'_2)-\varphi(J_1, J'_2)-\varphi(J_2, J'_2)]\,ds'_2=0.$$

L'ensemble des égalités (4) et (5) démontre la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int[\varphi(J_1+J_2, J')-\varphi(J_1, J')-\varphi(J_2, J')]\,ds',$$

étendue à une courbe fermée quelconque, à laquelle appartient ou n'appartient pas l'élément ds, est égale à o.

Cette proposition exige que l'on ait

$$(6)\quad \varphi(J_1+J_2, J')-\varphi(J_1, J')-\varphi(J_2, J')=\frac{\partial}{\partial s'}\Phi(J', x', y', z'),$$

x', y', z' étant les coordonnées d'un point de l'élément ds' et Φ une fonction uniforme de J', x', y', z'; cette fonction qui peut aussi dépendre des paramètres relatifs à l'élément ds.

Mais on a

$$\frac{\partial}{\partial s'}\Phi(J', x', y', z') = \frac{\partial\Phi}{\partial x'}\frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{dy'}{ds'} + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\frac{dz'}{ds'} + \frac{\partial\Phi}{\partial J'}\frac{dJ'}{ds'}.$$

Le premier membre de l'égalité (6) ne dépendant pas de $\frac{dJ'}{ds'}$, il doit en être de même du second. On a donc

$$\frac{\partial\Phi}{\partial J'} = 0;$$

Φ *ne dépend pas de* J'.

Cela étant, considérons dans le système un élément ds' parcouru par un courant d'intensité nulle. On doit obtenir pour U' la même expression, que l'on considère cet élément comme étant dans le système ou n'y étant pas. Cela entraîne évidemment cette conséquence :

L'intégrale

$$\int \varphi(J, 0)\, ds,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, est égale à 0.

On en déduit, en vertu de l'égalité (6),

$$\frac{\partial}{\partial s'}\int \Phi(x', y', z')\, ds = 0,$$

ou bien

$$\int \Phi(x', y', z')\, ds = C, \tag{7}$$

C étant une quantité indépendante de la position de l'élément ds'. C peut dépendre de la forme du circuit auquel appartient l'élément ds.

Posons

$$\frac{C}{\int ds} = \gamma,$$

et

$$\Phi_1 = \Phi - \gamma.$$

Nous aurons

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial s'} = \frac{\partial\Phi}{\partial s'}.$$

L'égalité (6) pourra s'écrire

$$(6\,bis)\qquad \varphi(J_1+J_2, J') - \varphi(J_1, J') - \varphi(J_2, J') = \frac{\partial\,\Phi_1(x', y', z')}{\partial s'}$$

et l'on aura

$$\int \Phi_1(x', y', z')\,ds = 0,$$

l'intégration s'étendant à un contour quelconque. Cette condition exige que l'on ait

$$\Phi_1 = \frac{\partial}{\partial s}\Psi(J_1, J_2, x, y, z),$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point de l'élément ds et Ψ une fonction uniforme de J_1, J_2, x, y, z.

L'égalité (6) devient alors

$$\varphi(J_1+J_2, J') - \varphi(J_1, J') - \varphi(J_2, J')$$
$$= \frac{\partial^2\Psi}{\partial J_1\,\partial s'}\frac{dJ_1}{ds} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial J_2\,\partial s'}\frac{dJ_2}{ds} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\,\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z\,\partial s'}\frac{dz}{ds}.$$

Le premier membre ne dépendant pas de $\frac{dJ_1}{ds}$, $\frac{dJ_2}{ds}$, il doit en être de même du second. On a donc

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial J_1\,\partial s'} = 0, \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial J_2\,\partial s'} = 0,$$

ce qui nous prouve que le second membre de l'égalité (6) est indépendant de J_1 et de J_2.

Cela étant, posons

$$f(J, J') = \frac{\partial\,\varphi(J, J')}{\partial J}.$$

L'égalité (6) nous donnera

$$f(J_1+J_2, J') = f(J_1, J'),$$

quel que soit J_2; par conséquent, la quantité

$$f(J, J') = \frac{\partial\,\varphi(J, J')}{\partial J}$$

est indépendante de J. On démontrerait de même que

$$\frac{\partial\,\varphi(J, J')}{\partial J'}$$

est indépendant de J', ce qui donnerait

$$\varphi(J, J') = AJJ' + BJ + CJ' + D, \tag{8}$$

A, B, C, D étant quatre quantités indépendantes de J et de J'.

De cette égalité (8), nous déduisons

$$\varphi(J_1 + J_2, J') - \varphi(J_1, J') - \varphi(J_2, J') = -(CJ' + D).$$

Le second membre de l'égalité (6) étant, comme nous l'avons prouvé, indépendant de J', on voit que l'on a

$$C = 0.$$

On prouverait de même que l'on a

$$B = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi(J, J') = AJJ' + D. \tag{9}$$

Envisageons un élément que ne parcourt aucun courant. On ne doit pas altérer la valeur de U', soit que l'on regarde cet élément comme faisant partie du système, soit qu'on le regarde comme ne lui appartenant pas. Or la première manière de voir augmente la valeur de U' de

$$D \sum ds'.$$

On doit donc avoir

$$D = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi(J, J') = AJJ'. \tag{10}$$

C. Q. F. D.

Démontrons ensuite cette seconde proposition :

La quantité A *change de signe, sans changer de grandeur, lorsqu'on renverse le sens de parcours de l'un des éléments* ds, ds'.

Supposons que l'on renverse le sens de parcours de l'élément ds. La quantité A devient A'. La quantité J se change en $-J$. La valeur de U' ne doit pas changer. On doit donc avoir

$$\sum AJ' \, ds' = -\sum A'J' \, ds',$$

quelles que soient les positions des éléments ds' et les intensités J'. Cela ne peut avoir lieu, en général, que si l'on a, comme nous l'avons annoncé,

$$A = -A'.$$

Cette proposition démontrée, imaginons un système formé de n circuits 1, 2, ..., n. Supposons que, dans le circuit 1, l'intensité varie. L'énergie interne du système subira la variation

$$\delta U = \delta U' = \int_1 \delta J_1 \, ds_1 \int_1 A J'_1 \, ds'_1 + \int_1 \delta J_1 \, ds_1 \int_2 A J'_2 \, ds'_2 + \ldots + \int_1 \delta J_1 \, ds_1 \int_n A J'_n \, ds'_n.$$

Cette variation doit être de l'ordre des quantités δJ_1; ces quantités étant des fonctions continues quelconques de l'arc s, on en déduit facilement la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int A J' \, ds',$$

étendue à un circuit quelconque, auquel appartient ou n'appartient pas l'élément ds, est finie.

Nous admettrons que la quantité A s'exprime en fonction uniforme de r, θ, θ', ω et, par conséquent, de r, $\cos\theta'$, $\cos\theta$, $\cos\omega$; nous pourrons suivre alors, pour déterminer la quantité

$$A(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega),$$

la voie qui a été suivie, aux Chapitres II et III du Livre XIII, pour déterminer la fonction $\varphi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega)$.

En suivant les raisonnements donnés au Chapitre II du Livre XIII, nous établirons que l'on a

$$A = f'(r) \cos\theta \cos\theta' + g'(r) \cos\omega, \tag{11}$$

ce qui nous donnera, pour valeur de l'énergie interne d'un système qui renferme des courants linéaires quelconques,

$$EU = E\Upsilon + W + \sum \left(\Theta - T \frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) q + E \sum J J' [f'(r) \cos\theta \cos\theta' + g'(r) \cos\omega] \, ds \, ds', \tag{12}$$

$f'(r)$ et $g'(r)$ étant deux fonctions inconnues de la distance r.

A ce résultat nous ajouterons la proposition suivante :

On peut déterminer la forme des fonctions $f'(r)$ et $g'(r)$ en suivant une marche analogue à celle qui, au Chapitre III du Livre XIII, nous a permis de déterminer la forme des fonctions $f(r)$ et $g(r)$.

Reprenons, en effet, notre système formé des circuits 1, 2, ..., n. Si l'intensité varie dans le circuit 1, l'énergie interne du système variera de

$$\delta U = \int_1 \delta J_1\, ds_1 \int_1 A J'_1\, ds'_1 + \int_1 \delta J_1\, ds_1 \int_2 A J'_2\, ds'_2 + \ldots + \int_1 \delta J_1\, ds_1 \int_n A J'_n\, ds'_n.$$

Si les circuits 2, ..., n sont infiniment éloignés du circuit 1, cette variation doit se réduire, quelles que soient les quantités δJ_1, à

$$\int_1 \delta J_1\, ds_1 \int_1 A J'_1\, ds'_1,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\int_1 \delta J_1\, ds_1 \int_2 A J'_2\, ds'_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int_1 \delta J_1\, ds_1 \int_n A J'_n\, ds'_n = 0,$$

quelles que soient les quantités δJ_1, pourvu que les circuits 2, ..., n soient infiniment éloignés du circuit 1. Nous déduisons aisément de là que, si l'élément ds_1 s'éloigne au delà de toute limite, les quantités

$$\int_2 A J'_2\, ds'_2, \quad \ldots, \quad \int_n A J'_n\, ds'_n$$

doivent tendre vers 0, quelles que soient les quantités $J'_2, \ldots, J'_n$.

Une nouvelle application du raisonnement employé au début du Chapitre III du Livre XIII montrera alors que *les deux fonctions $f'(r)$ et $g'(r)$ doivent tendre vers* 0 *lorsque r croît au delà de toute limite et devenir infinies comme $\frac{1}{r}$ lorsque r tend vers* 0.

A ce résultat, ajoutons les hypothèses suivantes :

Les deux fonctions $f'(r)$ et $g'(r)$ sont de la forme

$$f'(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r_2} + \ldots + \frac{A_m}{r^m},$$

$$g'(r) = \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r_2} + \ldots + \frac{B_p}{r^p},$$

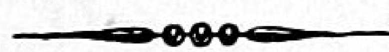
et des raisonnements analogues à ceux que nous avons employés au Chapitre III du Livre XIII nous donneront

$$(13) \qquad A = B'\left(\frac{1-\lambda'}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda'}{2r}\cos\omega\right),$$

B' et λ' étant deux constantes inconnues.

L'expression de l'énergie interne d'un système renfermant des conducteurs linéaires traversés par des courants sera

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} EU = E\Upsilon + W + \sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) q \\ + EB' \sum JJ'\left(\frac{1-\lambda'}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda'}{2r}\cos\omega\right) ds\, ds'. \end{aligned} \right.$$



CHAPITRE II.

LA LOI DE JOULE DANS LES COURANTS D'INTENSITÉ VARIABLE.

La loi de Joule donne le dégagement de chaleur produit par le passage d'un courant permanent et constant dans un fil homogène, dont tous les points sont à la même température, qui laisse passer l'électricité sans subir aucun changement d'état physique ou chimique et qui est immobile. Sir W. Thomson et M. H. von Helmholtz ont complété cette loi en tenant compte l'un du cas où le fil n'est pas homogène et ne présente pas partout la même température, l'autre du cas où se peuvent présenter des changements d'état (t. I, p. 553).

La loi ainsi complétée est la suivante :

Si un élément ds du fil est le siège d'une force électromotrice $\mathcal{E}\, ds$, et s'il est traversé par un courant d'intensité J, *il est, pendant le temps dt, le siège d'un dégagement de chaleur dQ tel que l'on ait*

$$\mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = \left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\, ds\, dt.$$

La quantité de chaleur $d\mathfrak{Q}$ dégagée par le système pendant le même temps a pour valeur

$$\mathrm{E}\, d\mathfrak{Q} = dt \sum \left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\, ds, \tag{1}$$

la sommation s'étendant à tous les éléments du système.

C'est cette loi que nous allons d'abord étendre à un système quelconque de conducteurs *immobiles* traversés par des courants quelconques.

Nous allons en chercher les conséquences en supposant que la température soit la même en tout point. Cette hypothèse a seulement pour but d'abréger les calculs; elle n'est pas indispensable au développement de la théorie.

Cherchons la valeur de

$$\mathcal{E}\, ds\, dt.$$

L'élément ds renferme une force électromotrice hydro-électrique $\eta\, ds$. Soient Θ et Θ' les valeurs de la fonction Θ en ses deux extrémités. Soient V et V′ les valeurs de la fonction potentielle aux mêmes points. La force électromotrice $\mathcal{E}'\, ds$, étrangère à l'induction, dont l'élément est le siège, a pour valeur

$$\mathcal{E}'\, ds = \eta\, ds + [(\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta')].$$

La force électromotrice d'induction, dans le même élément, a pour valeur $\mathcal{E}''\, ds$, et l'on a

$$\mathcal{E}''\, ds\, dt = \delta \sum (\Phi J'\, ds\, ds'),$$

Φ désignant la quantité

$$f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \cos\omega$$

et le signe $\sum$ s'étendant à tous les éléments ds' du système autres que ds.

Les conducteurs étant immobiles, on a

$$\delta \sum (\Phi J'\, ds\, ds') = dt\, ds \sum [f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \cos\omega] \frac{dJ'}{dt}\, ds'.$$

On a donc finalement

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} E\, d\mathfrak{Q} = dt \sum \left[\left(\eta - T \frac{\partial \eta}{\partial T}\right) + \frac{(\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta')}{ds} - \frac{T}{ds}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial T} - \frac{\partial \Theta'}{\partial T}\right)\right] J\, ds \\ + dt \sum J\, ds \sum [f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \cos\omega] \frac{dJ'}{dt}\, ds'. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, comme le système est immobile, les forces extérieures qui lui sont appliquées n'effectuent aucun travail, et l'on a

$$E\, d\mathfrak{Q} = -E\, \delta U,$$

U étant l'énergie interne.

Sur cette énergie interne, nous supposerons que l'on ne connaisse rien que ce qu'exprime l'égalité [Chapitre I, égalité (2)]

$$EU = E\Gamma + W + \sum \left(\Theta - T \frac{\partial \Theta}{\partial T}\right) q + EU',$$

U′ présentant les propriétés définies au § 1 du Chapitre I.

Les changements d'état qui se produisent dans le système font varier la quantité Θ. Soit

$$\delta_1 \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q$$

la variation que subirait la quantité

$$\sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q,$$

par suite de ces changements d'état, si toutes les charges électriques demeuraient immobiles ; soit

$$\delta_2 \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q$$

la variation que subirait la même quantité si les charges électriques étaient déplacées sans changement d'état des conducteurs. Nous aurons

$$\delta \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q = \delta_1 \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q + \delta_2 \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q.$$

Nous sommes convenus de négliger la quantité

$$\delta_1 \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q.$$

C'est moyennant cette approximation (t. I, p. 528) que nous avons établi la théorie de l'électrolyse et (t. I, p. 542) la proposition qui nous sert de point de départ dans ce Chapitre.

Cela posé, la théorie des courants hydro-électriques nous apprend que

$$dt \sum \left(\eta - \mathrm{T}\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\, ds = - \mathrm{E}\,\delta \Upsilon.$$

Le système étant immobile, on a

$$\varepsilon\, dt \sum \frac{\mathrm{V} - \mathrm{V}'}{ds} \mathrm{J}\, ds = - \delta \mathrm{W}.$$

On a évidemment

$$dt \sum \left[\frac{\Theta - \Theta'}{ds} - \frac{\mathrm{T}}{ds}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}} - \frac{\partial \Theta'}{\partial \mathrm{T}}\right)\right] \mathrm{J}\, ds = - \delta_2 \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q.$$

On a donc finalement l'égalité que voici

$$\mathrm{E}\,\delta \mathrm{U}' = - dt \sum \mathrm{J}\, ds \sum [f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega] \frac{d\mathrm{J}'}{dt} ds'. \tag{3}$$

Cette égalité nous donne l'expression de la variation que subit la quantité U' lorsque les intensités varient d'une manière quelconque, les conducteurs demeurant immobiles.

Cette égalité (3) peut encore s'écrire

$$(4)\qquad E\,\delta U' = -\,\delta \sum [f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\, JJ'\, ds\, ds',$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les combinaisons des divers éléments du système deux à deux.

Cette égalité (4) suppose les conducteurs immobiles. Si l'on observe que U' ne dépend pas des vitesses des divers points du système, on voit sans peine que l'on déduit de là

$$EU' = -\sum [f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\, JJ'\, ds\, ds' + C,$$

C étant une quantité indépendante des intensités J des courants qui traversent le système.

Mais la quantité U' doit s'annuler lorsque toutes les intensités des courants deviennent égales à o. On a donc

$$C = 0$$

et, par conséquent,

$$(5)\qquad EU' = -\sum [f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\, JJ'\, ds\, ds'.$$

Ainsi, pour déterminer la quantité U', au lieu de faire directement sur cette quantité les hypothèses que nous avons faites au § 2 du Chapitre précédent, on peut faire usage des lois de l'induction jointes à la loi de Joule. On obtient alors, comme au Chapitre précédent, une expression de la forme

$$U' = -\sum [f'(r)\cos\theta\cos\theta' + g'(r)\cos\omega]\, JJ'\, ds\, ds';$$

mais la nouvelle méthode va plus loin que celle qui a été exposée au Chapitre précédent, en ce qu'elle montre que l'on a

$$f'(r) = -\frac{f(r)}{E}, \qquad g'(r) = -\frac{g(r)}{E},$$

et qu'elle ramène ainsi la détermination des fonctions de la dis-

tance qui figurent dans l'expression de l'énergie interne à la détermination des fonctions de la distance qui figurent dans la loi de l'induction.

Si l'on admet les hypothèses qui nous ont servi à déterminer ces dernières, on trouve

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{EU}' = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \sum \left(\frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega \right) \mathrm{JJ}' \, ds \, ds'.$$



CHAPITRE III.

LA LOI FONDAMENTALE DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

Nous allons étendre maintenant la loi de Joule aux conducteurs linéaires qui se déforment et se déplacent.

Nous admettrons que l'on a encore dans ce cas

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{E}\,d\mathfrak{Q} = dt \sum \left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\,ds.$$

Soit $d\mathfrak{T}$ le travail des forces extérieures. On a

$$\mathrm{E}\,d\mathfrak{Q} + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + d\mathfrak{T}.$$

On a donc

$$\text{(2)} \qquad d\mathfrak{T} - \mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} - \delta \sum \frac{mv^2}{2} = dt \sum \left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\,ds.$$

Calculons d'abord

$$dt \sum \left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\,ds.$$

Nous avons, comme nous l'avons vu au Chapitre précédent,

$$\text{(3)} \qquad \left\{\begin{aligned} & dt \sum \left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\,ds \\ & = dt \sum \left(\eta - \mathrm{T}\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\,ds \\ & + dt \sum \frac{1}{ds}\left[(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta) - (\varepsilon \mathrm{V}' + \Theta') - \mathrm{T}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}} - \frac{\partial \Theta'}{\partial \mathrm{T}}\right)\right] \mathrm{J}\,ds \\ & + \sum \mathrm{J} \sum \delta \left\{ \mathrm{J}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega\;\; ds\,ds' \right\}. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, calculons $\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U}$.

Nous avons

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon + \mathrm{W} + \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)\mathrm{Q} \\ \qquad - \sum \mathrm{JJ}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds'. \end{cases}$$

La variation de Υ peut se partager en deux parties

$$\delta\Upsilon = \mathrm{D}\Upsilon + \Delta\Upsilon,$$

$\mathrm{D}\Upsilon$ étant la variation que subirait Υ si les divers conducteurs qui constituent le système se déplaçaient sans changer d'état, et $\Delta\Upsilon$ la partie complémentaire de $\delta\Upsilon$.

La variation de W peut s'écrire aussi

$$\delta\mathrm{W} = \mathrm{DW} - dt\sum \frac{\varepsilon(\mathrm{V}-\mathrm{V}')}{ds}\mathrm{J}\,ds,$$

DW étant la variation que subirait W si les conducteurs se déplaçaient, chacun d'eux entraînant les charges électriques qu'il porte, sans qu'aucune de ces charges quitte la particule matérielle sur laquelle elle se trouve.

La quantité Θ dépendant de la disposition des particules matérielles qui entourent la charge q, on a

$$\delta\Theta = \mathrm{D}\Theta + \Delta\Theta,$$

$\mathrm{D}\Theta$ étant la variation que subirait Θ par l'effet du déplacement des particules matérielles si aucune de celles-ci ne changeait d'état. On a donc

$$\begin{aligned} &\delta\sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q \\ &= \sum \mathrm{D}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q + \sum\Delta\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q \\ &\quad - dt\sum\frac{1}{ds}\left[\Theta - \Theta' - \mathrm{T}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}} - \frac{\partial\Theta'}{\partial\mathrm{T}}\right)\right]\mathrm{J}\,ds. \end{aligned}$$

On est convenu de négliger le terme

$$\sum\Delta\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q.$$

On a d'ailleurs, d'après la théorie des courants hydro-électriques,

$$dt\sum\left(\eta - \mathrm{T}\frac{\partial\eta}{\partial\mathrm{T}}\right)\mathrm{J}\,ds = -\mathrm{E}\,\Delta\Upsilon.$$

On a donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} = &-dt\sum\left(\eta - \mathrm{T}\frac{\partial\eta}{\partial\mathrm{T}}\right)\mathrm{J}\,ds \\ &-dt\sum\frac{1}{ds}\left[(\varepsilon\mathrm{V}+\Theta)-(\varepsilon\mathrm{V}'+\Theta')-\mathrm{T}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}-\frac{\partial\Theta'}{\partial\mathrm{T}}\right)\right]\mathrm{J}\,ds \\ &+\mathrm{E}\,\mathrm{D}\Upsilon+\mathrm{DW}+\sum\Delta\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q \\ &-\delta\sum\mathrm{JJ}'[f(r)\cos\theta\cos\theta'+g(r)\cos\omega]\,ds\,ds'. \end{aligned}\right.$$

L'ensemble des égalités (2), (3) et (5) donne

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\sum\frac{mv^2}{2} = &\, d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\,\mathrm{D}\Upsilon - \mathrm{DW} - \sum\mathrm{D}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q \\ &+\delta\sum\mathrm{JJ}'[f(r)\cos\theta\cos\theta'+g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \\ &-\sum\mathrm{J}\sum\delta\{\mathrm{J}'[f(r)\cos\theta\cos\theta'+g(r)\cos\omega]\,ds\,ds'\}. \end{aligned}\right.$$

Examinons les conséquences de cette égalité (6).

D'après un théorème connu sur les déplacements sans changements d'état, on a

$$-\mathrm{E}\,\mathrm{D}\Upsilon = d\mathfrak{T}_i,$$

$d\mathfrak{T}_i$ étant le travail des forces intérieures, tant données que de frottement, dans le système à l'état neutre.

La quantité $-\mathrm{DW}$ représente le travail des forces électrostatiques données par la loi de Coulomb.

La quantité

$$-\sum\mathrm{D}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q$$

représente le travail des forces qui s'exercent à petite distance entre les particules matérielles neutres et les particules matérielles électrisées, forces dont l'existence est conforme à l'hypothèse émise par Helmholtz pour expliquer les différences de niveau potentiel.

La somme

$$d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\,\mathrm{D}\Upsilon - \mathrm{DW} - \sum\mathrm{D}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q$$

représente donc le travail de toutes les forces agissantes, tant extérieures qu'intérieures, qui seraient appliquées au système s'il ne renfermait aucun courant électrique.

L'égalité (6) nous apprend, par conséquent, que la présence des courants électriques a pour effet de faire naître dans le système des forces dont le travail élémentaire a pour expression

$$(7)\quad \begin{cases} d\tau = \delta \sum \mathrm{JJ}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \\ \qquad - \sum \mathrm{J} \sum \delta \{ \mathrm{J}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \}, \end{cases}$$

car c'est à cette condition-là seulement que le second membre de l'égalité (6) représentera le travail de toutes les forces agissantes dont le système est le siège.

Développons l'expression de $d\tau$.

Supposons le système formé de n éléments

$$ds_1,\quad ds_2,\quad \ldots,\quad ds_n.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} &\sum \mathrm{JJ}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \\ &\quad = \mathrm{J}_1\,ds_1\,(\mathrm{J}_2\,\Phi_{12}\,ds_2 + \mathrm{J}_3\,\Phi_{13}\,ds_3 + \ldots + \mathrm{J}_n\,\Phi_{1n}\,ds_n) \\ &\quad + \mathrm{J}_2\,ds_2\,(\mathrm{J}_3\,\Phi_{23}\,ds_3 + \ldots + \mathrm{J}_n\,\Phi_{2n}\,ds_n) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \mathrm{J}_{n-1}\,ds_{n-1}(\mathrm{J}_n\,\Phi_{n-1,n}\,ds_n), \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\Phi = [f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega].$$

On déduit de là

$$(8)\quad \begin{cases} \delta \sum \mathrm{JJ}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \\ \quad = \delta(\mathrm{J}_1 ds_1)\,(\mathrm{J}_2\,\Phi_{12}\,ds_2 + \mathrm{J}_3\,\Phi_{13}\,ds_3 + \ldots + \mathrm{J}_n\,\Phi_{1n}\,ds_n) \\ \quad + \delta(\mathrm{J}_2 ds_2)\,(\mathrm{J}_1\,\Phi_{21}\,ds_1 + \mathrm{J}_3\,\Phi_{23}\,ds_3 + \ldots + \mathrm{J}_n\,\Phi_{2n}\,ds_n) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \delta(\mathrm{J}_n\,ds_n)\,(\mathrm{J}_1\,\Phi_{n1}\,ds_1 + \mathrm{J}_2\,\Phi_{n2}\,ds_2 + \ldots + \mathrm{J}_{n-1}\,\Phi_{n,n-1}\,ds_{n-1}) \\ \quad + \mathrm{J}_1\,ds_1\,(\mathrm{J}_2\,ds_2\,\delta\Phi_{12} + \mathrm{J}_3\,ds_3\,\delta\Phi_{13} + \ldots + \mathrm{J}_n\,ds_n\,\delta\Phi_{1n}) \\ \quad + \mathrm{J}_2\,ds_2\,(\mathrm{J}_3\,ds_3\,\delta\Phi_{23} + \ldots + \mathrm{J}_n\,ds_n\,\delta\Phi_{2n}) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \mathrm{J}_{n-1}\,ds_{n-1}(\mathrm{J}_n\,ds_n\,\delta\Phi_{n-1,n}). \end{cases}$$

D'autre part, on a, pour l'élément ds_1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_1 \sum \delta\{\mathrm{J}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds_1\,ds'\} \\
= \mathrm{J}_1 \delta\,ds_1(\mathrm{J}_2\Phi_{12}\,ds_2 + \mathrm{J}_3\Phi_{13}\,ds_3 + \ldots + \mathrm{J}_n\Phi_{1n}\,ds_n) \\
+ \mathrm{J}_1\,ds_1[\Phi_{12}\,\delta(\mathrm{J}_2\,ds_2) + \Phi_{13}\,\delta(\mathrm{J}_3\,ds_3) + \ldots + \Phi_{1n}\,\delta(\mathrm{J}_n\,ds_n)] \\
+ \mathrm{J}_1\,ds_1(\mathrm{J}_2\,ds_2\,\delta\Phi_{12} + \mathrm{J}_3\,ds_3\,\delta\Phi_{13} + \ldots + \mathrm{J}_n\,ds_n\,\delta\Phi_{1n}).
\end{aligned}$$

On a de même, pour l'élément ds_2,

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_2 \sum \delta\{\mathrm{J}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds_2\,ds'\} \\
= \mathrm{J}_2\,\delta\,ds_2(\mathrm{J}_1\Phi_{21}\,ds_1 + \mathrm{J}_3\Phi_{23}\,ds_3 + \ldots + \mathrm{J}_n\Phi_{2n}\,ds_n) \\
+ \mathrm{J}_1\,ds_1[\Phi_{21}\,\delta(\mathrm{J}_2\,ds_2) + \Phi_{23}\,\delta(\mathrm{J}_3\,ds_3) + \ldots + \Phi_{2n}\,\delta(\mathrm{J}_n\,ds_n)] \\
+ \mathrm{J}_2\,ds_2\,(\mathrm{J}_1\,ds_1\,\delta\Phi_{21} + \mathrm{J}_3\,ds_3\,\delta\Phi_{23} + \ldots + \mathrm{J}_n\,ds_n\,\delta\Phi_{2n}).
\end{aligned}$$

Les éléments ds_3, ..., ds_n fournissent des égalités analogues.

Si l'on observe maintenant que

$$\begin{aligned}
& \mathrm{J}_1\,ds_1[\Phi_{12}\,\delta(\mathrm{J}_2\,ds_2) + \Phi_{13}\,\delta(\mathrm{J}_3\,ds_3) + \ldots + \Phi_{1n}\,\delta(\mathrm{J}_n\,ds_n)] \\
+ & \mathrm{J}_2\,ds_2[\Phi_{21}\,\delta(\mathrm{J}_1\,ds_1) + \Phi_{23}\,\delta(\mathrm{J}_3\,ds_3) + \ldots + \Phi_{2n}\,\delta(\mathrm{J}_n\,ds_n)] \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & \mathrm{J}_n\,ds_n[\Phi_{n1}\,\delta(\mathrm{J}_1\,ds_1) + \Phi_{n2}\,\delta(\mathrm{J}_2\,ds_2) + \ldots + \Phi_{n,n-1}\,\delta(\mathrm{J}_{n-1}\,ds_{n-1})] \\
= & \delta(\mathrm{J}_1\,ds_1)(\Phi_{12}\mathrm{J}_2\,ds_2 + \Phi_{13}\mathrm{J}_3\,ds_3 + \ldots + \Phi_{1n}\mathrm{J}_n\,ds_n) \\
+ & \delta(\mathrm{J}_2\,ds_2)(\Phi_{21}\mathrm{J}_1\,ds_1 + \Phi_{23}\mathrm{J}_3\,ds_3 + \ldots + \Phi_{2n}\mathrm{J}_n\,ds_n) \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & \delta(\mathrm{J}_n\,ds_n)(\Phi_{n1}\mathrm{J}_1\,ds_1 + \Phi_{n2}\mathrm{J}_2\,ds_2 + \ldots + \Phi_{n,n-1}\mathrm{J}_{n-1}\,ds_{n-1}),
\end{aligned}$$

on voit sans peine que l'on pourra écrire l'égalité suivante :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
& \sum \mathrm{J} \sum \delta\{\mathrm{J}'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds'\} \\
& = \delta(\mathrm{J}_1\,ds_1)(\Phi_{12}\mathrm{J}_2\,ds_2 + \Phi_{13}\mathrm{J}_3\,ds_3 + \ldots + \Phi_{1n}\mathrm{J}_n\,ds_n) \\
& + \delta(\mathrm{J}_2\,ds_2)(\Phi_{21}\mathrm{J}_1\,ds_1 + \Phi_{23}\mathrm{J}_3\,ds_3 + \ldots + \Phi_{2n}\mathrm{J}_n\,ds_n) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \delta(\mathrm{J}_n\,ds_n)(\Phi_{n1}\mathrm{J}_1\,ds_1 + \Phi_{n2}\,ds_2 + \ldots + \Phi_{nn}\mathrm{J}_n\,ds_n) \\
& + \mathrm{J}_1\delta\,ds_1(\Phi_{12}\mathrm{J}_2\,ds_2 + \Phi_{13}\mathrm{J}_3\,ds_3 + \ldots + \Phi_{1n}\mathrm{J}_n\,ds_n) \\
& + \mathrm{J}_2\delta\,ds_2(\Phi_{21}\mathrm{J}_1\,ds_1 + \Phi_{23}\mathrm{J}_3\,ds_3 + \ldots + \Phi_{2n}\mathrm{J}_n\,ds_n) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \mathrm{J}_n\delta\,ds_n(\Phi_{n1}\mathrm{J}_1\,ds_1 + \Phi_{n2}\mathrm{J}_2\,ds_2 + \ldots + \Phi_{n,n-1}\mathrm{J}_{n-1}\,ds_{n-1}) \\
& + \mathrm{J}_1\,ds_1(\mathrm{J}_2\,ds_2\,\delta\Phi_{12} + \mathrm{J}_3\,ds_3\,\delta\Phi_{13} + \ldots + \mathrm{J}_n\,ds_n\,\delta\Phi_{1n}) \\
& + \mathrm{J}_2\,ds_2(\mathrm{J}_1\,ds_1\,\delta\Phi_{21} + \mathrm{J}_3\,ds_3\,\delta\Phi_{23} + \ldots + \mathrm{J}_n\,ds_n\,\delta\Phi_{2n}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \mathrm{J}_n\,ds_n(\mathrm{J}_1\,ds_1\,\delta\Phi_{n1} + \mathrm{J}_2\,ds_2\,\delta\Phi_{n2} + \ldots + \mathrm{J}_{n-1}\,ds_{n-1}\,\delta\Phi_{n,n-1}).
\end{aligned}\right.$$

Les égalités (7), (8) et (9) donnent

$$(10)\quad \begin{aligned}
d\tau = {} & \, J_1\, ds_1(\delta\Phi_{12} J_2\, ds_2 + \delta\Phi_{13} J_3\, ds_3 + \ldots + \delta\Phi_{1n} J_n\, ds_n) \\
& + J_2\, ds_2(\phantom{\delta\Phi_{12} J_2\, ds_2 +{}} \delta\Phi_{23} J_3\, ds_3 + \ldots + \delta\Phi_{2n} J_n\, ds_n) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + J_{n-1}\, ds_{n-1}(\delta\Phi_{n-1,n} J_n\, ds_n) \\
& - J_1\, ds_1(\delta\Phi_{12} J_2\, ds_2 + \delta\Phi_{13} J_3\, ds_3 + \ldots + \delta\Phi_{1n} J_n\, ds_n) \\
& - J_2\, ds_2(\delta\Phi_{21} J_1\, ds_1 + \delta\Phi_{23} J_3\, ds_3 + \ldots + \delta\Phi_{2n} J_n\, ds_n) \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - J_n\, ds_n(\delta\Phi_{n1} J_1\, ds_1 + \delta\Phi_{n2} J_2\, ds_2 + \ldots + \delta\Phi_{n,n-1} J_n\, ds_n) \\
& - J_1\, \delta\, ds_1(\Phi_{12} J_2\, ds_2 + \Phi_{13} J_3\, ds_3 + \ldots + \Phi_{1n} J_n\, ds_n) \\
& - J_2\, \delta\, ds_2(\Phi_{21} J_1\, ds_1 + \Phi_{23} J_3\, ds_3 + \ldots + \Phi_{2n} J_n\, ds_n) \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - J_n\, \delta\, ds_n(\Phi_{n1} J_1\, ds_1 + \Phi_{n2} J_2\, ds_2 + \ldots + \Phi_{nn} J_n\, ds_n).
\end{aligned}$$

Mais on a

$$(11)\quad \begin{aligned}
& \, J_1\, ds_1(J_2\, ds_2\, \delta\Phi_{12} + J_3\, ds_3\, \delta\Phi_{13} + \ldots + J_n\, ds_n\, \delta\Phi_{1n}) \\
& + J_2\, ds_2(J_1\, ds_1\, \delta\Phi_{21} + J_3\, ds_3\, \delta\Phi_{23} + \ldots + J_n\, ds_n\, \delta\Phi_{2n}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + J_n\, ds_n(J_1\, ds_1\, \delta\Phi_{n1} + J_2\, ds_2\, \delta\Phi_{n2} + \ldots + J_{n-1}\, ds_{n-1}\, \delta\Phi_{n,n-1}) \\
= 2\Big[& \, J_1\, ds_1(J_2\, ds_2\, \delta\Phi_{12} + J_3\, ds_3\, \delta\Phi_{13} + \ldots + J_n\, ds_n\, \delta\Phi_{1n}) \\
& + J_2\, ds_2(\phantom{J_1\, ds_1\, \delta\Phi_{21} +{}} J_3\, ds_3\, \delta\Phi_{23} + \ldots + J_n\, ds_n\, \delta\Phi_{2n}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + J_n\, ds_n(J_{n-1}\, ds_{n-1}\, \delta\Phi_{n,n-1})\Big].
\end{aligned}$$

On a aussi, d'autre part,

$$(12)\quad \begin{aligned}
& \, J_1\, \delta\, ds_1(J_2\, ds_2\, \Phi_{12} + J_3\, ds_3\, \Phi_{13} + \ldots + J_n\, ds_n\, \Phi_{1n}) \\
& + J_2\, \delta\, ds_2(J_1\, ds_1\, \Phi_{21} + J_3\, ds_3\, \Phi_{23} + \ldots + J_n\, ds_n\, \Phi_{2n}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + J_n\, \delta\, ds_n(J_1\, ds_1\, \Phi_{n1} + J_2\, ds_2\, \Phi_{n2} + \ldots + J_{n-1}\, ds_{n-1}\, \Phi_{n,n-1}) \\
= {} & \, J_1[J_2 \Phi_{12}\, \delta(ds_1\, ds_2) + J_3 \Phi_{13}\, \delta(ds_1\, ds_3) + \ldots + J_n \Phi_{1n}\, \delta(ds_1\, ds_n)] \\
& + J_2[\phantom{J_2 \Phi_{12}\, \delta(ds_1\, ds_2) +{}} J_3 \Phi_{23}\, \delta(ds_2\, ds_3) + \ldots + J_n \Phi_{2n}\, \delta(ds_2\, ds_n)] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + J_{n-1}[J_n \Phi_{n-1,n}\, \delta(ds_{n-1}\, ds_n)].
\end{aligned}$$

Moyennant les égalités (10), (11), (12), on a

$$(13)\quad \begin{aligned}
d\tau = {} & - J_1[J_2\, \delta(\Phi_{12}\, ds_1\, ds_2) + J_3\, \delta(\Phi_{13}\, ds_1\, ds_3) + \ldots + J_n\, \delta(\Phi_{1n}\, ds_1\, ds_n)] \\
& - J_2[\phantom{J_2\, \delta(\Phi_{12}\, ds_1\, ds_2) +{}} J_3\, \delta(\Phi_{23}\, ds_2\, ds_3) + \ldots + J_n\, \delta(\Phi_{2n}\, ds_2\, ds_n)] \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - J_{n-1}[J_n\, \delta(\Phi_{n-1,n}\, ds_{n-1}\, ds_n)].
\end{aligned}$$

Si donc nous désignons par D une différentielle prise en supposant constantes les intensités des courants qui parcourent les divers éléments, nous aurons, en place de l'égalité (13),

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
d\tau = -\,\mathrm{D}[\; & J_1\,ds_1(\Phi_{12}J_2\,ds_2 + \Phi_{13}J_3\,ds_3 + \ldots + \Phi_{1n}J_n\,ds_n) \\
+ \; & J_2\,ds_2(\Phi_{23}J_3\,ds_3 + \ldots + \Phi_{2n}J_n\,ds_n) \\
+ \; & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \; & J_{n-1}\,ds_{n-1}(\Phi_{n-1,n}J_n\,ds_n)] \\
= -\,\mathrm{D}\sum & JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds'.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
(15)\qquad \Pi = \sum JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds'
$$

et l'égalité (14) nous conduira à la proposition suivante :

Les forces qui s'exercent entre des conducteurs linéaires quelconques, traversés par des courants quelconques, admettent pour potentiel la quantité Π, *c'est-à-dire que le travail accompli par ces forces dans une déformation élémentaire quelconque du système est égal, au signe près, à la différentielle de la quantité* Π, *prise en supposant les intensités constantes.*

Telle est la loi fondamentale de l'Électrodynamique, déduite ainsi de la loi fondamentale de l'Induction jointe à la loi de Joule généralisée. H. von Helmholtz et Sir W. Thomson avaient indiqué, sous forme d'aperçu, que le premier principe de la Thermodynamique, joint à la loi de Joule, devait former le lien entre l'Électrodynamique et les lois de l'Induction. Ce qui précède peut être regardé comme étant leur idée mise sous une forme précise.

La loi de l'Électrodynamique, telle que nous venons de l'énoncer, a été donnée d'abord par Gauss [1], dont la démonstration n'a été publiée que longtemps après sa mort, puis par M. F.-E. Neumann [2].

De l'hypothèse que les actions mutuelles des courants admet-

---

(1) Gauss, *Werke*, Bd. V, p. 608.

(2) F.-E. Neumann, *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme*. Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 9 août 1849.

tent un potentiel, on peut aisément, en suivant une marche analogue à celle qui nous a permis, au § II du Chapitre I, d'établir la forme de l'énergie interne d'un système de courants, trouver la forme de ce potentiel. Nous avons indiqué ailleurs cette démonstration [1].

[1] P. Duhem, *Applications de la Thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants électriques* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXI; 1887).



CHAPITRE IV.

EXAMEN DE QUELQUES PARADOXES.

Nous sommes parvenu à la loi fondamentale des forces électrodynamiques exercées par des courants linéaires : *Ces forces admettent pour potentiel le potentiel électrodynamique du système.*

Lorsqu'on examine de près la voie que nous avons suivie pour relier, par la Thermodynamique, cette loi à la loi fondamentale de l'Induction, on rencontre des difficultés étranges et paradoxales qu'il importe d'éclaircir avant de pousser plus loin l'étude des forces électrodynamiques.

L'examen de ces paradoxes nous conduira à mettre en lumière certaines idées fondamentales qui ne nous semblent pas avoir été clairement aperçues jusqu'ici; ce sont ces idées qui expliquent et justifient l'ordre que nous avons suivi dans l'étude des actions exercées par les courants.

La formule (15) du Chapitre précédent nous montre que nous avons

$$\Pi = -\mathrm{E}U'.$$

Soit $d\mathfrak{T}_i$ le travail de toutes les forces intérieures au système autres que les forces électrodynamiques. Nous avons

$$d\mathfrak{T}_i = -\mathrm{E}\,\mathrm{D}\Upsilon - \mathrm{DW} - \sum q\,\mathrm{D}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right).$$

Désignons par DU la différentielle de l'énergie interne, prise en regardant comme invariables l'état chimique et physique des divers corps, les charges électriques qu'ils portent, les intensités des courants qui les traversent, et en faisant varier seulement les paramètres qui définissent leur forme et leur position mutuelle.

Lorsque le système ne renferme pas de courants, on a

$$\text{EDU} = - d\mathfrak{T}_i,$$

ce qui exprime ce théorème fondamental, sur lequel repose toute l'étude de l'Électrostatique et du Magnétisme :

Lorsque les divers corps qui composent un système se déplacent sans changer d'état, l'énergie interne du système éprouve une variation égale, au signe près, au quotient du travail qu'effectuent les forces intérieures au système par l'équivalent mécanique de la chaleur.

Mais, lorsque le système renferme des courants, on a

$$\text{EDU} = - d\mathfrak{T}_i + \text{EDU}',$$

ou bien

$$\text{EDU} = - d\mathfrak{T}_i + d\tau.$$

La variation de l'énergie interne, prise en regardant comme seuls variables les paramètres qui définissent la position des divers corps du système, multipliée par l'équivalent mécanique de la chaleur et changée de signe, n'est plus égale à la somme des travaux des forces intérieures au système. *Elle est égale à l'excès du travail des forces électrodynamiques sur le travail des autres forces intérieures au système.*

Le théorème sur les déplacements sans changement d'état ne s'applique donc plus aux courants électriques.

En effet, ce théorème résulte de l'application du premier principe de la Thermodynamique à un déplacement sans changement d'état. La première condition pour que ce théorème soit valable est donc que l'on puisse imposer au système dont il s'agit, sans contredire à sa définition, des déplacements sans changement d'état, c'est-à-dire des déplacements durant lesquels on laisse invariables :

1° L'état physique et chimique de chacun des éléments ;

2° La distribution des charges électriques sur chacun d'eux;

3° L'intensité du courant qui traverse chacun d'eux.

Or il résulte de la loi de Faraday que, si le courant traverse un électrolyte, cet électrolyte éprouve un changement d'état proportionnel, en grandeur, à l'intensité du courant et au temps pendant lequel on étudie le système.

Donc, on ne pourra observer de déplacement sans changement d'état, dans un système renfermant des courants, que si aucun des conducteurs du système n'est électrolysable.

Le courant amène en un point quelconque de l'élément ds, pendant le temps dt, une quantité d'électricité

$$dq = -\frac{dJ}{ds}\,dt.$$

La distribution électrique ne peut donc demeurer invariable sur les divers conducteurs que si $\frac{dJ}{ds}$ est nul en tout point, c'est-à-dire si les courants sont uniformes.

Nous voilà réduits à chercher des déplacements sans changement d'état parmi les seuls courants uniformes traversant des conducteurs non électrolysables. Encore ces déplacements ne peuvent-ils être quelconques. Ils doivent être tels que les forces électromotrices d'induction engendrées par ces déplacements entretiennent dans les conducteurs des courants uniformes et constants.

Ainsi, il n'y aura pas lieu de s'étonner que le théorème sur les déplacements sans changement d'état ne soit pas applicable à un système renfermant des courants, si l'existence d'un déplacement sans changement d'état dans un pareil système est contradictoire. D'autre part, d'après ce que nous venons de dire, énoncer l'impossibilité d'un déplacement sans changement d'état dans un système renfermant des courants, c'est simplement énoncer l'impossibilité d'entretenir, sans force électromotrice thermo-électrique ou hydro-électrique, des courants constants et uniformes au moyen du mouvement d'un tel système. La proposition d'apparence paradoxale que nous avions rencontrée est donc équivalente à cette proposition, nullement surprenante et conforme à l'expérience : *Il est impossible, par le seul mouvement de fils métalliques, de réaliser un appareil engendrant des courants constants.*

Toutefois, on peut regarder certaines modifications d'un système renfermant des courants comme ayant pour limite un déplacement sans changement d'état, et cela de la manière suivante :

On peut supposer le déplacement que doivent éprouver les conducteurs effectué dans un temps aussi court que l'on veut. Dans ces conditions, les changements d'état éprouvés par les conduc-

teurs électrolysables et les changements de distribution électrique, dus à la non-uniformité du courant, peuvent être rendus aussi petits que l'on veut. En sorte qu'un déplacement très rapide d'un système quelconque pourra être regardé comme un déplacement sans changement d'état, à la seule condition que les intensités demeurent invariables.

Examinons donc un déplacement infiniment petit d'un système quelconque, ce déplacement étant censé produit dans un temps dt infiniment petit du second ordre.

Soit $d\mathfrak{T}_i$ le travail de toutes les forces intérieures au système. On aura, pour un tel déplacement,

$$d\mathfrak{T}_i = -\,\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} d\mathfrak{T}_i = &-\mathrm{ED}\Upsilon + \mathrm{DW} - \sum q\,\mathrm{D}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)\\ &+\mathrm{J}_1\,[\mathrm{J}_2\,\delta(\Phi_{12}\,ds_1\,ds_2) + \mathrm{J}_3\,\delta(\Phi_{13}\,ds_1\,ds_3) + \ldots + \mathrm{J}_n\,\delta(\Phi_{1n}\,ds_1\,ds_n)]\\ &+\mathrm{J}_2\,[\mathrm{J}_3\,\delta(\Phi_{23}\,ds_2\,ds_3) + \ldots + \mathrm{J}_n\,\delta(\Phi_{2n}\,ds_1\,ds_n)]\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\mathrm{J}_{n-1}[\mathrm{J}_n\,\delta(\Phi_{n-1,n}\,ds_{n-1}\,ds_n)]\end{aligned}\right.$$

Mais cette égalité ne doit pas avoir lieu pour des déplacements quelconques. Elle doit avoir lieu seulement pour des déplacements qui laissent à J_1, J_2, ..., J_n les valeurs finies que ces intensités possèdent au début du déplacement.

Soit $\eta_1\,ds_1$ la force électromotrice étrangère à l'induction que renferme l'élément ds_1. Soit $\mathrm{R}_1\,ds_1$ la résistance de cet élément. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_1\mathrm{J}_1\,ds_1\,dt = \eta_1\,ds_1\,dt &+ \mathrm{J}_2\,\delta(\Phi_{12}\,ds_1\,ds_2)\\ &+ \mathrm{J}_3\,\delta(\Phi_{13}\,ds_1\,ds_3) + \ldots + \mathrm{J}_n\,\delta(\Phi_{1n}\,ds_1\,ds_n);\end{aligned}$$

J_1 doit garder une valeur finie; η_1 a une valeur finie; dt est infiniment petit d'ordre supérieur. On doit donc avoir

$$\mathrm{J}_2\,\delta(\Phi_{12}\,ds_1\,ds_2) + \mathrm{J}_3\,\delta(\Phi_{13}\,ds_1\,ds_3) + \ldots + \mathrm{J}_n\,\delta(\Phi_{1n}\,ds_1\,ds_n) = 0.$$

D'ailleurs, cette condition suffit pour que J_1 soit invariable. On aura, en effet, si elle est remplie,

$$\delta\mathrm{J}_1 = \frac{1}{\mathrm{R}_1\,ds_1}\left[\frac{d(\eta_1\,ds_1)}{dt} - \mathrm{J}_1\frac{d(\mathrm{R}_1\,ds_1)}{dt}\right]dt,$$

et le second membre est infiniment petit du même ordre que dt. Donc l'égalité (16) a lieu, non pour tout déplacement du système, mais pour tout déplacement tel que l'on ait

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} J_2\delta(\Phi_{12}\,ds_1\,ds_1)+J_3\delta(\Phi_{13}\,ds_1\,ds_2)+\ldots+J_n\,\delta(\Phi_{1n}\,ds_1\,ds_n)=0,\\ J_1\delta(\Phi_{21}\,ds_2\,ds_1)+J_3\delta(\Phi_{23}\,ds_2\,ds_3)+\ldots+J_n\,\delta(\Phi_{2n}\,ds_2\,ds_n)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ J_1\delta(\Phi_{n1}\,ds_n\,ds_1)+J_2\delta(\Phi_{n2}\,ds_n\,ds_2)+\ldots+J_{n-1}\delta(\Phi_{n,n-1}\,ds_n\,ds_{n-1})=0. \end{array}\right.$$

Cela étant, *il doit exister n coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, indépendants de la forme qu'affectent les divers conducteurs du système, tels que l'on ait, pour tout déplacement du système,*

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} d\mathfrak{T}_i=-\,\mathrm{ED}\Upsilon-\mathrm{DW}-\sum q\,\mathrm{D}\left(\Theta-\mathrm{T}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)\\ \quad +J_1J_2\delta(\Phi_{12}ds_1\,ds_2)+J_1J_3\delta(\Phi_{13}ds_1\,ds_3)+\ldots+J_1\,J_n\delta(\Phi_{1n}\,ds_1\,ds_n)\\ \quad\quad +J_2J_3\delta(\Phi_{23}ds_2\,ds_3)+\ldots+J_2\,J_n\delta(\Phi_{2n}\,ds_1\,ds_n)\\ \quad\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad\quad +J_{n-1}J_n\delta(\Phi_{n-1,n}\,ds_{n-1}\,ds_n)\\ \quad +\lambda_1\,[J_2\delta(\Phi_{12}\,ds_1\,ds_2)+J_3\delta(\Phi_{13}\,ds_1\,ds_3)+\ldots+J_n\,\delta(\Phi_{1n}\,ds_1\,ds_n)]\\ \quad +\lambda_2\,[J_1\delta(\Phi_{21}\,ds_2\,ds_1)+J_3\delta(\Phi_{23}\,ds_2\,ds_3)+\ldots+J_n\,\delta(\Phi_{2n}\,ds_2\,ds_n)]\\ \quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad +\lambda_n[J_1\delta(\Phi_{n1}\,ds_n\,ds_1)+J_2\delta(\Phi_{n2}\,ds_n\,ds_2)+\ldots+J_{n-1}\delta(\Phi_{n,n-1}\,ds_n\,ds_{n-1})]. \end{array}\right.$$

Cette égalité (18) représente tout ce qu'exige, dans le cas actuel, l'application du premier principe de la Thermodynamique à un déplacement sans changement d'état. Cette application nous apprend seulement que les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont indépendantes de la forme des conducteurs, sans nous faire connaître la valeur de ces quantités. Si nous prenons

$$(19)\qquad \lambda_1=-J_1,\qquad \lambda_2=-J_2,\qquad \ldots,\qquad \lambda_n=-J_n,$$

l'égalité deviendra

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} d\mathfrak{T}_i=-\,\mathrm{ED}\Upsilon-\mathrm{DW}-\sum q\,\mathrm{D}\left(\Theta-\mathrm{T}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)\\ \quad -J_1J_2\delta(\Phi_{12}ds_1\,ds_2)-J_1J_3\delta(\Phi_{13}ds_1\,ds_3)-\ldots-J_1\,J_n\delta(\Phi_{1n}\,ds_1\,ds_n)\\ \quad\quad -J_2J_3\delta(\Phi_{23}ds_2\,ds_3)-\ldots-J_2\,J_n\delta(\Phi_{2n}\,ds_2\,ds_n)\\ \quad\quad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad\quad -J_{n-1}J_n\delta(\Phi_{n,n-1}\,ds_n\,ds_{n-1}). \end{array}\right.$$

Cette égalité (20) est alors pleinement d'accord avec l'éga-

lité (13), qui donne la loi fondamentale de l'Électrodynamique. Ainsi la loi fondamentale de l'Électrodynamique est d'accord avec les propriétés des déplacements sans changements d'état; mais ces dernières propriétés ne suffisent pas à déterminer la loi de l'Électrodynamique; elles seraient compatibles avec une infinité d'autres lois, car on pourrait donner aux coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ une infinité de déterminations autres que celles qui résultent des égalités (19).

Un nouveau paradoxe va maintenant solliciter notre attention.

Essayons d'appliquer aux systèmes qui renferment des courants les théorèmes qui constituent la théorie du potentiel thermodynamique.

Le potentiel thermodynamique interne d'un système qui ne renferme pas de courant est, en conservant les notations employées dans les précédents Chapitres,

$$\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q,$$

Σ étant l'entropie du système supposé à l'état neutre.

Le potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des courants doit être, d'après cela, de la forme que voici :

$$\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q + \mathfrak{F}', \tag{21}$$

$\mathfrak{F}'$ étant une fonction des paramètres qui définissent l'état du système, égale à o lorsque toutes les intensités sont égales à o.

En faisant sur $\mathfrak{F}'$ les raisonnements et les hypothèses que nous avons faits sur U' au Chapitre I, nous verrons que $\mathfrak{F}'$ est de la forme

$$\mathfrak{F}' = \mathrm{B}'' \sum \mathrm{JJ}' \left[\frac{1-\lambda''}{2r} \cos\theta \cos\theta' + \frac{1+\lambda''}{2r} \cos\omega \right] ds\, ds', \tag{22}$$

B'' et λ'' étant deux constantes.

La formule générale

$$\mathrm{EU} = \mathfrak{F} - \mathrm{T} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{T}}$$

nous donnera

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{EU} &= \mathrm{E}\Upsilon + \mathrm{W} + \sum q \left(\Theta - \mathrm{T} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}} \right) \\ &\quad + \mathrm{B}'' \sum \mathrm{JJ}' \left[\frac{1-\lambda''}{2r} \cos\theta \cos\theta' + \frac{1+\lambda''}{2r} \cos\omega \right] ds\, ds'. \end{aligned} \right. \tag{23}$$

En comparant avec l'expression de EU trouvée au Chapitre I, nous voyons que l'on a

$$B'' = B', \qquad \lambda'' = \lambda'.$$

Il résulte alors de la loi de l'Induction jointe à la loi de Joule, comme on l'a vu au Chapitre II, que l'on a

$$B'' = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}, \qquad \lambda'' = \lambda,$$

ce qui donne

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{F} &= E(\Upsilon - T\Sigma) + W + \sum \Theta q \\ &+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \sum JJ' \left[\frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega \right] ds\, ds'. \end{aligned} \right.$$

Imaginons un système de conducteurs fermés, immobiles, non électrolysables, traversés par des courants uniformes; dans ces conditions, on peut poser

$$E(\Upsilon - T\Sigma) + W + \sum \Theta q = C,$$

C étant une constante.

Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont les n conducteurs fermés et si l'on pose, suivant une notation que nous avons souvent employée,

$$(c_i, c_j) = \int_{c_i} \int_{c_j} \left[\frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta_i \cos\theta_j - \frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega \right] ds_i\, ds_j,$$

on aura

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{F} = C + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \Big[\frac{1}{2}(c_1, c_1) J_1^2 + {} & (c_1, c_2) J_1 J_2 + \ldots + (c_1, c_n) J_1 J_n \\ & + \frac{1}{2}(c_2, c_2) J_2^2 + \ldots + (c_2, c_n) J_2 J_n \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad\qquad + \frac{1}{2}(c_n, c_n) J_n^2 \Big]. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité (24), jointe aux raisonnements donnés au Livre XIII, Chapitre IV, nous apprend que le second terme de l'expression de $\mathcal{F}$ est toujours négatif, à moins que les intensités de tous les courants ne soient égales à o. Nous arrivons donc à cette conclusion :

Dans un système de conducteurs fermés, immobiles, non

électrolysables, traversés par des courants uniformes, le potentiel thermodynamique interne est maximum lorsque les intensités de tous les courants sont égales à o.

D'autre part, nous avons vu au Chapitre IV, Livre XIII que, *dans un tel système, l'état où toutes les intensités sont égales à* o *est un état d'équilibre stable.*

Nous arrivons donc à cette conséquence :

Un système de conducteurs fermés, immobiles, non électrolysables, traversés par des courants uniformes, est en équilibre stable lorsque son potentiel thermodynamique est maximum.

Cette proposition est en contradiction avec ce principe fondamental de la théorie du potentiel thermodynamique :

Les états d'équilibre stable d'un système immobile sont ceux qui rendent minimum son potentiel thermodynamique interne.

On peut encore mettre en évidence d'une manière un peu différente la contradiction qui existe entre la loi de l'Induction et la théorie du potentiel thermodynamique.

Dans un système de conducteurs fermés, immobiles, non électrolysables, traversés par des courants uniformes, le potentiel thermodynamique interne éprouve, pendant le temps dt, une variation $\delta\mathfrak{F}$ qui a pour valeur, d'après l'égalité (24),

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Big\{ & \frac{dJ_1}{dt}[(c_1, c_1)J_1 + (c_1, c_2)J_2 + \ldots + (c_1, c_n)J_n] \\ & + \frac{dJ_2}{dt}[(c_2, c_1)J_1 + (c_2, c_2)J_2 + \ldots + (c_2, c_n)J_n] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{dJ_n}{dt}[(c_n, c_1)J_1 + (c_n, c_2)J_2 + \ldots + (c_n, c_n)J_n]. \end{aligned}\right.$$

Soient $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les résistances de n circuits $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Nous aurons

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} R_1 J_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[(c_1, c_1)\frac{dJ_1}{dt} + (c_2, c_1)\frac{dJ_2}{dt} + \ldots + (c_n, c_1)\frac{dJ_n}{dt}\right], \\ R_2 J_2 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[(c_1, c_2)\frac{dJ_1}{dt} + (c_2, c_2)\frac{dJ_2}{dt} + \ldots + (c_n, c_2)\frac{dJ_n}{dt}\right], \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_n J_n &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[(c_1, c_n)\frac{dJ_1}{dt} + (c_2, c_n)\frac{dJ_2}{dt} + \ldots + (c_n, c_n)\frac{dJ_n}{dt}\right]. \end{aligned}\right.$$

En comparant les égalités (25) et (26), on trouve

$$\delta\mathcal{F} = (R_1 J_1^2 + R_2 J_2^2 + \ldots + R_n J_n^2)\,dt,$$

ou bien, en désignant par $d\tau$ le travail non compensé accompli dans le système pendant le temps dt,

$$d\tau = -(R_1 J_1^2 + R_2 J_2^2 + \ldots + R_n J_n^2)\,dt.$$

On arrive donc à cette conclusion :

Dans un système de conducteurs fermés, uniformes, immobiles, non électrolysables, il se produit à chaque instant un travail non compensé négatif.

Cette proposition est en contradiction avec le principe de Carnot-Clausius, d'après lequel tout travail non compensé est essentiellement positif.

D'où proviennent ces diverses contradictions entre les lois de l'Électrodynamique et de l'Induction d'une part et les conséquences du principe de Carnot d'autre part?

Les théorèmes qui forment les conséquences du principe de Carnot reposent sur le postulatum de Clausius et sur le postulatum de Sir W. Thomson, dont la généralité n'est plus contestée par personne. Mais ces deux postulats ne suffisent pas à la démonstration des théorèmes dont il s'agit. La démonstration de ces théorèmes emploie, en outre, certaines notions, telles que la notion de transformation réversible, et ces notions n'ont de sens que pour les systèmes vérifiant la condition suivante :

Étant donné le système, on peut toujours trouver une enceinte et une seule, d'une température déterminée, telle que, le système étant placé dans cette enceinte, on puisse déterminer un système de forces qui le maintienne en équilibre, c'est-à-dire qui maintienne indéfiniment des valeurs invariables aux paramètres qui définissent l'état du système.

Or il est aisé de voir que cette condition n'est jamais réalisée par un système que traversent des courants.

Les paramètres qui définissent un tel système sont :

1° Ceux qui déterminent la forme et la position des divers conducteurs;

2° Ceux qui déterminent la distribution électrique;

3° Ceux qui déterminent l'état physique et chimique de chaque élément;

4° Les intensités des courants.

Peut-on maintenir invariables tous ces paramètres dans une enceinte de température uniforme?

Pour maintenir les premiers invariables, il faut supposer les conducteurs immobiles.

Pour maintenir les seconds invariables, il faut supposer les courants uniformes.

Pour maintenir les troisièmes invariables, il faut supposer les conducteurs non électrolysables.

Nous nous trouvons alors en présence d'un système de circuits fermés, immobiles, non électrolysables, situés dans une enceinte de température uniforme et parcourus par des courants uniformes. Les lois de l'Induction nous apprennent que les intensités de ces courants varient avec le temps suivant les lois établies au Livre XIII, Chapitre IV. Les paramètres de la quatrième classe ne peuvent donc être invariables lorsque les paramètres des trois premières classes le sont.

Ainsi, les conséquences du principe de Carnot ne sont pas applicables aux systèmes qui renferment des courants électriques. Les notions d'entropie, de travail non compensé, de potentiel thermodynamique, n'ont plus de sens pour de semblables systèmes.

Ce qui précède montre combien de précautions doivent être prises avant d'appliquer un théorème de Thermodynamique aux systèmes qui renferment des courants.



CHAPITRE V.

RAISONS QUI ONT FAIT ADOPTER L'ORDRE SUIVI DANS CE VOLUME.

L'ordre suivi dans le présent volume diffère notablement de l'ordre suivant lequel est exposée l'Électrodynamique dans la plupart des livres qui traitent de cette Science ([1]).

Ce dernier, en effet, se rapproche plus ou moins de l'ordre historique; or, les lois des forces exercées par les courants électriques ont été découvertes, sinon dans leur entière généralité, au moins dans le cas des courants fermés et uniformes, bien longtemps avant les lois de l'Induction.

Les lois de l'Électrodynamique, restreintes aux courants fermés et uniformes, étaient définitivement constituées en 1826, au moment où Ampère publia son grand Mémoire intitulé : *Théorie des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience,* Mémoire qui renfermait les résultats des recherches effectuées durant cinq années.

Les phénomènes d'induction ne furent découverts par Faraday qu'en 1831 ([2]). En 1834, Lenz ([3]) énonça la loi qui lie le sens de l'induction exercée par le mouvement des conducteurs au sens de l'action électrodynamique qu'ils exercent. Mais c'est seulement à partir de 1845 que la théorie des phénomènes d'induction commença à être formulée d'une manière précise, au moins pour les courants fermés et uniformes.

C'est, en effet, le 27 octobre 1845 que M. F.-E. Neumann lut

([1]) *Voir* l'Appendice au Livre XIV.

([2]) Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, série I.

([3]) Lenz, *Ueber die Bestimmung der Richtung der durch electrodynamische Vertheilung erregten Ströme* (*Poggendorff's Annalen*, t. XXXI, p. 483; 1834).

à l'Académie des Sciences de Berlin son important Mémoire : *Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme,* où, en s'aidant des recherches d'Ampère sur l'Électrodynamique et en étendant la loi de Lenz au moyen d'une série d'hypothèses, il parvenait à l'énoncé précis de la loi de l'Induction par seul mouvement des conducteurs.

Le 9 août 1847, M. F.-E. Neumann lisait à l'Académie de Berlin un nouveau Mémoire intitulé : *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme,* dans lequel, en transformant par l'introduction du potentiel électrodynamique les résultats obtenus dans le Mémoire précédent, il parvenait enfin à l'énoncé général de la loi de l'Induction entre courants fermés et uniformes.

Dans l'intervalle, en 1846, W. Weber publiait, dans les *Mémoires de la Société Leibnizienne de Gœttingue,* la première Partie de ses *Electrodynamische Maasbestimmungen;* il y exposait sa théorie sur la réduction des forces électrodynamiques à des actions qui s'exerceraient entre particules électriques et dépendraient de leur mouvement; cette théorie lui donnait, elle aussi, la loi de l'induction électrodynamique entre courants fermés et uniformes.

Le 23 juillet 1847, M. Helmholtz lisait à la Société de Physique de Berlin son Mémoire célèbre : *Ueber die Erhaltung der Kraft.*

Dans ce Mémoire, il développait cette idée que la loi de Joule, jointe au principe de la conservation de l'énergie, permettait de déduire la loi de l'Induction de la loi de l'Électrodynamique.

En 1848, W. Thomson publiait une idée analogue dans les *Philosophical Transactions.*

Beaucoup d'auteurs, ayant à exposer la théorie des courants électriques, commencent par établir les lois de l'Électrodynamique; puis, conformément à l'idée de M. Helmholtz, ils font usage de la loi de Joule et du principe de la conservation de l'énergie pour en tirer la loi de l'Induction.

Nous avons suivi l'ordre inverse; ce que nous avons dit au Chapitre précédent va nous permettre de prouver que ce renversement dans la marche reçue nous était imposé, non par le vain désir d'innover, mais par d'importantes raisons théoriques.

A la vérité, les lois de l'Électrodynamique n'ont jamais été éta-

blies directement que dans le cas des courants uniformes; imaginons toutefois que l'on soit parvenu directement, d'une manière quelconque, à la loi fondamentale de l'Électrodynamique, qui est la suivante :

Les forces électrodynamiques admettent pour potentiel la quantité

$$\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum JJ'\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right) ds\, ds', \tag{1}$$

et proposons-nous, suivant la voie ordinairement adoptée, de fonder sur cette proposition la théorie des courants électriques.

Le premier point que nous aurons à examiner sera alors le suivant :

Quelle est l'énergie interne d'un système de conducteurs linéaires traversés par des courants électriques?

En raisonnant comme au Chapitre I, nous pourrons toujours établir que cette énergie interne U est donnée par l'égalité

$$EU = E\Upsilon + W + \sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) q + EU', \tag{2}$$

avec

$$U' = B'\sum JJ'\left(\frac{1+\lambda'}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda'}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right) ds\, ds', \tag{3}$$

B' et λ' étant deux constantes.

Mais, pour pouvoir pousser plus loin, il faut nécessairement connaître les relations qui lient les constantes B' et $\mathfrak{A}^2$ d'une part, et les constantes λ et λ' d'autre part. Or, c'est ici que de graves difficultés se présentent.

La première idée qui s'offre à l'esprit est d'appliquer le théorème des déplacements sans changement d'état, qui, dans les autres branches de l'Électricité et du Magnétisme, relie l'énergie interne au potentiel des forces intérieures. On est donc porté à admettre que le travail effectué par les actions mécaniques intérieures au système est égal à la variation changée de signe de la quantité EU', cette variation étant prise en regardant J et J′ comme des constantes.

Ce point de départ donne immédiatement

$$\Pi = \mathrm{EU}',$$

ou bien

$$(4) \qquad \mathrm{B}' = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2\mathrm{E}}, \qquad \lambda' = \lambda.$$

Ces résultats obtenus, faisons usage de la loi de Joule, qui nous donnera, en désignant par $\eta\, ds$ la force électromotrice étrangère à l'induction et par $\mathcal{E}\, ds$ la force électromotrice d'induction que renferme l'élément ds

$$(5) \qquad \sum\left(\eta - \mathrm{T}\frac{\partial\eta}{\partial\mathrm{T}}\right)\mathrm{J}\, ds\, dt + \sum \mathcal{E}\mathrm{J}\, ds\, dt + \delta\sum\frac{mv^2}{2} = -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + d\mathfrak{T}_e,$$

$d\mathfrak{T}_e$ représentant le travail des forces extérieures.

Soit $d\mathfrak{T}'_i$ le travail des forces intérieures non électrodynamiques; soit $d\mathfrak{T}''_i$ le travail des forces intérieures électrodynamiques. Nous aurons

$$(6) \qquad \delta\sum\frac{mv^2}{2} = d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}'_i + d\mathfrak{T}''_i.$$

D'ailleurs, les théories antérieures à l'Électrodynamique donnent

$$(7) \qquad \sum\left(\eta - \mathrm{T}\frac{\partial\eta}{\partial\mathrm{T}}\right)\mathrm{J}\, ds\, dt + d\mathfrak{T}'_i = -\mathrm{E}\,\delta\Upsilon - \delta\mathrm{W} - \delta\sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q.$$

Nous aurons donc, en vertu des égalités (2), (5), (6), (7),

$$(8) \qquad \sum \mathcal{E}\mathrm{J}\, ds\, dt = -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U}' - d\mathfrak{T}''_i.$$

Or, d'après les égalités (3) et (4),

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned} -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U}' = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum \mathrm{JJ}'\,\delta\left[\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right) ds\, ds'\right] \\ & + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}dt\sum \mathrm{J}\, ds\sum\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\frac{d\mathrm{J}'}{dt}ds'. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, d'après l'égalité (1),

$$(10) \qquad -d\mathfrak{T}''_i = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum \mathrm{JJ}'\,\delta\left[\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right) ds\, ds'\right].$$

D'après les égalités (9) et (10), l'égalité (8) devient

$$(11)\quad \sum\left[\mathcal{E} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\frac{dJ'}{dt}ds'\right]J\,ds = 0.$$

Cette égalité (11) est absolument incompatible avec l'égalité

$$(12)\quad \mathcal{E}\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}ds\sum\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)dJ'\,ds'$$

qui exprime, nous le savons, la véritable loi de l'Induction.

On n'aperçoit qu'une seule manière de satisfaire à l'égalité (11), c'est de poser

$$(13)\quad \mathcal{E}\,ds = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}ds\sum\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\frac{dJ'}{dt}ds'.$$

D'après cette formule (13) :

1° *Il n'y aurait pas d'induction par seul mouvement des conducteurs.*

2° *La force électromotrice d'induction par variation d'intensité aurait la grandeur donnée par la théorie de Neumann, mais un signe contraire, en sorte que l'équilibre électrique sur des conducteurs linéaires immobiles serait un équilibre instable.*

Telles sont les conséquences auxquelles on parviendrait naturellement en suivant la voie que nous avons indiquée; auxquelles par exemple, M. H. von Helmholtz aurait dû parvenir, si, conformément à l'analogie complète qu'il admet entre le potentiel électromagnétique et le potentiel magnétique [1], il avait établi entre le potentiel électromagnétique et l'énergie interne électromagnétique la relation qui existe entre le potentiel magnétique et l'énergie interne magnétique.

Mais les physiciens ont naturellement laissé de côté cette voie qui les eût menés à des résultats absurdes. La modification qu'ils y ont apportée consiste à supposer, peu explicitement d'ailleurs, que les relations (4), conformes au théorème des déplacements sans changements d'état, doivent être remplacées par les rela-

---

[1] HELMHOLTZ, *Ueber die Erhaltung der Kraft*, p. 64.

tions, que nous savons maintenant être exactes,

$$(14)\qquad B' = \frac{\mathfrak{A}^2}{2E}, \qquad \lambda' = \lambda,$$

ou, en d'autres termes, que l'on doit avoir

$$(15)\qquad E\,\Delta U = -d\mathfrak{G}'_i + d\mathfrak{G}''_i,$$

ΔU représentant la variation que subit U, lorsqu'on y fait varier seulement les paramètres qui fixent la forme géométrique du système.

Cette égalité établit une différence profonde entre la relation qui lie l'énergie interne au travail des actions électrodynamiques et la relation qui lie cette même énergie interne au travail des actions de gravitation, capillaires, électrostatiques, magnétiques, etc.

Lorsqu'on suit la théorie que nous venons d'exposer dans les précédents Chapitres, cette égalité se présente comme la conséquence finale d'une suite d'hypothèses très naturelles et de déductions très claires, en sorte qu'elle ne constitue plus qu'un paradoxe, facile, d'ailleurs, à expliquer dans l'état actuel de la Thermodynamique.

Prise, au contraire comme point de départ d'une théorie, elle paraît fort invraisemblable, et devait surtout le paraître à une époque où l'obscurité qui entourait les principes de la Thermodynamique en rendait l'explication presque impossible. Aussi M. Helmholtz, Sir W. Thomson, les physiciens qui, après eux, ont suivi la même voie, ont-ils dissimulé l'invraisemblance du point de départ sous la brièveté et l'obscurité de l'exposé; méthode à ce point dangereuse que certains physiciens, en voulant reproduire leur raisonnement, obtiennent une valeur de la force électromotrice d'induction précisément de signe contraire à la véritable valeur de cette force donnée par la loi de Neumann.

Il y a donc grand inconvénient au point de vue logique, à admettre, *a priori*, et à prendre comme point de départ la proposition paradoxale exprimée par l'égalité (15), proposition dont la Thermodynamique montre la possibilité, mais dont elle ne prouve pas la nécessité.

Admettons néanmoins cette proposition.

La loi de Joule nous donnera encore l'égalité (5); pour trans-

former celle-ci, nous pourrons continuer de faire usage des égalités (6) et (7), qui nous donneront de nouveau l'égalité

$$(8)\qquad \sum \mathcal{E}\, \mathrm{J}\, ds\, dt = -\mathrm{E}\,\delta \mathrm{U}' - d\mathfrak{T}''_i.$$

Mais, tandis que, dans cette égalité (8), $-d\mathfrak{T}''_i$ conservera la valeur donnée par l'égalité (10), l'égalité (9) devra, en vertu des égalités (14), être remplacée par l'égalité

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\,\delta\mathrm{U}' = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum \mathrm{JJ}'\delta\left[\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right) ds\, ds'\right] \\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, dt \sum \mathrm{J}\, ds \sum\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)\frac{d\mathrm{J}'}{dt}\, ds. \end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (10) et (16), l'égalité (8) devient

$$(17)\quad \sum\left\{\mathcal{E}\, ds\, dt + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left[ds\sum\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\mathrm{J}'\, ds'\right]\right\}\mathrm{J} = 0.$$

Il est bien clair que cette égalité (17) est vérifiée si l'on remplace $\mathcal{E}\, ds\, dt$ par

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left[ds\sum\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\mathrm{J}'\, ds'\right]$$

qui en représente la véritable valeur; mais il n'est pas parfaitement clair que ce soit là la seule manière de vérifier l'égalité (17), en sorte que cette égalité ne suffit pas, à elle seule, pour déterminer complètement la loi de l'induction électrodynamique; en particulier, si, dans un élément ou dans un groupe d'éléments, on a $\mathrm{J} = 0$, on peut, en chaque point de cet élément ou de ce groupe donner à $\mathcal{E}$ une valeur arbitraire.

Ainsi, lorsqu'on veut, conformément à l'ordre reçu, passer de la loi de l'Électrodynamique à la loi de l'Induction, en employant comme voies de passage la loi de Joule et le principe de la conservation de l'énergie, on se heurte à deux difficultés, dont la première est particulièrement grave :

1° On est obligé d'accepter, à titre de principe fondamental, une relation dans laquelle les actions électrodynamiques se comportent, à l'égard de l'énergie interne d'un système, d'une manière précisément inverse des autres actions étudiées dans les diverses parties de la Physique; en sorte que cette relation est

exactement de sens contraire à celle dont on serait naturellement porté, par voie d'analogie, à admettre l'existence. La Thermodynamique peut bien montrer la possibilité de la relation qui doit ainsi être admise, mais non point en prouver la nécessité, ni même établir l'impossibilité de la relation inverse; celle-ci, cependant, doit être rejetée malgré les raisons d'analogie. Les résultats ainsi fournis par la Thermodynamique satisfont l'esprit lorsque la relation en question se présente comme conséquence d'une théorie logique et qu'il s'agit seulement d'expliquer ce qu'elle présente de paradoxal; ils ne le satisfont plus si la relation en question doit devenir le fondement même de la théorie.

2° On obtient, entre les forces électromotrices d'induction qui agissent dans les divers éléments du système une seule relation, qui ne suffit pas pour déterminer isolément la valeur de chacune de ces forces.

Telles sont les raisons qui doivent faire abandonner l'ordre suivi par M. von Helmholtz et suivre l'ordre inverse. De la théorie de M. von Helmholtz il reste néanmoins l'idée capitale : à savoir la possibilité de relier la loi de l'Induction, la loi de l'Électrodynamique et la loi de Joule par le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail.



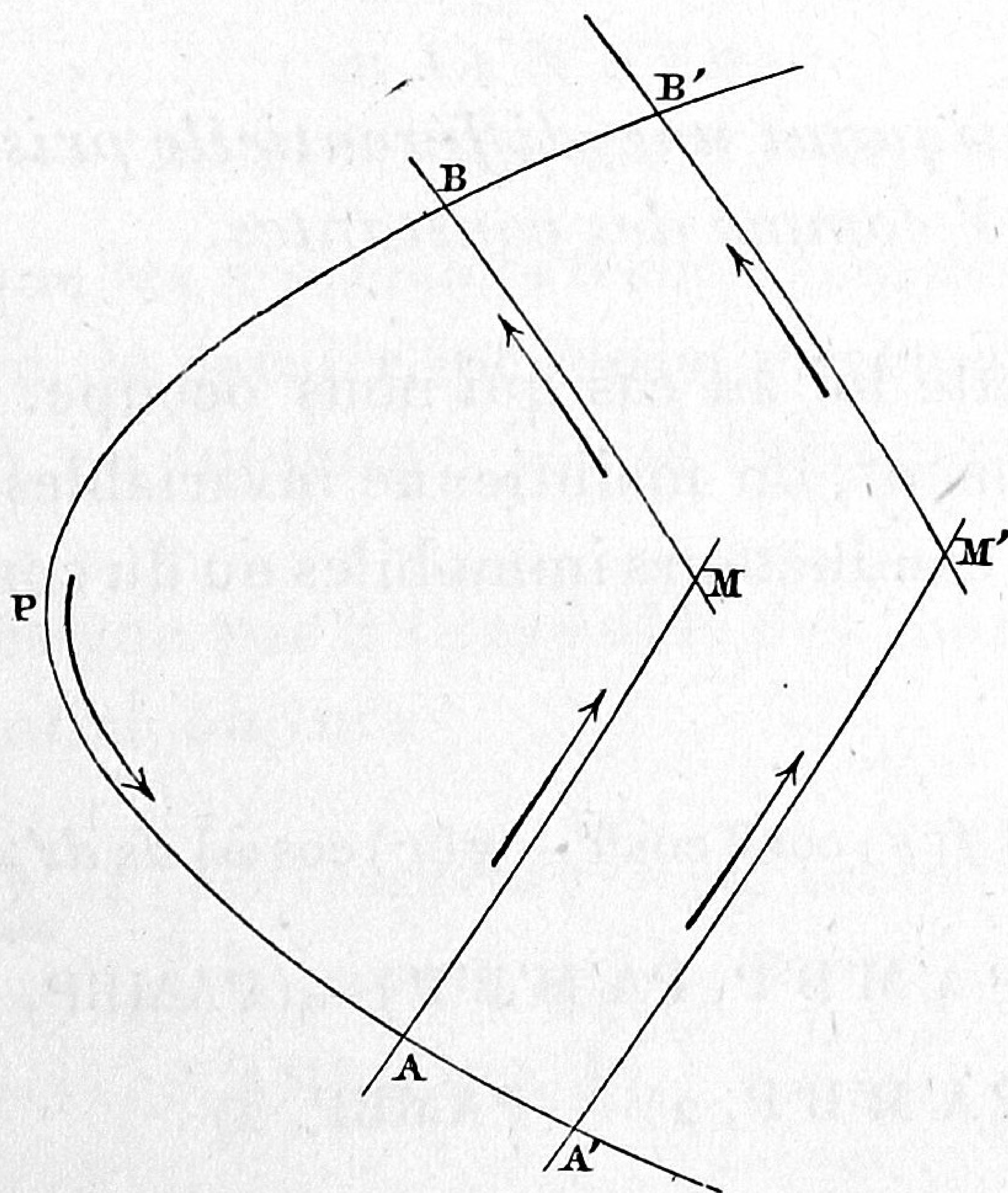
CHAPITRE VI.

RELATIONS ENTRE LA LOI DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE ET LA LOI DE L'INDUCTION. LOI DE NEUMANN. LOI DE LENZ.

Imaginons que l'on ait un système de courants 1, 2, ..., n et que l'on déplace et déforme l'un d'eux, le conducteur 1 par exemple. Si le conducteur 1 est ouvert à ses deux extrémités, l'intensité est égale à o à ses deux extrémités; s'il est fermé, elle varie d'une manière continue d'un point à un autre. Il est facile de voir que tous les déplacements et toutes les déformations possibles du conducteur 1 pourront être ramenées comme cas particulier au type suivant :

Supposons qu'on déplace un segment quelconque AMB appar-

Fig. 43.



tenant à un circuit quelconque PAMBP (*fig*. 43). Supposons que

les extrémités du segment considéré ne demeurent pas fixes, mais glissent sur les parties immobiles du circuit. Supposons en outre que cette partie mobile du circuit renferme des lignes de glissement, une par exemple, en M.

Imaginons que l'on amène ce segment AMB dans une position infiniment voisine A'M'B' et cherchons à déterminer le travail des actions électrodynamiques durant ce déplacement.

Désignons par

$$(C, C')$$

le potentiel électrodynamique mutuel de deux conducteurs ou de deux segments de conducteur, C et C', traversés par certains courants déterminés.

Le travail des actions électrodynamiques est déterminé par la loi générale suivante :

Lorsqu'on déplace les uns par rapport aux autres les divers conducteurs qui forment un système quelconque de courants, les actions électrodynamiques que ces divers conducteurs exercent les uns sur les autres effectuent un travail $d\tau$ *tel que l'on ait*

$$d\tau = -\,D\sum JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds', \tag{1}$$

le symbole D *indiquant une différentielle prise en regardant les intensités* J, J' *comme des constantes.*

Appliquons cette loi au cas qui nous occupe. Imaginons que, durant le mouvement, on maintienne invariables les intensités en chaque point des conducteurs immobiles ou du conducteur déplacé. Nous aurons

$$\begin{aligned} D\sum JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \\ = (PA'M'B'P,\ PA'M'B'P) - (PAMBP,\ PAMBP) \\ + (PA'M'B'P,\ 2) - (PAMBP,\ 2) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (PA'M'B'P,\ n) - (PAMBP,\ n), \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} D \sum JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \\ = (BPA, AA') + (BPA, A'M'B') + (BPA, B'B) - (BPA, AMB) \\ + (\quad 2, AA') + (\quad 2, A'M'B') + (\quad 2, B'B) - (\quad 2, AMB) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (\quad n, AA') + (\quad n, A'M'B') + (\quad n, B'B) - (\quad n, AMB) \\ + (AA'M'B'B, AA'M'B'B) - (AMB, AMB). \end{aligned}$$

Supposons qu'en tout point du conducteur AMB on renverse l'intensité du courant sans en changer la grandeur.

Désignons par le symbole BMA ce nouvel état du conducteur AMB. Nous aurons, d'une manière générale,

$$(C, BMA) = -(C, AMB).$$

Il est facile de voir aussi que

$$(C, AA') + (C, A'M'B) + (C, B'B) + (C, BMA) = (C, AA'M'B'BMA).$$

On aura donc

$$\begin{aligned} D \sum JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \\ = (AMBPA, AA'M'B'BMA) \\ + (\quad 2, AA'M'B'BMA) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (\quad n, AA'M'B'BMA) \\ + (AA'M'B'BMA, AA'M'B'BMA). \end{aligned}$$

Mais, tandis que les n premiers termes sont des infiniment petits du premier ordre, le dernier, potentiel électrodynamique du circuit AA'M'B'BA sur lui-même, est un infiniment petit du second ordre.

Si donc on désigne par S l'ensemble des courants 1, 2, ..., n, dans leur état initial, on aura

$$\begin{aligned} D \sum JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds' \\ = (S, AA'M'B'BMA) \\ = -(S, AMBB'M'A'A), \end{aligned}$$

et l'égalité (1) deviendra

$$d\tau = (S, AMBB'M'A'A). \tag{2}$$

Le travail effectué par les actions électrodynamiques intérieures à un système lorsqu'on déforme ou déplace d'une manière quelconque un segment AMB *de conducteur appartenant à ce système est égal au potentiel électrodynamique du système dans son état primitif (y compris le conducteur soumis au déplacement), sur un courant fermé formé de la manière suivante :*

1° *Le segment* AMB *dans sa position initiale, parcouru par le courant qui le parcourt initialement ;*

2° *Le chemin* BB′ *du point* B, *parcouru de* B *en* B′ *par un courant dont l'intensité égale celle du courant qui arrive en* B *par* AMB ;

3° *Le segment* B′M′A′ *parcouru par un courant dont l'intensité a, en chaque point, la même valeur qu'au point correspondant de* BMA, *mais un signe contraire;*

4° *Le chemin renversé* A′A *du point* A, *parcouru de* A′ *en* A *par un courant dont l'intensité égale celle du courant qui part de* A *pour se rendre dans* AMB.

Cette proposition fondamentale a été donnée par F.-E. Neumann [1] pour le cas des courants uniformes.

L'égalité (2) va pouvoir se mettre sous une autre forme.

Divisons le segment AM en n éléments (*fig.* 44)

$$\mathrm{A}\alpha_1 = ds_1, \qquad \alpha_1\alpha_2 = ds_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{n-1}\mathrm{M} = ds_n.$$

Divisons le segment MB en p éléments

$$\mathrm{M}\beta_1 = d\sigma_1, \qquad \beta_1\beta_2 = d\sigma_2, \qquad \ldots, \qquad \beta_{p-1}\mathrm{B} = d\sigma_p.$$

Dans le mouvement du conducteur AM,

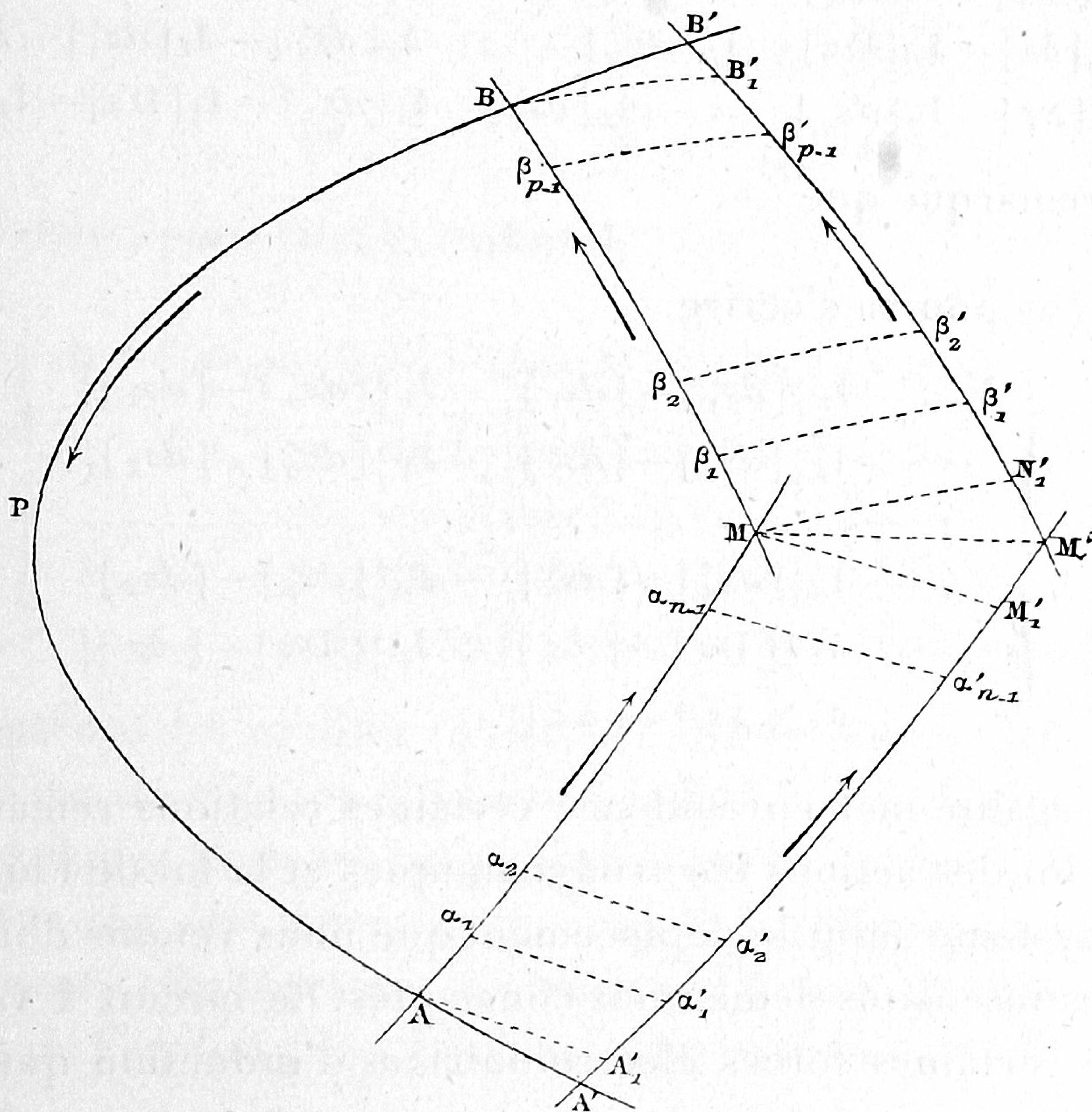
Le point	A	vient en	A'_1,
»	α_1	»	α'_1,
»	α_2	»	α'_2,
...	...	...	...,
»	α_{n-1}	»	α'_{n-1},
»	M	»	M'_1.

(1) F.-E. Neumann, *Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme* (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1845).

Dans le mouvement du conducteur MB,

Le point	M	vient en	N'_1,
»	β_1	»	β'_1,
»	β_2	»	β'_2,
.....	......	......	......,
»	β_{p-1}	»	β'_{p-1},
»	B	»	B'_1.

Fig. 44.



Posons

$$\begin{aligned}
\delta s &= AA', & \Delta\sigma &= M'N'_1,\\
Ds &= A'A'_1, & d\sigma'_1 &= M'_1\beta'_1,\\
ds'_1 &= A'_1\alpha'_1, & d\sigma'_2 &= \beta'_1\beta'_2,\\
ds'_2 &= \alpha'_1\alpha'_2, & &\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots, & d\sigma'_p &= \beta'_{p-1}B'_1,\\
ds'_n &= \alpha'_{n-1}M'_1, & D\sigma &= B'_1B',\\
\Delta s &= M'_1M', & \delta\sigma &= B'B.
\end{aligned}$$

Soient

$$I_1,\quad I_2,\quad \ldots,\quad I_n,\quad J_1,\quad J_2,\quad \ldots,\quad J_p$$

les valeurs des intensités dans les éléments

$$ds_1, \quad ds_2, \quad \ldots, \quad ds_n, \quad d\sigma_1, \quad d\sigma_2, \quad \ldots, \quad d\sigma_p.$$

Soit enfin

$$[ds]$$

le potentiel électrodynamique du système primitif sur l'élément ds parcouru, dans le sens positif, par un courant égal à l'unité. Nous verrons sans peine que l'on a

$$\begin{aligned}
&(S, AMBB'M'A'A) \\
&\quad = I_1[ds_1] + I_2[ds_2] + \ldots + I_n[ds_n] + J_1[d\sigma_1] + J_2[d\sigma_2] + \ldots + J_p[d\sigma_p] \\
&\qquad - J_p[\delta\sigma] - J_p[D\sigma] - J_p[d\sigma'_p] - \ldots - J_2[d\sigma'_2] - J_1[d\sigma'_1] - J_1[\Delta\sigma] \\
&\qquad - I_n[\Delta s] - I_n[ds'_n] - \ldots - I_2[ds'_2] - I_1[ds'_1] - I_1[Ds] - I_1[\delta s].
\end{aligned}$$

Si l'on remarque que

$$I_n = J_1,$$

l'égalité (2) pourra s'écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\tau = &- I_1\{[ds'_1] - [ds_1]\} - J_1\{[d\sigma'_1] - [d\sigma_1]\} \\
&- I_2\{[ds'_2] - [ds_2]\} - J_2\{[d\sigma'_2] - [d\sigma_2]\} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- I_n\{[ds'_n] - [ds_n]\} - J_p\{[d\sigma'_p] - [d\sigma_p]\} \\
&- I_1\{[Ds] + [\delta s]\} - J_p\{[D\sigma] + [\delta\sigma]\} \\
&- J_1\{[\Delta s] + [\Delta\sigma]\}.
\end{aligned}\right.$$

Cette égalité met en évidence certaines relations remarquables entre la loi des actions électrodynamiques et la loi de l'induction.

Si le système subit le déplacement que nous venons d'imaginer, toutes les intensités demeurant constantes, le circuit 1 va être le siège de certaines forces électromotrices d'induction qui seront :

Dans l'élément ds'_1 .... $e_1\, ds'_1 = \frac{1}{dt}\{[ds'_1] - [ds_1]\}$,

» ds'_2 .... $e_2\, ds'_2 = \frac{1}{dt}\{[ds'_2] - [ds_2]\}$,

....,

» ds'_n .... $e_n\, ds'_n = \frac{1}{dt}\{[ds'_n] - [ds_n]\}$,

» $d\sigma'_1$ .... $\varepsilon_1\, d\sigma'_1 = \frac{1}{dt}\{[d\sigma'_1] - [d\sigma_1]\}$,

» $d\sigma'_2$ .... $\varepsilon_2\, d\sigma'_2 = \frac{1}{dt}\{[d\sigma'_2] - [d\sigma_2]\}$,

....,

Dans l'élément $d\sigma'_p$........ $\varepsilon_p d\sigma'_p = \frac{1}{dt}\{[d\sigma'_p]-[d\sigma_p]\}$,

» Ds.......... $E\,Ds = \frac{1}{dt}[Ds]$,

» δs.......... $\mathcal{E}\,\delta s = \frac{1}{dt}[\delta s]$,

» Δs.......... $H\,\Delta s = \frac{1}{dt}[\Delta s]$,

» $D\sigma$.......... $E'\,D\sigma = \frac{1}{dt}[D\sigma]$,

» $\delta\sigma$.......... $\mathcal{E}'\,\delta\sigma = \frac{1}{dt}[\delta\sigma]$,

» $\Delta\sigma$.......... $H'\,\Delta\sigma = \frac{1}{dt}[\Delta\sigma]$.

On a donc, pour tout le circuit 1,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} dt\int \mathcal{E}\,ds = {} & \{[ds'_1]-[ds_1]\} + \{[d\sigma'_1]-[d\sigma_1]\} \\ & + \{[ds'_2]-[ds_2]\} + \{[d\sigma'_2]-[d\sigma_2]\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \{[ds'_n]-[ds_n]\} + \{[d\sigma'_p]-[d\sigma_p]\} \\ & + [Ds]+[\delta s]+[\Delta s]+[D\sigma]+[\delta\sigma]+[\Delta\sigma]. \end{aligned}\right.$$

Comparons les égalités (3) et (4). Si le circuit déformé était traversé par un courant d'intensité égale à l'unité, les actions électrodynamiques exercées sur ce circuit par le système pris tout entier, dans son état primitif, y compris le conducteur soumis au mouvement, effectueraient un travail $d\mathfrak{T}$ dont la valeur peut se déduire de l'égalité (3); il est facile de voir que

$$(5)\qquad dt\int \mathcal{E}\,ds = -\,d\mathfrak{T}.$$

On arrive donc ainsi à cette proposition, énoncée en 1847 par F.-E. Neumann pour le cas des courants uniformes :

Si, dans un système formé par des conducteurs que traversent des courants quelconques, on déforme et déplace un de ces conducteurs en laissant les autres immobiles et en maintenant invariable l'intensité du courant qui traverse chaque élément, le conducteur déplacé est le siège de forces électromotrices d'induction. Considérons celles de ces forces qui sont

dues au seul mouvement du conducteur. La somme de ces forces s'obtient en divisant par la durée du déplacement le travail qu'effectueraient les actions électrodynamiques exercées par tout le système, pris dans son état actuel (y compris l'induit), sur un conducteur identique à l'induit traversé par un courant égal à l'unité, et en changeant le signe du quotient.

Cette proposition fournit une première relation entre les actions électrodynamiques et l'induction. Elle ramène à un problème d'Électrodynamique le calcul de la force électromotrice intégrale d'induction engendrée dans un conducteur par le seul mouvement de ce conducteur.

On peut en déduire une seconde relation.

Supposons que les forces électromotrices d'induction que nous venons d'étudier soient employées à produire un courant uniforme dans le circuit induit; elles y engendreraient un courant d'intensité

$$J = \frac{1}{R}\int \mathcal{E}\, ds,$$

R étant la résistance de l'induit.

D'après l'égalité (5), on a

$$J = -\frac{1}{R}\frac{d\mathfrak{I}}{dt}.$$

D'autre part, les actions exercées par tout le système, y compris l'induit, sur un conducteur identique à l'induit traversé par un courant d'intensité J, effectueraient, si l'on imposait la déformation considérée à ce conducteur, un travail qui, d'après l'égalité (3), aurait pour valeur

$$d\Theta = J\, d\mathfrak{I}.$$

On aurait donc

$$d\Theta = -\frac{1}{R}\frac{(d\mathfrak{I})^2}{dt},$$

égalité qui prouve que $d\Theta$ est essentiellement négatif et permet d'énoncer la proposition suivante :

*Si, dans un système formé par des conducteurs que traversent des courants quelconques, on déforme et déplace un des conducteurs que nous nommerons l'*induit, *en laissant immobiles les autres conducteurs et en laissant invariable l'in-*

tensité du courant qui traverse chaque élément, l'induit est le siège de certaines forces électromotrices d'induction. Si ces forces agissaient seules dans l'induit pour y engendrer un courant uniforme, ce courant aurait une certaine intensité J. *Les forces exercées par tout le système (y compris l'induit) sur un conducteur identique à l'induit traversé par un courant uniforme d'intensité* J *effectueraient un travail négatif dans la déformation considérée du système, et, par conséquent, tendraient à s'opposer à cette déformation.*

C'est la loi de Lenz [1], dont F.-E. Neumann a fait le fondement de ses travaux sur la théorie de l'Induction.

---

(1) LENZ, *Ueber die Bestimmung der Richtung der durch electrodynamische Vertheilung erregten Ströme* (*Poggendorff's Annalen*, t. XXI, p. 483; 1834).



CHAPITRE VII.

DÉFINITION DE L'ACTION EXERCÉE SUR UN ÉLÉMENT COURANT.

Nous avons vu que la loi fondamentale de l'Électrodynamique était la suivante :

Lorsqu'on déplace les uns par rapport aux autres les divers conducteurs qui forment un système quelconque de courants, les actions électrodynamiques que ces divers conducteurs exercent les uns sur les autres effectuent un travail $d\tau$ *tel que l'on ait*

$$(1) \qquad d\tau = -\,D\sum JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds',$$

le symbole D *indiquant une différentielle prise en regardant les intensités* J, J' *comme des constantes.*

Cette loi définit le travail effectué par les actions électrodynamiques dans une déformation quelconque du système, et, par conséquent, elle détermine les actions électrodynamiques aussi complètement qu'il peut être nécessaire, car, dans une question quelconque, les actions électrodynamiques ne s'introduisent jamais que par leur travail élémentaire, réel ou virtuel.

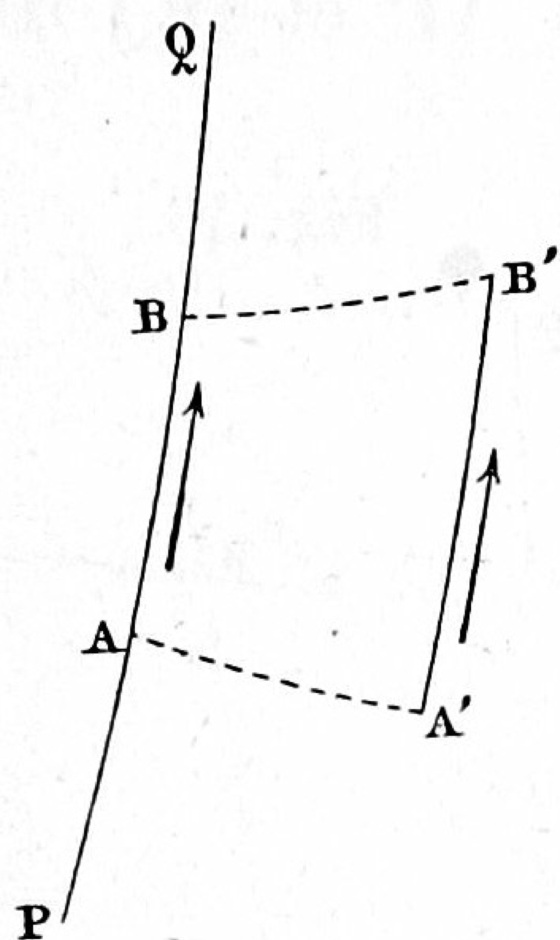
Un élément de courant ne peut jamais se mouvoir isolément; il doit toujours, dans son mouvement, faire partie d'un courant réalisable le long duquel l'intensité varie d'une manière continue. L'expression de *force appliquée à un élément de courant* n'a donc, par elle-même, aucun sens ; elle doit être l'objet d'une définition qui peut se donner de la manière suivante :

Soit $AB = ds$ (*fig.* 45) un élément de courant, traversé de A en B par un courant, d'intensité $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ au point A et d'intensité $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ au point B. Dans une déformation infini-

ment petite quelconque du système, cet élément vient en A'B'. Son extrémité A décrit le chemin AA' et son extrémité B le chemin BB'.

Supposons que l'on puisse appliquer à l'élément $AB = ds$ un système de forces F jouissant de la propriété que voici :

Fig. 45.



Dans tout déplacement de l'élément AB, *les forces* F *effectuent un travail égal au potentiel électrodynamique du système donné, à l'instant t, sur un circuit fermé infiniment petit composé de la manière suivante :*

1° *L'élément* AB, *parcouru de* A *en* B *par un courant d'intensité* J *au milieu* M *de cet élément, d'intensité* $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ *au point* A *et d'intensité* $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ *au point* B;

2° *Le chemin* BB' *du point* B, *parcouru de* B *en* B' *par un courant d'intensité* $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$;

3° *L'élément* B'A', *parcouru de* B' *en* A' *par un courant d'intensité* $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ *au point* B', *d'intensité* J *au milieu* M' *de l'élément, d'intensité* $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ *au point* A';

4° *Le chemin renversé* A'A *du point* A, *parcouru* de A' *en* A *par un courant d'intensité* $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$.

Nous verrons, à la fin du présent Chapitre, qu'il existe un tel système de forces F et nous apprendrons, au prochain Chapitre, à le déterminer.

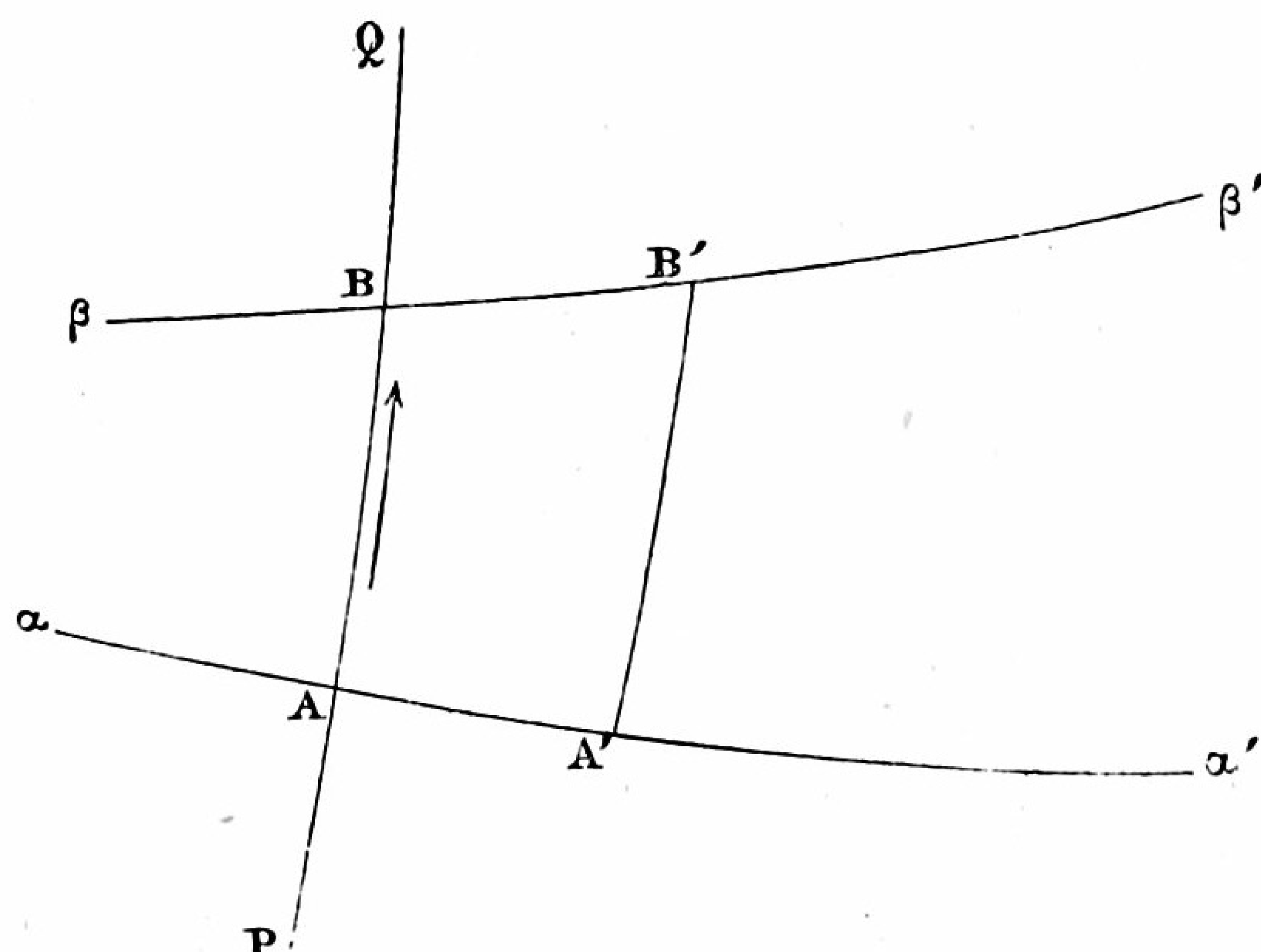
Nous dirons que *l'ensemble des forces* F *représente l'action*

électrodynamique exercée, sur l'élément AB $= ds$, *par tout le système.*

Cette définition n'est pas entièrement arbitraire. Elle trouve sa justification dans les considérations suivantes :

1° Imaginons que, par les points A et B, on ait fait passer deux segments de fils conducteurs $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ (*fig.* 46); imaginons que l'élément AB ne soit pas invariablement lié par ses extrémités A et B aux parties voisines AP et BQ du fil conducteur auquel il

Fig. 46.



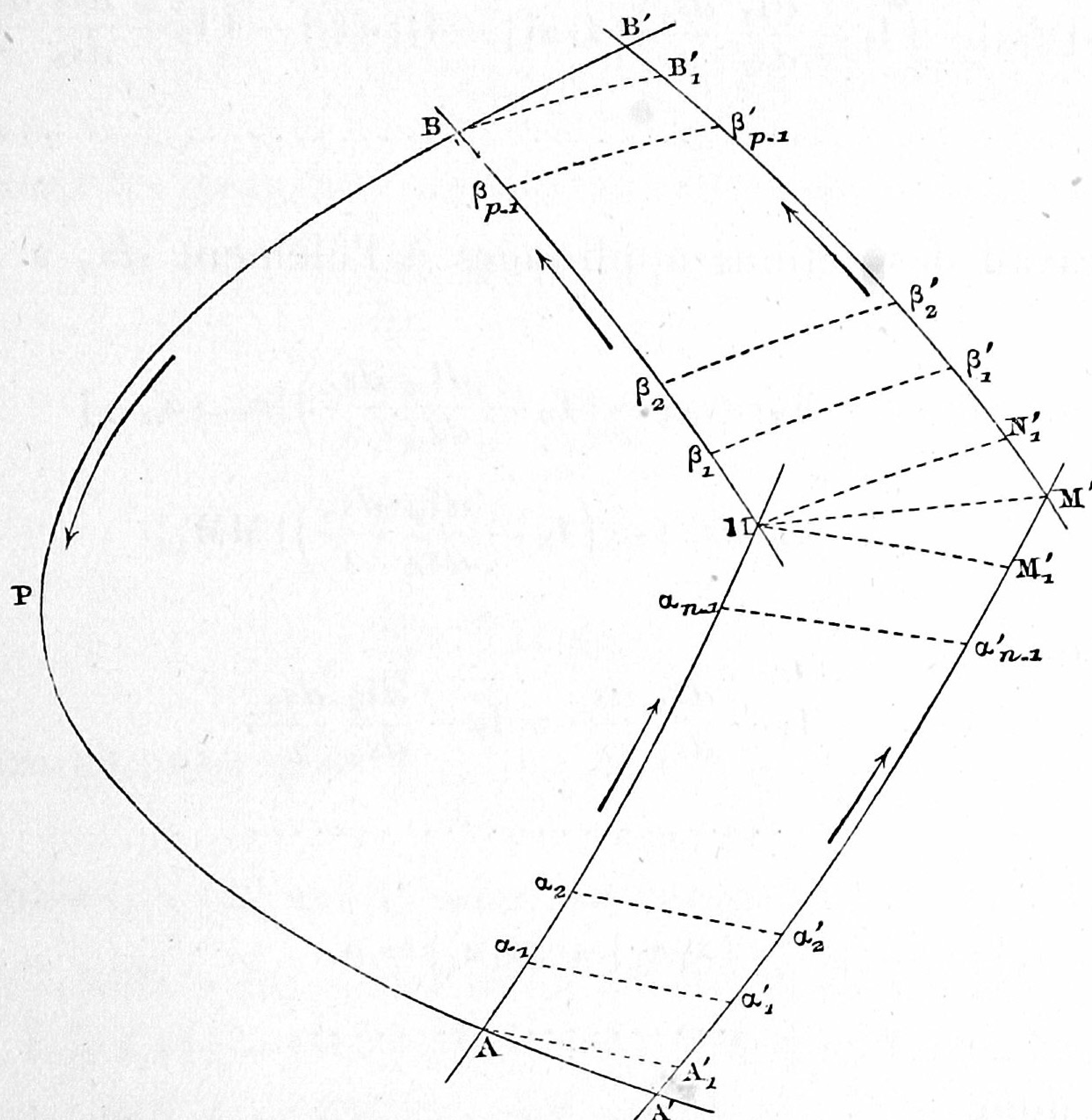
appartient, mais que ces extrémités A et B puissent librement glisser, l'une sur $\alpha\alpha'$ et l'autre sur $\beta\beta'$. Le phénomène n'est évidemment pas incompatible avec les propriétés des courants. Lorsque l'élément AB vient en A'B', on peut concevoir que le courant, au lieu d'arriver en A avec l'intensité $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$, de passer en M avec l'intensité J et enfin de sortir en B avec l'intensité $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$, suive le chemin AA' avec l'intensité $J - \left(\frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$, puis entre dans l'élément A'B', passe en M' avec l'intensité J, et enfin marche de B' en B avec l'intensité $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$. L'intensité demeure continue le long du circuit auquel appartient l'élément AB et la transformation considérée peut être conçue comme réalisable.

Or, si l'on se reporte au théorème démontré au début du Chapitre précédent, on verra sans peine que le travail effectué dans la modification considérée par les actions électrodynamiques est précisément égal au travail effectué par ce que nous avons appelé les *forces appliquées à l'élément* AB.

Ainsi, *lorsqu'on déplace d'une manière réalisable quelconque un seul élément d'un conducteur, le travail accompli par les actions électrodynamiques se réduit au travail des forces appliquées à l'élément.*

2° Supposons maintenant qu'on déplace de la même manière un segment fini quelconque AMB (*fig.* 47) appartenant à un cir-

Fig. 47.



cuit quelconque PAMBP. D'après l'égalité (3) du Chapitre précédent, le travail effectué par les actions électrodynamiques a pour valeur

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
d\tau = &- \mathrm{I}_1 \{[ds'_1] - [ds_1]\} - \mathrm{J}_1 \{[d\sigma'_1] - [d\sigma_1]\} \\
&- \mathrm{I}_2 \{[ds'_2] - [ds_2]\} - \mathrm{J}_2 \{[d\sigma'_2] - [d\sigma_2]\} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \mathrm{I}_n \{[ds'_n] - [ds_n]\} - \mathrm{J}_p \{[d\sigma'_p] - [d\sigma_p]\} \\
&- \mathrm{I}_1 \{[\mathrm{D}s\ ] + [\delta s\ ]\} - \mathrm{J}_p \{[\mathrm{D}\sigma\ ] - [\delta\sigma\ ]\} \\
&- \mathrm{J}_1 \{[\Delta s\ ] + [\Delta\sigma\ ]\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Or le travail des actions appliquées à l'élément ds_1 a pour valeur

$$d\mathfrak{T}_1 = \mathrm{I}_1[ds_1] - \left(\mathrm{I}_1 - \frac{d\mathrm{I}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{2}\right)[\mathrm{AA}'_1] - \mathrm{I}_1[ds'_1] - \left(\mathrm{I}_1 + \frac{d\mathrm{I}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{2}\right)[\alpha'_1\alpha''_1].$$

Le travail des actions appliquées à l'élément ds_2 a pour valeur

$$d\mathfrak{T}_2 = \mathrm{I}_2[ds_2] - \left(\mathrm{I}_2 - \frac{d\mathrm{I}_2}{ds_2}\frac{ds_2}{2}\right)[\alpha_1\alpha'_1] - \mathrm{I}_2[ds'_2] - \left(\mathrm{I}_2 + \frac{d\mathrm{I}_2}{ds_2}\frac{ds_2}{2}\right)[\alpha'_1\alpha_2],$$

. . . .

Le travail des actions appliquées à l'élément ds_n a pour valeur

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_n = {} & \mathrm{I}_n[ds_n] - \left(\mathrm{I}_n - \frac{d\mathrm{I}_n}{ds_n}\frac{ds_n}{2}\right)[\alpha_{n-1}\alpha'_{n-1}] \\ & - \mathrm{I}_n[ds'_n] - \left(\mathrm{I}_n + \frac{d\mathrm{I}_n}{ds_n}\frac{ds_n}{2}\right)[\mathrm{MM}'_1]. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\mathrm{I}_1 + \frac{d\mathrm{I}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{2} = \mathrm{I}_2 - \frac{d\mathrm{I}_2}{ds_2}\frac{ds_2}{2},$$

. . . .

et aussi

$$[\alpha'_1\alpha_1] + [\alpha_1\alpha'_1] = 0,$$

. . . .

On a donc

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{T}_1 + d\mathfrak{T}_2 + \ldots + d\mathfrak{T}_n = & - \mathrm{I}_1\{[ds'_1] - [ds_1]\} \\ & - \mathrm{I}_2\{[ds'_2] - [ds_2]\} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - \mathrm{I}_n\{[ds'_n] - [ds_n]\} \\ & - \left(\mathrm{I}_1 + \frac{d\mathrm{I}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{2}\right)[\mathrm{AA}'_1] \\ & + \left(\mathrm{I}_n + \frac{d\mathrm{I}_n}{ds_n}\frac{ds_n}{2}\right)[\mathrm{MM}'_1]. \end{aligned} \right.$$

Si l'on désigne par $d\Theta_1$, $d\Theta_2$, ..., $d\Theta_p$ le travail des actions électrodynamiques appliquées à chacun des éléments $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, ...,

$d\sigma_p$, on aura de même

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} d\Theta_1 + d\Theta_2 + \ldots + d\Theta_p = &- \mathrm{J}_1 \{[d\sigma'_1] - [d\sigma_1]\} \\ &- \mathrm{J}_2 \{[d\sigma'_2] - [d\sigma_2]\} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- \mathrm{J}_p \{[d\sigma'_p] - [d\sigma_p]\} \\ &- \left(\mathrm{J}_1 - \frac{d\mathrm{J}_1}{d\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{2}\right)[\mathrm{MN}'_1] \\ &+ \left(\mathrm{J}_p + \frac{d\mathrm{J}_p}{d\sigma_p}\frac{d\sigma_p}{2}\right)[\mathrm{BB}_1]. \end{aligned}\right.$$

Négligeons les quantités infiniment petites du second ordre

$$\frac{d\mathrm{I}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{2}[\mathrm{AA}'_1],$$

$$\frac{d\mathrm{I}_n}{ds_n}\frac{ds_n}{2}[\mathrm{MM}'_1],$$

$$\frac{d\mathrm{J}_1}{d\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{2}[\mathrm{MN}'_1],$$

$$\frac{d\mathrm{J}_p}{d\sigma_p}\frac{d\sigma_p}{2}[\mathrm{BB}'_1];$$

remarquons en outre que

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_1$$

et les égalités (1), (2) et (3) nous donneront

$$\begin{aligned} &d\tau - (d\mathfrak{T}_1 + d\mathfrak{T}_2 + \ldots + d\mathfrak{T}_n + d\Theta_1 + d\Theta_2 + \ldots + d\Theta_p) \\ &= \mathrm{I}_1 \{[\mathrm{AA}'_1] - [\delta s] - [\mathrm{D}s]\} - \mathrm{J}_p \{[\mathrm{BB}'_1] + [\delta\sigma] - [\mathrm{D}\sigma]\} \\ &\quad + \mathrm{J}_1 \{[\mathrm{MN}'_1] - [\mathrm{MM}'_1] - [\Delta s] - [\Delta\sigma]\}; \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire, en reprenant les notations du Chapitre précédent,

$$\begin{aligned} &d\tau - (d\mathfrak{T}_1 + d\mathfrak{T}_2 + \ldots + d\mathfrak{T}_n + d\Theta_1 + d\Theta_2 + \ldots + d\Theta_p) \\ &= - \mathrm{I}_1(\mathrm{S}, \mathrm{AA'A'_1A}) - \mathrm{J}_p(\mathrm{S}, \mathrm{BB'_1B'B}) - \mathrm{J}_1(\mathrm{S}, \mathrm{MM'_1M'N'_1M}). \end{aligned}$$

Or les trois quantités

$$(\mathrm{S}, \mathrm{AA'A'_1A}),\quad (\mathrm{S}, \mathrm{BB'_1B'B}),\quad (\mathrm{S}, \mathrm{MM'_1M'N'_1M}),$$

qui sont les valeurs du potentiel électrodynamique du système sur trois circuits fermés infiniment petits, sont des infiniment petits du second ordre, ce qui permet d'écrire

$$(4)\quad d\tau = d\mathfrak{T}_1 + d\mathfrak{T}_2 + \ldots + d\mathfrak{T}_n + d\Theta_1 + d\Theta_2 + \ldots + d\Theta_p.$$

Cette égalité (4) conduit à l'énoncé suivant :

Le travail des actions électrodynamiques, dans un déplacement quelconque d'un conducteur, est égal à la somme des travaux effectués par les forces électrodynamiques appliquées aux divers éléments du conducteur.

La définition des forces électrodynamiques appliquées à un élément de courant est ainsi justifiée.

Il faut maintenant montrer qu'il existe des forces répondant à cette définition et indiquer comment on peut les calculer.

Toute modification d'un élément $AB = ds$ de courant peut être décomposée :

1° En une dilatation δds de l'élément, dilatation durant laquelle la direction et le milieu de l'élément demeurent fixes;

2° En trois rotations $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, autour de trois axes rectangulaires Mx, My, Mz, menés par le milieu M de l'élément;

3° En trois translations δx, δy, δz, parallèles à ces trois axes.

Chacune de ces modifications élémentaires définit un petit contour analogue au contour ABB'A'A de la *fig.* 45 qui a servi à la définition des forces F appliquées à l'élément.

Soit $T\delta ds$ le potentiel électrodynamique du système sur le petit contour ABB'A'A correspondant à la dilatation.

Soient $L\delta\lambda$, $M\delta\mu$, $N\delta\nu$ les potentiels électrodynamiques du système sur les petits contours ABB'A'A correspondant à chacune des rotations.

Soient enfin $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$ les potentiels électrodynamiques du système sur les petits contours ABB'A'A correspondant à chacune des translations.

Nous allons prouver :

1° *Qu'on obtiendra un système de forces possédant les propriétés que nous avons attribuées aux forces* F, *si l'on prend :*

Deux tensions égales à T *appliquées aux deux extrémités de l'élément;*

Un couple dont l'axe ait pour composante L, M, N;

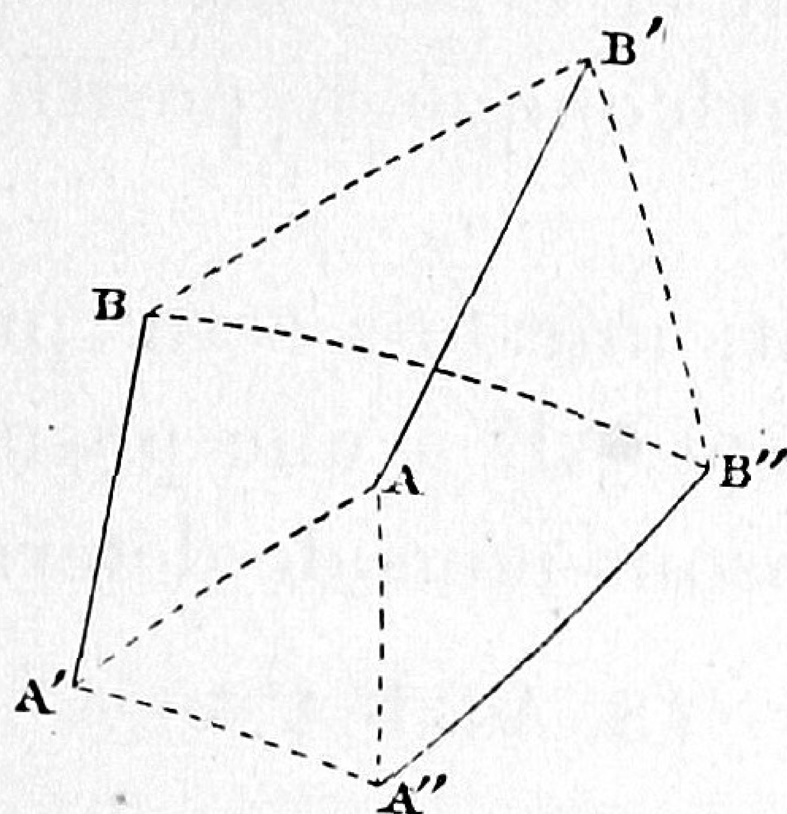
Une force, appliquée au milieu de l'élément, ayant pour composantes X, Y, Z.

2° *Qu'il est impossible d'obtenir aucun autre système possédant les propriétés des forces* F.

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant :

Soient AB, A′B′, A″B″ (*fig.* 48) trois positions d'un élément de courant, telles que l'on puisse passer de l'une à l'autre par des

Fig. 48.



translations infiniment petites, des rotations infiniment petites, et des dilatations infiniment petites par rapport à ds. On aura

$$(\mathrm{S},\ \mathrm{A\,B\,B'A'A}) + (\mathrm{S},\ \mathrm{A'B'B''A''A}) + (\mathrm{S},\ \mathrm{A''B''B\,A\,A''}) = 0.$$

Il est facile, en effet, de voir que la somme qui forme le premier membre de cette égalité se réduit à la différence de deux potentiels électrodynamiques :

1° Le potentiel électrodynamique du système sur le petit circuit BB′B″B parcouru par un courant d'intensité $\left(\mathrm{J} + \frac{d\mathrm{J}}{ds}\frac{ds}{2}\right)$;

2° Le potentiel électrodynamique du système sur le petit circuit AA′A″A parcouru par un courant d'intensité $\left(\mathrm{J} - \frac{d\mathrm{J}}{ds}\frac{ds}{2}\right)$.

Or, en premier lieu, chacun de ces deux potentiels est un infiniment petit du second ordre par rapport à ds.

En second lieu, la différence qu'ils ont entre eux doit être infiniment petite par rapport à la valeur de chacun d'eux.

En effet, le circuit BB′B″B s'obtient par les opérations suivantes :

1° On fait varier les divers éléments du circuit AA′A″A de quantités infiniment petites par rapport à leur valeur ;

2° On fait varier infiniment peu l'intensité du courant qui traverse le circuit AA′A″A ;

3° On impose à ce circuit un déplacement infiniment petit.

Cette différence est donc infiniment petite du troisième ordre.

Chacune des trois quantités

$$(S, ABB'A'A), \quad (S, A'B'B''A''A'), \quad (S, A''B''BAA'')$$

étant infiniment petite du second ordre, on voit que l'on peut écrire

$$(S, ABB'A'A) + (S, A'B'B''A''A') + (S, A''B''BAA'') = 0.$$

Cette proposition s'étend évidemment au cas où l'on considérerait un nombre fini quelconque de positions infiniment voisines de l'élément AB.

Imaginons maintenant, une fois cette proposition établie, que l'on fasse passer l'élément AB à une position infiniment voisine quelconque A′B′. Proposons-nous de déterminer la valeur de

$$(S, ABB'A'A).$$

D'après le lemme précédent, cette quantité est la somme des quantités analogues relatives aux modifications simples en lesquelles la modification considérée peut être censée décomposée. On doit donc avoir

$$(S, ABB'AA'A) = T\,\delta ds + L\,\delta\lambda + M\,\delta\mu + N\,\delta\nu + X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z.$$

Cette égalité nous montre alors :

1° Que les forces définies par les quantités T, L, M, N, X, Y, Z effectuent, dans tout déplacement de l'élément AB, un travail égal à la quantité $(S, ABB'A'A)$;

2° Que ces forces sont les seules qui jouissent de cette propriété [1].

Les forces en question sont donc des actions électrodynamiques appliquées à l'élément de courant $AB = ds$. Leur définition est maintenant complète. Il ne reste plus qu'à calculer la valeur des sept quantités

$$\begin{matrix} & T, & \\ L, & M, & N, \\ X, & Y, & Z. \end{matrix}$$

Ce sera l'objet du Chapitre suivant.

---

[1] En ne regardant pas comme distinct de ce système de forces un autre système que l'on obtiendrait en composant les premières forces suivant les règles connues de la statique des solides.

CHAPITRE VIII.

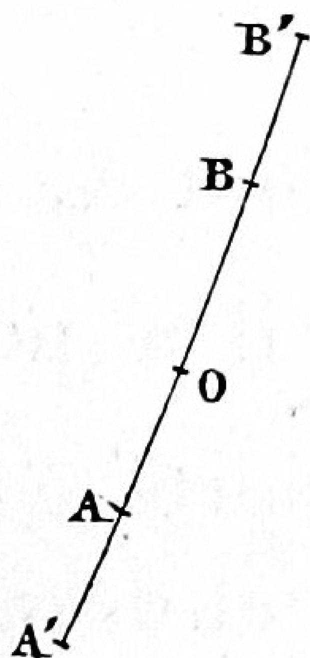
CALCUL DES ACTIONS ÉLECTRODYNAMIQUES EXERCÉES SUR UN ÉLÉMENT DE COURANT.

Nous allons maintenant nous proposer de calculer la tension électrodynamique T, le couple électrodynamique (L, M, N) et la force électrodynamique (X, Y, Z).

1° *Tension.*

Imaginons que l'élément $AB = ds$, sans changer de position, s'allonge d'une quantité $\delta\, ds$, de manière que ses extrémités viennent en $A'B'$ (*fig.* 49), son milieu O demeurant immobile. Le

Fig. 49.



contour $AA'B'BA$ est formé ici de deux lignes confondues, parcourues en sens contraire par des courants dont l'intensité au même point ne diffère que de quantités infiniment petites du second ordre. Il est facile de voir que le potentiel électrodynamique P du système sur ce circuit est un infiniment petit au moins du troisième ordre. Comme on a d'ailleurs

$$P = -T\,\delta\, ds,$$

et que $\delta\, ds$ est seulement un infiniment petit du second ordre, on

voit que

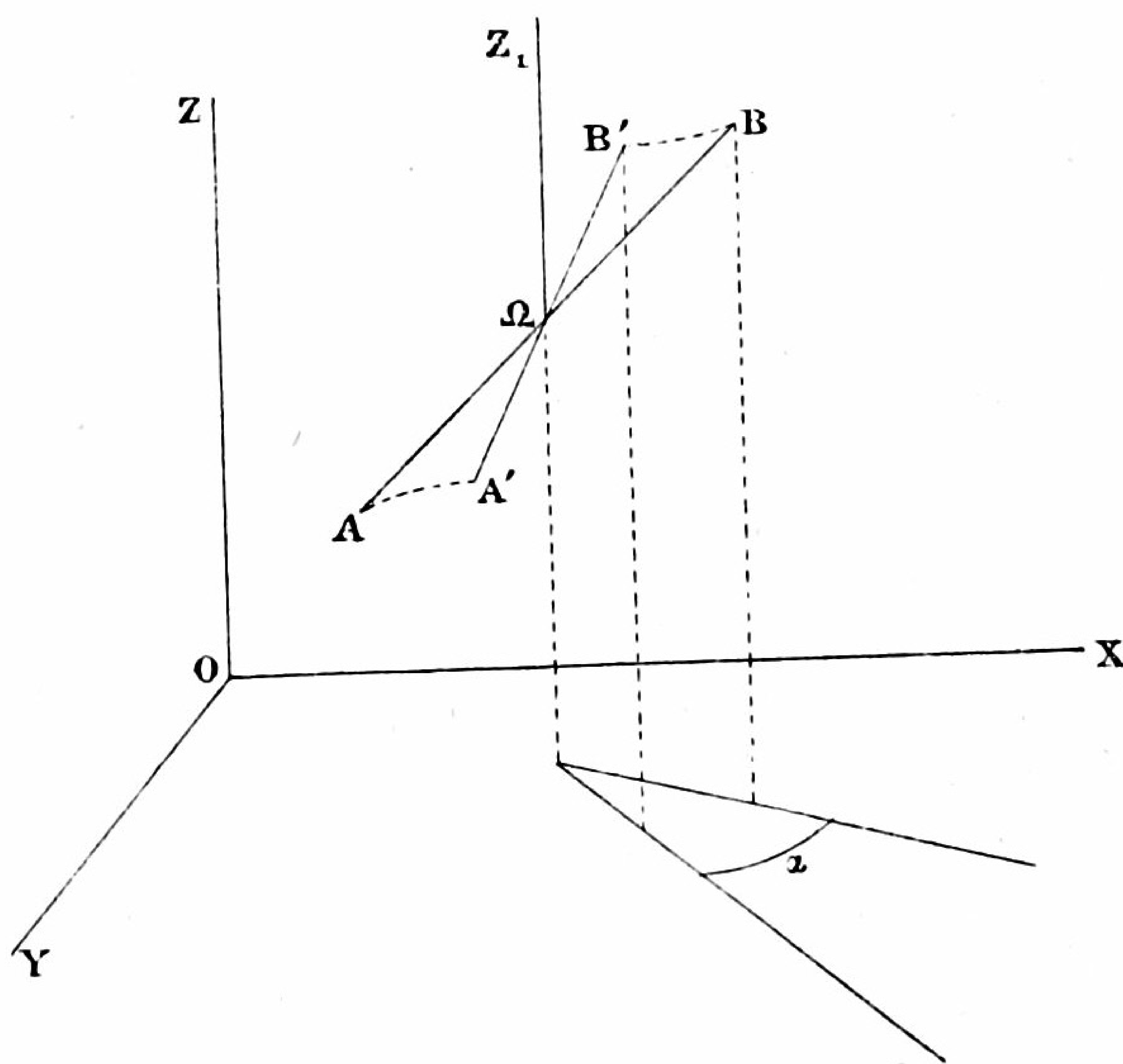
$$(1) \qquad T = 0.$$

Il n'existe pas de tension électrodynamique dans un fil parcouru par un courant.

2° *Couple.*

Soit $AB = ds$ (*fig.* 50) l'élément sur lequel s'exerce l'action. Soit Ω son milieu. Soit J l'intensité au point Ω du courant qui le

Fig. 50.



parcourt de A vers B. Au point A, ce courant a pour intensité $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$; au point B, il a pour intensité $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$. Supposons cet élément rapporté à un système de coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, et désignons par L, M, N les composantes suivant OX, OY, OZ de l'axe du couple qui sollicite cet élément, la réduction des forces étant faite, comme nous l'avons supposé, au point Ω.

Par le point Ω menons une parallèle ΩZ_1 à OZ. Faisons tourner l'élément AB d'un angle $d\alpha$ autour de ΩZ_1, de manière à l'amener en $A'B'$. Les actions exercées sur l'élément AB effectuent, dans ces conditions, un travail $N d\alpha$. Ce travail est égal au signe près au potentiel électrodynamique du courant considéré sur un circuit fictif composé de la manière suivante :

1° L'élément $A'B'$ parcouru de A' en B' par un courant

ayant pour intensité $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ au point A', J au point Ω, $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ au point B';

2° L'élément B'B parcouru de B' en B par un courant d'intensité $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$;

3° L'élément BA parcouru de B en A par un courant ayant pour intensité $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ au point B, J au point Ω, $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ au point A;

4° L'élément AA' parcouru de A en A' par un courant d'intensité $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$.

Désignons par ω l'angle de AB avec l'élément agissant ds', et par r la distance de Ω au milieu de ds'.

Nous avons

$$\Phi = f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega$$

avec

$$\cos\theta\cos\theta' = \cos\omega - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}.$$

Soit une fonction M(r) définie par l'équation

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\,M(r)}{dr}\right] = -rf(r), \tag{2}$$

et posons

$$N(r) = g(r) - \frac{1}{r}\frac{d\,M(r)}{dr}. \tag{3}$$

Nous aurons

$$\Phi = \frac{\partial^2 M(r)}{\partial s\,\partial s'} + N(r)\cos\omega. \tag{4}$$

Le troisième élément BA fournira au potentiel que nous voulons calculer un terme

$$-\sum\int\left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial s\,\partial s'} + N(r)\cos\omega\right]J'\,ds',$$

l'intégration s'étendant à l'un des courants continus qui constituent le système et la sommation à tous ces courants.

Pour l'élément A'B', N(r) cos ω doit être remplacé par

$$N(r)\cos\omega + \frac{\partial}{\partial\alpha}[N(r)\cos\omega]\,d\alpha;$$

$\dfrac{\partial^2 \mathrm{M}(r)}{\partial s\, \partial s'}$ doit être remplacé par

$$\frac{\partial^2 \mathrm{M}(r)}{\partial s\, \partial s'} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{M}(r)}{\partial s\, \partial s'}\right] d\alpha.$$

L'élément A′ B′ fournit alors au potentiel que nous voulons calculer un terme dont la valeur est

$$\mathrm{J}\, ds \sum \int \left[\frac{\partial^2 \mathrm{M}(r)}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \mathrm{M}(r)}{\partial s\, \partial s'} d\alpha + \mathrm{N}(r) \cos\omega + \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{N}(r) \cos\omega\, d\alpha\right] \mathrm{J}'\, ds'.$$

La somme des deux termes fournis au potentiel par les éléments A′ B′ et BA a alors pour valeur

$$ds\, d\alpha \sum \int \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \mathrm{M}(r)}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{N}(r) \cos\omega\right] \mathrm{J}'\, ds'.$$

Calculons les quantités

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \mathrm{M}(r)}{\partial s\, \partial s'}, \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{N}(r) \cos\omega.$$

Soient x, y, z les coordonnées du milieu Ω de l'élément ds, et x', y', z' les coordonnées du milieu de l'élément ds'.

Nous avons

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{x - x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz}{ds}$$

et

$$\frac{\partial \mathrm{M}(r)}{\partial s} = \frac{d \mathrm{M}(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{d \mathrm{M}(r)}{dr}\left[\frac{x - x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz}{ds}\right].$$

La quantité $\dfrac{dz}{ds}$ représente le cosinus de l'angle que AB fait avec l'axe des z; dans la rotation considérée, cet angle ne varie pas. Il en est de même de r, x, y, z, x', y', z'. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathrm{M}(r)}{\partial s} = \frac{d \mathrm{M}(r)}{\partial r}\left[\frac{x - x'}{r} \frac{\partial \dfrac{dx}{ds}}{d\alpha} + \frac{y - y'}{r} \frac{\partial \dfrac{dy}{ds}}{\partial \alpha}\right]$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \mathrm{M}(r)}{\partial s\, \partial s'} = \frac{\partial \dfrac{d \mathrm{M}(r)}{dr} \dfrac{x - x'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \dfrac{dx}{ds}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dfrac{d \mathrm{M}(r)}{dr} \dfrac{y - y'}{r}}{\partial s'} \frac{\partial \dfrac{dy}{ds}}{\partial \alpha}.$$

La quantité r ne variant pas, on a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{N}(r) \cos \omega = \mathrm{N}(r) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha}.$$

La projection du circuit fermé AA′B′B sur la direction de l'élément ds' doit être égale à 0. Or les éléments AA′ et B′B, qui sont parallèles et de même sens, font avec l'élément ds' un certain angle ω_1. Si nous désignons par $d\sigma$ la longueur de l'un quelconque de ces deux éléments, la somme de leurs projections sur ds' aura pour valeur

$$2 \cos \omega_1 \, d\sigma.$$

D'ailleurs la somme des projections sur l'élément ds' des deux éléments A′B′ et BA est

$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha} \, d\alpha \, ds.$$

On a donc

$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha} = -2 \cos \omega_1 \frac{d\sigma}{d\alpha \, ds}.$$

Mais $d\sigma$ est l'arc qui correspond à l'angle au centre $d\alpha$ dans un cercle qui a pour rayon $\frac{ds}{2} \sin(ds, z)$. On a donc

$$d\sigma = \frac{1}{2} \, ds \, d\alpha \sin(ds, z)$$

et

$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial \alpha} = - \cos \omega_1 \sin(ds, z).$$

De tous ces calculs, il résulte que les deux éléments A′ B′ et BA fournissent au potentiel que nous voulons évaluer le terme

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{J} \, ds \, d\alpha \sum \int \left[\frac{\partial \dfrac{d\mathrm{M}(r)}{dr} \dfrac{x - x'}{r}}{\partial s'} \, \frac{\partial \dfrac{dx}{ds}}{\partial \alpha} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{\partial \dfrac{d\mathrm{M}(r)}{\partial s'} \dfrac{y - y'}{r}}{\partial s'} \, \frac{\partial \dfrac{dy}{ds}}{\partial \alpha} - \mathrm{N}(r) \cos \omega_1 \sin(ds, z) \right] \mathrm{J}' \, ds'. \end{aligned} \right.$$

Calculons maintenant les termes fournis au même potentiel par les éléments AA′ et B′B.

L'élément AA' a pour longueur

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, ds\, d\alpha \sin(ds, z).$$

La distance du point A au milieu de l'élément ds' est

$$\rho = r - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds.$$

La distance du milieu de l'élément AA' au milieu de l'élément ds' a pour valeur

$$R = r - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\, d\sigma.$$

L'élément AA' fait avec l'élément ds' l'angle ω_1. Il est traversé de A en A' par un courant d'intensité $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}\, ds\right)$. Il fournit donc au potentiel le terme suivant

$$\frac{1}{2}\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}\, ds\right) ds\, d\alpha \sin(ds, z) \sum \int \left[\frac{\partial^2 M(R)}{\partial\sigma\, \partial s'} + N(R)\cos\omega_1\right] J'\, ds'.$$

Si l'on pose de même

$$R' = r + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\, ds + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\, d\sigma,$$

l'élément B'B fournira un terme

$$\frac{1}{2}\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}\, ds\right) ds\, d\alpha \sin(ds, z) \sum \int \left[\frac{\partial^2 M(R')}{\partial\sigma\, ds'} + N(R')\cos\omega_1\right] J'\, ds'.$$

La somme de ces deux termes, réduite aux infiniment petits principaux, a pour valeur

$$J\, ds\, d\alpha \sin(ds, z) \sum \int \left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial\sigma\, ds'} + N(r)\cos\omega_1\right] J'\, ds'.$$

La quantité $\frac{\partial^2 M(r)}{\partial\sigma\, ds'}$ peut être remplacée par $\frac{\partial^2 M(\rho)}{\partial\sigma\, ds'}$.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point A. Nous aurons

$$\frac{\partial^2 M(\rho)}{\partial\sigma\, ds'} = \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{d M(\rho)}{d\rho}\frac{\xi - x'}{\rho}\right]\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{d M(\rho)}{d\rho}\frac{\eta - y'}{\rho}\right]\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{d M(\rho)}{d\rho}\frac{\zeta - z'}{\rho}\right]\frac{d\zeta}{d\sigma}.$$

D'ailleurs nous avons

$$\xi = x - \frac{1}{2}\frac{dx}{ds}ds,$$

$$\eta = y - \frac{1}{2}\frac{dy}{ds}ds,$$

$$\zeta = z - \frac{1}{2}\frac{dz}{ds}ds.$$

L'élément B'B étant perpendiculaire à l'axe des z, nous avons

$$\frac{d\zeta}{d\sigma} = 0.$$

Les formules précédentes donnent

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha}{d\sigma}ds,$$

$$\frac{d\eta}{d\sigma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{dy}{ds}\frac{d\alpha}{d\sigma}ds.$$

Si l'on remarque enfin que

$$d\sigma = \frac{1}{2}\sin(ds, z)\,ds\,d\alpha,$$

on trouve sans peine que l'on a, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\sin(ds, z)\frac{\partial^2 M(\rho)}{\partial\sigma\,\partial s'}d\alpha\,ds$$

$$= -\left\{\frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{dM(r)}{dr}\frac{x-x'}{r}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{dM(r)}{dr}\frac{y-y'}{r}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{dy}{ds}\right\}d\alpha\,ds.$$

Les deux éléments AA', BB' fournissent donc au potentiel que nous voulons calculer le terme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} -J\,ds\,d\alpha\sum\int\Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{dM(r)}{dr}\frac{x-x'}{r}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{dx}{ds} \\ & + \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{dM(r)}{dr}\frac{y-y'}{r}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{dy}{ds} \\ & - N(r)\cos\omega_1\sin(ds, z)\Bigg\}J'\,ds'. \end{aligned}\right.$$

Ce terme (6) est égal en valeur absolue au terme (5), mais de signe contraire. La somme de ces deux termes devant être égale à $-N\,d\alpha$, on voit que l'on a

$$N = 0.$$

Un raisonnement analogue donnerait

$$L = 0,$$
$$M = 0.$$

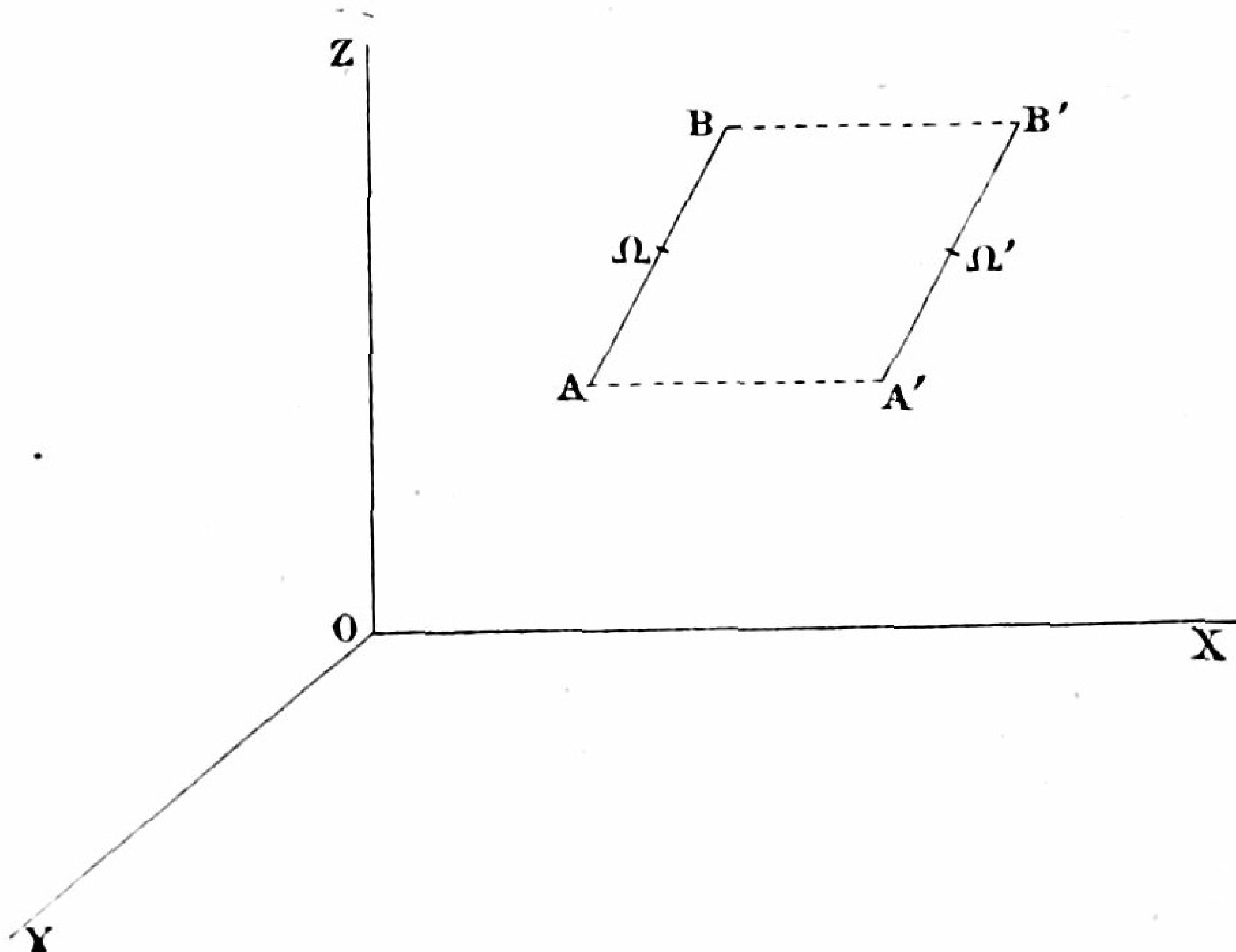
Le couple électrodynamique est nul. L'action d'un système de courants quelconques sur un élément de courant quelconque se réduit à une force unique, appliquée au milieu de l'élément.

C'est cette force dont nous allons maintenant calculer les composantes.

3° *Force.*

Soient X, Y, Z les composantes de la force qui agit sur l'élément $ds = AB$ (*fig.* 51) et qui est appliquée en son milieu Ω. Si

Fig. 51.



nous déplaçons l'élément AB de telle façon que chacun de ses points décrive un chemin de longueur dx, parallèle à l'axe des x, le travail virtuel des actions électrodynamiques aura pour valeur $X\,dx$. Ce travail est égal au signe près au potentiel électrodynamique du système agissant sur un circuit fermé composé de la manière suivante :

1° L'élément A'B', parcouru de A' en B' par un courant dont l'intensité est J au milieu Ω' de A'B', $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ au point A' et $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ au point B';

2° L'élément B'B, parcouru de B' en B par un courant d'intensité $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$;

3° L'élément BA, parcouru de B en A par un courant dont l'intensité est J au milieu Ω de AB, $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ en B et $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$ en A;

4° L'élément A'A, parcouru de A' en A par un courant d'intensité $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$.

Soit r la distance du point Ω au milieu de l'élément ds'; soit ω l'angle de l'élément AB avec l'élément ds'.

Le troisième élément, l'élément BA, fournit au potentiel cherché un terme qui a pour valeur

$$-J\,ds \sum \int \left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial s\,\partial s'} + N(r)\cos\omega\right] J'\,ds'.$$

De même, le premier élément, A'B', fournit le terme

$$J\,ds \sum \int \left\{\frac{\partial^2 M(r)}{\partial s\,\partial s'} + \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\left[\frac{d\,M(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}dx\right] + N(r)\cos\omega + \frac{\partial}{\partial x}[N(r)\cos\omega]\,dx\right\} J'\,ds'.$$

Si l'on remarque que l'angle ω ne varie pas lorsque l'élément AB vient en A'B', la somme de ces deux termes aura pour valeur

$$(7)\qquad J\,ds\,dx \sum \int \left\{\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\left[\frac{d\,M(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\right] + \cos\omega\,\frac{d\,N(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\right\} J'\,ds'.$$

L'élément AA' a pour longueur dx. Il est traversé par un courant d'intensité $\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$. Désignons par ρ la distance du milieu de AA' au milieu de ds'; par ω_1 l'angle que AA' fait avec ds'. L'élément AA' fournit au potentiel cherché le terme

$$dx\left(J - \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right) \sum \int \left[\frac{\partial^2 M(\rho)}{\partial x\,\partial s'} + N(\rho)\cos\omega_1\right] J'\,ds'.$$

La distance du milieu de l'élément B'B au milieu de l'élément ds' est $\left(\rho + \frac{dr}{ds}ds\right)$. Cet élément fait avec l'élément ds' un angle supplémentaire de l'angle ω_1. Il est traversé de B' en B par un

courant d'intensité $\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}ds\right)$. Il fournit au potentiel cherché le terme

$$-dx\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}\right)\sum\int\left[\frac{\partial^2 M(\rho)}{\partial x\,\partial s'} + N(\rho)\cos\omega_1\right]J'\,ds'$$
$$-dx\left(J + \frac{1}{2}\frac{dJ}{ds}\right)\sum\int\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial s'}\left[\frac{dM(\rho)}{d\rho}\frac{\partial r}{\partial s}ds\right] + \frac{dN(\rho)}{d\rho}\frac{\partial r}{\partial s}\cos\omega_1\,ds\right\}J'\,ds'.$$

La somme des termes fournis au potentiel par les deux éléments AA′, B′B est, en se limitant aux infiniment petits principaux,

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&-J\,ds\,dx\sum\int\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial s'}\left[\frac{dM(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\right] + \frac{dN(r)}{dr}\frac{dr}{ds}\cos\omega_1\right\}J'\,ds'\\&-\frac{dJ}{ds}ds\,dx\sum\int\left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial x\,\partial s'} + N(r)\cos\omega_1\right]J'\,ds'.\end{aligned}\right.$$

La somme des quantités (7) et (8) donne le potentiel que l'on veut calculer.

Si l'on remarque que

$$\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\left[\frac{dM(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\right] = \frac{\partial^3}{\partial s\,\partial s'\,\partial x}M(r) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial s'}\left[\frac{dM(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\right],$$

on voit que ce potentiel se réduit à

$$J\,ds\,dx\sum\int\left[\cos\omega\frac{dN(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} - \cos\omega_1\frac{dN(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\right]J'\,ds'$$
$$-\frac{dJ}{ds}ds\,dx\sum\int\left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial x\,\partial s'} + N(r)\cos\omega_1\right]J'\,ds'.$$

Remarquons maintenant que nous avons

$$\cos\omega_1 = \frac{dx'}{ds'},$$

et nous aurons, pour valeur de notre potentiel,

$$J\,ds\,dx\sum\int\frac{dN(r)}{dr}\left(\cos\omega\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'}\frac{\partial r}{\partial s}\right)J'\,ds'$$
$$-\frac{dJ}{ds}ds\,dx\sum\int\left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial x\,\partial s'} + N(r)\frac{dx'}{ds'}\right]J'\,ds'.$$

Cette quantité doit être égale à

$$-X\,dx.$$

On a donc la première des trois égalités suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} X = - J\,ds \displaystyle\sum\int \frac{d\,N(r)}{dr}\left(\cos\omega\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'}\frac{\partial r}{\partial s}\right) J'\,ds' \\ \qquad + \dfrac{dJ}{ds}ds \displaystyle\sum\int \left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial x\,\partial s'} + N(r)\frac{dx'}{ds'}\right] J'\,ds', \\ Y = - J\,ds \displaystyle\sum\int \frac{d\,N(r)}{dr}\left(\cos\omega\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'}\frac{\partial r}{\partial s}\right) J'\,ds' \\ \qquad + \dfrac{dJ}{ds}ds \displaystyle\sum\int \left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial y\,\partial s'} + N(r)\frac{dy'}{ds'}\right] J'\,ds', \\ Z = - J\,ds \displaystyle\sum\int \frac{d\,N(r)}{dr}\left(\cos\omega\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'}\frac{\partial r}{\partial s}\right) J'\,ds' \\ \qquad + \dfrac{dJ}{ds}ds \displaystyle\sum\int \left[\frac{\partial^2 M(r)}{\partial z\,\partial s'} + N(r)\frac{dz'}{ds'}\right] J'\,ds'. \end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue. Ces formules déterminent l'action électrodynamique d'un système de courants quelconques sur un élément de courant quelconque.

Supposons maintenant que l'on ait

$$f(r) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1-\lambda}{2r}, \qquad g(r) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1+\lambda}{2r}.$$

L'égalité (2) sera vérifiée si l'on prend

$$M(r) = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1-\lambda}{2}\,r,$$

et l'égalité (3) donnera

$$N(r) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2r}.$$

Si l'on remarque alors que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial s'} = -\frac{1}{r}\,\frac{dx'}{ds'} + (x - x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'},$$

nos formules (9) deviendront

$$(10)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2} J\,ds \displaystyle\sum\int \left(\cos\omega\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\right) J'\,ds' \\ \qquad + \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{dJ}{ds}ds \displaystyle\sum\int \left[\frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'} - \frac{3-\lambda}{2}\,\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r}\right] J'\,ds', \\ Y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



CHAPITRE IX.

COMPARAISON DES LOIS PRÉCÉDENTES AVEC LES LOIS DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE PROPOSÉES PAR D'AUTRES AUTEURS.

§ 1. — Loi de Grassmann.

L'action d'un courant quelconque sur un élément de courant se réduit à une force appliquée au milieu de l'élément, et dont les composantes sont données par les formules [Chap. VIII, égalités (10)] :

$$
(1)\quad
\left\{
\begin{aligned}
X = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \,\mathrm{J}\, ds \int \left[\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \mathrm{J}'\, ds' \\
& + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{d\mathrm{J}}{ds} ds \int \left[\frac{1-\lambda}{2} (x-x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} - \frac{3-\lambda}{2} \frac{\frac{dx'}{ds'}}{r} \right] \mathrm{J}'\, ds', \\
Y = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \,\mathrm{J}\, ds \int \left[\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \mathrm{J}'\, ds' \\
& + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{d\mathrm{J}}{ds} ds \int \left[\frac{1-\lambda}{2} (y-y') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} - \frac{3-\lambda}{2} \frac{\frac{dy'}{ds'}}{r} \right] \mathrm{J}'\, ds', \\
Z = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \,\mathrm{J}\, ds \int \left[\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \mathrm{J}'\, ds' \\
& + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{d\mathrm{J}}{ds} ds \int \left[\frac{1-\lambda}{2} (z-z') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} - \frac{3-\lambda}{2} \frac{dz'}{ds'} \right] \mathrm{J}'\, ds'.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons, en premier lieu, que le courant qui traverse l'élé-

ment ds soit uniforme. Ces formules se réduiront à

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J\, ds \int \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) J'\, ds', \\
Y_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J\, ds \int \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) J'\, ds', \\
Z_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J\, ds \int \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) J'\, ds'.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces actions sont les mêmes que si tout élément ds' du circuit agissant exerçait sur l'élément ds une force *fictive* appliquée au milieu de l'élément ds, et ayant pour composantes

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) JJ'\, ds\, ds', \\
\eta &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) JJ'\, ds\, ds', \\
\zeta &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) JJ'\, ds\, ds'.
\end{aligned}
\right.
$$

Il faut bien remarquer ici que cette expression : *action de l'élément ds' sur l'élément ds* a un sens purement conventionnel. L'élément ds' ne peut être conçu isolément ; on ne peut donc parler, au sens propre, d'une action exercée par cet élément. L'expression dont il s'agit désigne simplement un des termes dont la résultante, donnée par une intégrale qui s'étend à tous les éléments du courant agissant, représente la valeur de l'action exercée par ce courant sur l'élément ds, ce dernier mot ayant le sens précisé au Chapitre VII.

L'action exercée par l'élément ds' sur l'élément ds représentant une pure expression algébrique, on ne devra pas s'étonner si l'on peut donner plusieurs valeurs différentes pour chacune des composantes de cette action ; la somme de ces valeurs, prise pour un courant réalisable, représente seule une réalité physique soustraite à toute arbitraire.

Quelles sont la grandeur et la direction de la force représentée par les formules (3)?

Multiplions la première des égalités (3) par $\frac{dx}{ds}$; la seconde, par $\frac{dy}{ds}$; la troisième, par $\frac{dz}{ds}$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$\xi\frac{dx}{ds}+\eta\frac{dy}{ds}+\zeta\frac{dz}{ds}$$

$$=\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathrm{J}\,ds\,\mathrm{J}'\,ds'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dx'}{ds'}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dy'}{ds'}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dz'}{ds'}\right)\cos\omega,$$

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathrm{J}\,ds\,\mathrm{J}'\,ds'\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}.$$

Mais nous avons aussi

$$\cos\omega=\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Nous trouvons donc

$$\xi\frac{dx}{ds}+\eta\frac{dy}{ds}+\zeta\frac{dz}{ds}=0,$$

ce qui montre que *la force en question est normale à l'élément ds sur lequel elle agit.*

Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale au plan formé par la droite r et l'élément ds'. On aura

$$\lambda\frac{dx'}{ds'}+\mu\frac{dy'}{ds'}+\nu\frac{dz'}{ds'}=0,$$

$$\lambda\frac{x'-x}{r}+\mu\frac{y'-y}{r}+\nu\frac{z'-z}{r}=0.$$

Or les égalités (3) donnent

$$\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta=-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\mathrm{J}\,ds\,\mathrm{J}'\,ds'}{r^2}\cos\omega\left(\lambda\frac{x-x'}{r}+\mu\frac{y-y'}{r}+\nu\frac{z-z'}{r}\right)$$

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathrm{J}\,ds\,\mathrm{J}'\,ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(\lambda\frac{dx'}{ds'}+\mu\frac{dy'}{ds'}+\nu\frac{dz'}{ds'}\right).$$

On a donc

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0.$$

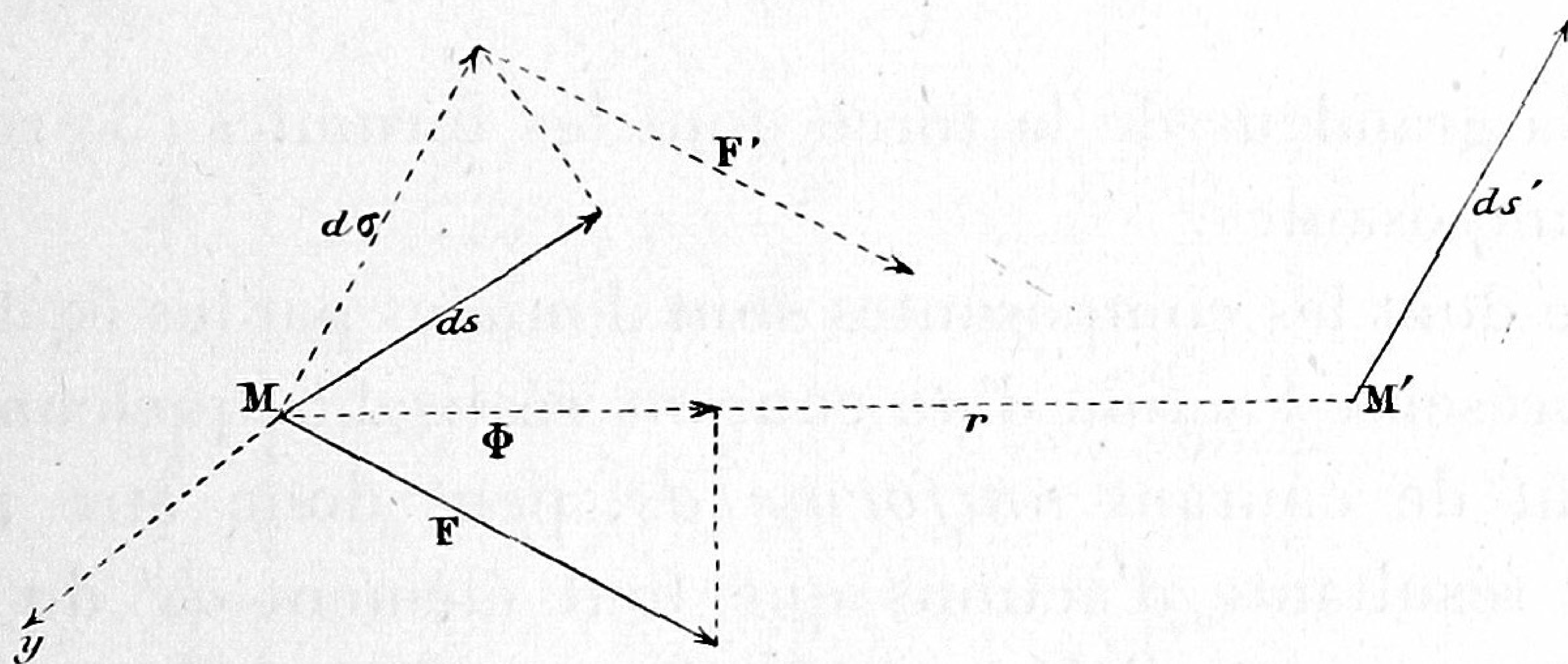
La force en question est située dans le plan de la droite r et de l'élément ds'.

La direction de la force (ξ, η, ζ) nous est dès lors connue; elle est située dans le plan de la droite r et de l'élément ds', et normale à la projection $d\sigma$ de l'élément ds sur ce plan.

Cherchons maintenant la grandeur F de cette force. Nous la compterons positivement lorsque la condition suivante sera réalisée :

Une force F', de même sens que la force F, appliquée à l'extrémité de $d\sigma$, forme avec la droite My, normale à r et à $d\sigma$, un système à rotation négative, le trièdre $(r, My, d\sigma)$ étant lui-même supposé à rotation négative (*fig.* 52).

Fig. 52.



Supposons que Φ représente, en grandeur et en signe, la projection de F sur MM'. Nous avons

$$\Phi = F \sin(d\sigma, r).$$

Mais, dans le trièdre $(ds, d\sigma, r)$, rectangle suivant $d\sigma$, nous avons

$$\sin(d\sigma, r) = \sin(ds, d\sigma)\sin(d\sigma, r).$$

Désignons par μ l'angle $(ds, d\sigma)$ que fait l'élément ds avec le plan de r et de ds', cet angle étant compté positivement lorsque l'élément ds est du même côté du plan (r, ds) que la normale y, et négativement dans le cas contraire. L'égalité précédente deviendra

$$\sin(d\sigma, r) = \frac{\sin\theta}{\sin\mu}.$$

Nous avons ainsi

$$F = \Phi \frac{\sin \mu}{\sin \theta}.$$

Pour calculer Φ, supposons Ox dirigé suivant MM′, et faisons usage de la première des formules (α). Nous aurons

$$\Phi = \xi,$$

et aussi

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{1}{r^2}, \qquad \frac{dx'}{ds'} = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

ce qui donnera

$$\Phi = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{J\,ds\,J'\,ds'}{r^2}\left(\cos\omega + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right) = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{J\,ds\,J'\,ds'}{r^2}\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon$$

et

$$F = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{J\,ds\,J'\,ds'}{r^2}\sin\theta'\sin\mu\cos\varepsilon. \tag{4}$$

Telle est la grandeur de la force dont les formules (3) représentent les composantes.

La force dont les composantes sont données par les égalités (2), et qui représente l'action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant *uniforme* ds, peut donc être regardée comme la résultante d'actions que tout élément ds' du courant agissant exercerait sur l'élément ds, chacune de ces forces étant, en grandeur, représentée par la formule (4), et en direction donnée par les règles que nous avons indiquées.

Dès 1825, Ampère [1] avait donné ces formules comme équivalentes, pour les actions d'un courant fermé et uniforme, sur un élément de courant aux formules qui représentent la loi dite *d'Ampère*.

Dans les papiers posthumes de Gauss [2], on trouve les formules (3) comme représentant l'action mutuelle de deux éléments de courant.

---

[1] AMPÈRE, *Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 175. — *Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique*, t. III, p. 123).

[2] GAUSS, *Werke*, Bd. V, p. 604.

En 1843, Hermann Grassmann [1] avait, à son tour, indiqué que l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme pouvait se décomposer en actions élémentaires telles que celle que nous venons de définir.

En 1870, M. Reynard [2] a reproduit ces formules qu'il croyait nouvelles.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut donc s'énoncer ainsi :

La loi de Grassmann représente exactement l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant uniforme.

Supposons maintenant que l'élément de courant ds sur lequel le circuit agit ne soit pas uniforme, et voyons si la loi de Grassmann demeure applicable.

Pour que la loi de Grassmann soit applicable, il faut et il suffit que la force (X, Y, Z), donnée par les égalités (1), se réduise à la force (X_1, Y_1, Z_1), donnée par les égalités (2); que l'on ait, par conséquent,

$$\int\left[\frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}-\frac{3-\lambda}{2}\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r}\right]J'\,ds'=0,$$

$$\int\left[\frac{1-\lambda}{2}(y-y')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}-\frac{3-\lambda}{2}\frac{\frac{dy'}{ds'}}{r}\right]J'\,ds'=0,$$

$$\int\left[\frac{1-\lambda}{2}(z-z')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}-\frac{3-\lambda}{2}\frac{\frac{dz'}{ds'}}{r}\right]J'\,ds'=0.$$

Or on a

$$\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r}=-\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{x-x'}{r}\right)+(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}.$$

On a donc

$$\int\left[\frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}-\frac{3-\lambda}{2}\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r}\right]$$

$$=\frac{3-\lambda}{2}\int J'\frac{\partial}{\partial s'}\frac{x-x'}{r}\,ds'-\int(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}J'\,ds'.$$

---

(1) H. GRASSMANN, *Neue Theorie der Elektrodynamik* (*Poggendorff's Annalen*, t. LXIV, p. 17; 1845).

(2) REYNARD, *Ann. de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XIX, p. 272; 1870.

Supposons, en premier lieu, le courant agissant fermé et uniforme. Nous aurons alors

$$\int J' \frac{\partial}{\partial s'} \frac{x-x'}{r} ds' = J' \int \frac{\partial}{\partial s'} \frac{x-x'}{r} ds' = 0$$

et, par conséquent,

$$\int \left[\frac{1-\lambda}{2} (x-x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} - \frac{3-\lambda}{2} \frac{\frac{dx'}{ds'}}{r} \right] J' ds' = -J' \int (x-x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} ds'.$$

Ainsi, pour que la loi de Grassmann fût applicable à l'action d'un courant fermé et uniforme quelconque sur un élément de courant non uniforme, il faudrait que l'intégrale

$$\int (x-x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} ds',$$

étendue à une courbe fermée quelconque, fût égale à 0, ce qui ne peut pas être, car la quantité sous le signe $\int$ n'est pas de la forme $\frac{\partial f(x', y', z')}{\partial s'}$. Donc :

La loi de Grassmann n'est pas applicable à l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant non uniforme; a fortiori, *est-elle inapplicable à l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant non uniforme.*

L'égalité

$$\int \left[\frac{1-\lambda}{2} (x-x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} - \frac{3-\lambda}{2} \frac{\frac{dx'}{ds'}}{r} \right] J' ds'$$
$$= \frac{3-\lambda}{2} \int J' \frac{\partial}{\partial s'} \frac{x-x'}{r} ds' - \int (x-x') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} J' ds'$$

peut se transformer. Une intégration par parties donne

$$\int J' \frac{\partial}{\partial s'} \frac{x-x'}{r} ds' = \left(J' \frac{x-x'}{r} \right)_0^1 - \int \frac{x-x'}{r} \frac{dJ'}{ds'} ds'.$$

Ou bien le courant agissant est fermé, ou bien, s'il est ouvert, l'intensité est égale à o à ses deux extrémités. On a donc, en toutes circonstances,

$$\left(J'\frac{x-x'}{r}\right)_0^1 = 0,$$

et

$$\int\left[\frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'} - \frac{3-\lambda}{2}\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r}\right]J'\,ds'$$
$$=\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}J' - \frac{3-\lambda}{2}\frac{dJ'}{ds'}\right)\frac{x-x'}{r}\,ds'.$$

En reportant ce résultat dans la première des égalités (1), on trouve la première des égalités

$$(5)\quad\begin{cases} X = X_1 + \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{dJ}{ds}ds\displaystyle\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}J' - \frac{3-\lambda}{2}\frac{dJ'}{ds'}\right)\frac{x-x'}{r}\,ds', \\ Y = Y_1 + \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{dJ}{ds}ds\displaystyle\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}J' - \frac{3-\lambda}{2}\frac{dJ'}{ds'}\right)\frac{y-y'}{r}\,ds', \\ Z = Z_1 + \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{dJ}{ds}ds\displaystyle\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}J' - \frac{3-\lambda}{2}\frac{dJ'}{ds'}\right)\frac{z-z'}{r}\,ds'. \end{cases}$$

Nous allons, dans un instant, voir l'intérêt que présentent ces nouvelles formules.

§ 2. — Loi d'Ampère.

Reprenons l'expression de X_1.

On a

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left[(x'-x)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\right] = \frac{dx'}{ds'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s} + (x'-x)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'},$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{1}{r^3}(x'-x).$$

On a donc

$$\left(\cos\omega\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\right) = \left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\right)\frac{x'-x}{r} - \frac{\partial}{\partial s'}\left[(x'-x)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\right]$$

et

$$
\begin{aligned}
X_1 = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathrm{J}\, ds \int \left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'} \right) \frac{x'-x}{r} \mathrm{J}'\, ds' \\
& - \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathrm{J}\, ds \int \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \mathrm{J}'\, ds'.
\end{aligned}
$$

Une intégration par parties donne

$$
\int \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right] \mathrm{J}'\, ds' = \left[\mathrm{J}'(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right]_0 + \int \frac{x'-x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{d\mathrm{J}'}{ds'} ds'.
$$

Mais

$$
\left[\mathrm{J}'(x'-x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right]_0^1 = 0.
$$

On a donc

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
X_1 = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathrm{J}\, ds \int \left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'} \right) \frac{x'-x}{r} \mathrm{J}'\, ds' \\
& - \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathrm{J}\, ds \int \frac{x'-x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{d\mathrm{J}'}{ds'} ds', \\
Y_1 = {} & \ldots\ldots, \qquad Z_1 = \ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces égalités vont nous conduire à de nombreuses conclusions. Considérons en premier lieu les formules

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'} \right) \frac{x'-x}{r} \mathrm{J}\mathrm{J}'\, ds\, ds', \\
\eta_2 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'} \right) \frac{y'-y}{r} \mathrm{J}\mathrm{J}'\, ds\, ds', \\
\zeta_2 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'} \right) \frac{z-z'}{r} \mathrm{J}\mathrm{J}'\, ds\, ds'.
\end{aligned}
\right.
$$

Elles représentent les composantes d'*une force appliquée à l'élément ds, dirigée de l'élément ds' vers l'élément ds suivant la droite qui joint les milieux de ces deux éléments, et ayant*

pour grandeur

$$(8) \qquad R = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\right)JJ'\,ds\,ds'.$$

Cette force est évidemment soumise au principe de l'égalité entre l'action et la réaction. C'est celle qui a été proposée par Ampère pour représenter l'action mutuelle de deux éléments de courant (1).

Les égalités (6) conduisent alors au résultat suivant :

La loi d'Ampère et la loi de Grassmann sont équivalentes pour représenter l'action d'un courant uniforme sur un élément de courant quelconque.

Si nous comparons ce théorème à celui que nous avons précédemment obtenu, nous arriverons au résultat suivant :

La loi d'Ampère représente toujours exactement l'action d'un courant uniforme sur un élément de courant uniforme.

En général, elle ne peut représenter exactement l'action d'un courant uniforme sur un élément de courant quelconque, ni, a fortiori, *l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque.*

Les égalités (5) et (6) nous conduisent à un nouveau résultat important.

Considérons les quantités

$$(9) \quad \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\dfrac{\cos\omega}{r^2} + r\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\right)\dfrac{x'-x}{r}JJ'\,ds\,ds' \\ \qquad -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{x'-x}{r}J\dfrac{dJ'}{ds'}ds\,ds' + \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r}{\partial s'}\dfrac{x'-x}{r}J'\dfrac{dJ}{ds}ds\,ds' \\ \qquad -\dfrac{\mathfrak{A}^2(3-\lambda)}{4}\dfrac{x'-x}{r}\dfrac{dJ}{ds}\dfrac{dJ'}{ds'}ds\,ds', \\ \eta_3 = \ldots\ldots, \qquad \zeta_3 = \ldots\ldots \end{cases}$$

Elles représentent les composantes d'une force appliquée à l'é-

(1) Pour les travaux d'Ampère, consulter la *Collection de Mémoires relatifs à la Physique, publiée par la Société française de Physique*, t. II et III. *Voir* aussi l'*Appendice* au Livre XIV.

lément ds, dirigée de l'élément ds' vers l'élément ds suivant la droite qui joint les milieux des deux éléments et ayant pour grandeur

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R} = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'}\right) \mathrm{J}\mathrm{J}'\, ds\, ds' \\ &+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\mathrm{J}\,\frac{d\mathrm{J}'}{ds'}\, ds\, ds' - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s'}\,\mathrm{J}'\,\frac{d\mathrm{J}}{ds}\, ds\, ds' \\ &+ \frac{\mathfrak{A}^2(3-\lambda)}{4}\,\frac{d\mathrm{J}}{ds}\,\frac{d\mathrm{J}'}{ds'}\, ds\, ds'. \end{aligned} \right.$$

Il est donc toujours possible de ramener les actions entre courants quelconques à des forces élémentaires dont chacune est dirigée suivant la ligne de jonction des éléments entre lesquels elle s'exerce et vérifie la règle de l'égalité entre l'action et la réaction.

Si la constante d'Helmholtz est égale à 3, et seulement dans ce cas, l'expression de cette force ne renferme pas de terme indépendant de la distance.

Si les deux éléments agissants sont traversés par des courants uniformes, cette force se réduit, quel que soit λ, à la force donnée par la loi d'Ampère.

Les formules (9) et (10) nous montrent que, dans le cas général où chacun des deux éléments appartient à un courant non uniforme, l'expression de leur action mutuelle renferme un terme indépendant de la distance des deux éléments

$$\frac{\mathfrak{A}^2(3-\lambda)}{4}\,\frac{d\mathrm{J}}{ds}\,\frac{d\mathrm{J}'}{ds'}\, ds\, ds'.$$

C'est là un résultat paradoxal qui a son correspondant dans la théorie des actions électrodynamiques proposée par M. H. von Helmholtz. Ce paradoxe deviendrait une absurdité si l'action mutuelle de deux éléments de courant devait être regardée comme une réalité physique; mais l'action mutuelle de deux éléments de courant doit être considérée comme une pure abstraction. Il n'est donc nullement étonnant que les formules par lesquelles il serait possible de représenter l'action mutuelle de deux éléments de courant portent la trace de l'impossibilité physique impliquée dans la notion même de cette action.

La seule action qui ait un sens, au point de vue physique, est l'action exercée sur un élément de courant quelconque par un courant dont l'intensité varie d'une manière continue d'un point à l'autre du conducteur, et s'annule aux deux extrémités de ce dernier dans le cas où il est ouvert. Par conséquent, il faut et il suffit, pour que le paradoxe présenté par l'action élémentaire indépendante de la distance ne constitue pas une absurdité, que l'action d'un courant réalisable sur un élément de courant ne renferme plus que des termes qui tendent vers o lorsque la distance du courant à l'élément croît au delà de toute limite. Or les formules (1) mettent ce fait en évidence.

§ 3. — Théorème de Gauss.

Nous avons vu que les actions électrodynamiques pouvaient toujours se ramener à des actions élémentaires telles que chacune d'elles soit dirigée suivant la droite qui joint les deux éléments et vérifie la loi de l'égalité entre l'action et la réaction. Mais nous avons vu qu'en général cette action renferme un terme indépendant de la distance des deux éléments.

Il n'y a, *a priori*, aucune espèce de raison pour rejeter une semblable forme de l'action élémentaire. Néanmoins, il pourrait être plus commode et plus conforme aux habitudes d'esprit prises dans les autres parties de la Physique de ramener les actions électrodynamiques à une action élémentaire vérifiant la loi de l'égalité entre l'action et la réaction et s'évanouissant lorsque les deux éléments s'écartent infiniment. On est donc amené à se demander s'il existe une semblable loi de force; étant donné le résultat précédemment obtenu, le problème auquel on se trouve conduit peut s'énoncer de la manière suivante :

Sachant que l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque peut se décomposer en forces dont chacune provient d'un élément du circuit agissant et est dirigée suivant la droite qui joint le milieu de cet élément au milieu de l'élément soumis à l'action, peut-on trouver pour cette force plus d'une expression?

Gauss (¹) a déjà répondu à cette question par la négative; la réponse de Gauss peut se justifier par la démonstration suivante (²) :

Soient

$$\mathfrak{X}\, ds\, ds', \qquad \mathfrak{Y}\, ds\, ds', \qquad \mathfrak{Z}\, ds\, ds'$$

les composantes de l'action exercée par l'élément ds' sur l'élément ds dans une première loi de force.

Soient

$$\mathfrak{X}_1\, ds\, ds', \qquad \mathfrak{Y}_1\, ds\, ds', \qquad \mathfrak{Z}_1 ds\, ds$$

les composantes de la même action si l'on adopte une seconde loi de force.

Soit l la longueur du courant agissant que nous supposerons fermé. Nous devons avoir

$$\int_{s'=0}^{s'=l} \mathfrak{X}\, ds' = \int_{s'=0}^{s'=l} \mathfrak{X}_1\, ds',$$

$$\int_{s'=0}^{s'=l} \mathfrak{Y}\, ds' = \int_{s'=0}^{s'=l} \mathfrak{Y}_1\, ds',$$

$$\int_{s'=0}^{s'=l} \mathfrak{Z}\, ds' = \int_{s'=0}^{s'=l} \mathfrak{Z}_1\, ds',$$

égalités qui expriment que les deux lois conduisent au même résultat lorsqu'on les emploie au calcul d'un courant fermé sur un élément de courant. La théorie des intégrales curvilignes montre que ces égalités sont équivalentes aux suivantes

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}\, ds' = \mathfrak{X}_1\, ds' + d\mathfrak{F}(x', y', z', \mathrm{J}'), \\ \mathfrak{Y}\, ds' = \mathfrak{Y}_1 ds' + d\mathfrak{G}(x', y', z', \mathrm{J}'), \\ \mathfrak{Z}\, ds' = \mathfrak{Z}_1 ds' + d\mathfrak{H}(x', y', z', \mathrm{J}'), \end{cases}$$

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ étant trois fonctions uniformes, finies et continues des variables J', x', y', z', et le symbole d désignant une différentielle totale par rapport à ces quatre variables.

Si, dans l'une comme dans l'autre loi, l'action de l'élément ds' sur l'élément ds est dirigée suivant la droite qui joint ces deux élé-

---

(¹) Gauss, *Werke*, Bd. V, p. 628.

(²) P. Duhem, *Sur la loi d'Ampère* (*Journal de Physique*, 2ᵉ sér., t. V; 1886).

ments, on aura

$$\begin{aligned}
(y'-y)\,\mathfrak{Z} - (z'-z)\,\mathfrak{Y} &= 0,\\
(z'-z)\,\mathfrak{X} - (x'-x)\,\mathfrak{Z} &= 0,\\
(x'-x)\,\mathfrak{Y} - (y'-y)\,\mathfrak{X} &= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(y'-y)\,\mathfrak{Z}_1 - (z'-z)\,\mathfrak{Y}_1 &= 0,\\
(z'-z)\,\mathfrak{X}_1 - (x'-x)\,\mathfrak{Z}_1 &= 0,\\
(x'-x)\,\mathfrak{Y}_1 - (y'-y)\,\mathfrak{X}_1 &= 0;
\end{aligned}$$

on aura, par conséquent, en vertu des égalités (α),

$$\begin{aligned}
(y'-y)\,d\mathfrak{H}(J', x', y', z') - (z'-z)\,d\mathfrak{G}(J', x', y', z') &= 0,\\
(z'-z)\,d\mathfrak{F}(J', x', y', z') - (x'-x)\,d\mathfrak{H}(J', x', y', z') &= 0,\\
(x'-x)\,d\mathfrak{G}(J', x', y', z') - (y'-y)\,d\mathfrak{F}(J', x', y', z') &= 0.
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
F(J', x', y', z') &= (y'-y)\,\mathfrak{H}(J', x', y', z') - (z'-z)\,\mathfrak{G}(J', x', y', z'),\\
G(J', x', y', z') &= (z'-z)\,\mathfrak{F}(J', x', y', z') - (x'-x)\,\mathfrak{H}(J', x', y', z'),\\
H(J', x', y', z') &= (x'-x)\,\mathfrak{G}(J', x', y', z') - (y'-y)\,\mathfrak{F}(J', x', y', z').
\end{aligned}$$

Les égalités précédentes pourront s'écrire

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{H}(J', x', y', z')\,dy' - \mathfrak{G}(J', x', y', z')\,dz' &= dF(J', x', y', z'),\\
\mathfrak{F}(J', x', y', z')\,dz' - \mathfrak{H}(J', x', y', z')\,dx' &= dG(J', x', y', z'),\\
\mathfrak{G}(J', x', y', z')\,dx' - \mathfrak{F}(J', x', y', z')\,dy' &= dH(J', x', y', z').
\end{aligned}\right.$$

Examinons la première de ces égalités. Le premier membre ne renferme ni terme en dx', ni terme dJ'. La fonction F ne dépend donc ni de J', ni de x'. Comme, d'ailleurs, cette égalité peut être remplacée par les suivantes

$$\mathfrak{H} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \qquad \mathfrak{G} = -\frac{\partial F}{\partial z'},$$

on voit que les fonctions $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ ne dépendent non plus ni de x', ni de J'. En raisonnant de même sur les autres égalités, on arrive aux résultats suivants :

$\mathfrak{F}$ est une fonction de la seule variable x',

$\mathfrak{G}$ est une fonction de la seule variable y',

$\mathfrak{H}$ est une fonction de la seule variable z'.

Écrivons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes

pour que les premiers membres des égalités (β) soient des différentielles totales. Nous aurons

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z'} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x'} = 0,$$

qui donnent

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z'} = 0.$$

On voit alors que les quantités $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sont des quantités constantes, et, si l'on se reporte aux égalités (α), on trouve

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1,$$

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1,$$

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1.$$

Ainsi, *il n'existe qu'une manière de ramener l'action exercée par un courant réalisable quelconque sur un élément de courant quelconque à des actions dont chacune s'exerce entre deux éléments de courant et soit dirigée suivant la droite qui joint ces deux éléments.* Ce mode de réduction unique est alors nécessairement représenté par l'égalité (19).

§ 4. — Théorème de M. Le Cordier.

Voici une autre question, analogue à la précédente, et qui peut se résoudre d'une manière semblable.

Nous avons vu que les actions mutuelles de deux courants pouvaient être remplacées par des forces appliquées au milieu de chaque élément de courant, et que, si les courants étaient déformables d'une manière absolument quelconque, ces forces étaient complètement déterminées. Mais, si, au lieu de supposer les courants déformables d'une manière quelconque, on les suppose ri-

gides, il est permis de croire que l'on pourrait, d'une autre manière, décomposer les forces qui s'exercent entre ces courants en forces appliquées au milieu de chaque élément. A cette question on peut, avec M. Le Cordier [1], faire la réponse suivante :

Si l'on se donne deux courants, même supposés rigides, il n'existe, en général, pas plus d'une manière de décomposer l'action d'un courant sur l'autre en forces appliquées au milieu de chacun des éléments de ce dernier.

Supposons [2], en effet, que l'action du courant s' sur le courant s puisse, de deux manières différentes, se décomposer en forces appliquées au milieu de chaque élément ds. L'une des déterminations de la force appliquée au milieu de l'élément ds se déduira de l'autre par l'application à l'élément considéré ds d'une force dont les composantes auraient pour valeur

$$X\,ds, \quad Y\,ds, \quad Z\,ds.$$

Envisageons toutes les forces de cette espèce appliquées au courant auquel appartient l'élément ds. Elles se font équilibre d'elles-mêmes sur le conducteur supposé rigide que traverse ce courant. Supposons ce conducteur fermé et désignons par l sa longueur. Nous devons avoir

$$\int_{s=0}^{s=l} X\,ds = 0, \qquad \int_{s=0}^{s=l} Y\,ds = 0, \qquad \int_{s=0}^{s=l} Z\,ds = 0,$$

$$\int_{s=0}^{s=l} (yZ - zY)\,ds = 0,$$

$$\int_{s=0}^{s=l} (zX - xZ)\,ds = 0,$$

$$\int_{s=0}^{s=l} (xY - yX)\,ds = 0.$$

---

[1] PAUL LE CORDIER, *Théorie des actions électrodynamiques les plus générales qui puissent être observées* (*Journal de Liouville*, 3e série, t. X, p. 95; 1884).

[2] P. DUHEM, *Applications de la Thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants électriques* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XVI; 1887).

J varie d'une manière continue avec s et reprend la même valeur pour $s = 0$, $s = l$. Les égalités précédentes n'auront donc lieu, en général, quel que soit le courant sur lequel s'exerce l'action, que si l'on a

$$(\gamma)\qquad \left\{\begin{aligned} X\,ds &= d\mathfrak{F}(J, x, y, z),\\ Y\,ds &= d\mathfrak{G}(J, x, y, z),\\ Z\,ds &= d\mathfrak{H}(J, x, y, z)\end{aligned}\right.$$

et

$$(\delta)\qquad \left\{\begin{aligned} (yZ - zY)\,ds &= d\mathfrak{L}(J, x, y, z),\\ (zX - xZ)\,ds &= d\mathfrak{M}(J, x, y, z),\\ (xY - yX)\,ds &= d\mathfrak{N}(J, x, y, z).\end{aligned}\right.$$

En tenant compte des égalités (γ), les égalités (δ) deviennent

$$\begin{aligned} y\,d\mathfrak{H}(J, x, y, z) - z\,d\mathfrak{G}(J, x, y, z) &= d\mathfrak{L}(J, x, y, z),\\ z\,d\mathfrak{F}(J, x, y, z) - x\,d\mathfrak{H}(J, x, y, z) &= d\mathfrak{M}(J, x, y, z),\\ x\,d\mathfrak{G}(J, x, y, z) - y\,d\mathfrak{F}(J, x, y, z) &= d\mathfrak{N}(J, x, y, z),\end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$\begin{aligned} F(J, x, y, z) &= y\,\mathfrak{H}(J, x, y, z) - z\,\mathfrak{G}(J, x, y, z) - \mathfrak{L}(J, x, y, z),\\ G(J, x, y, z) &= z\,\mathfrak{F}(J, x, y, z) - x\,\mathfrak{H}(J, x, y, z) - \mathfrak{M}(J, x, y, z),\\ H(J, x, y, z) &= x\,\mathfrak{G}(J, x, y, z) - y\,\mathfrak{F}(J, x, y, z) - \mathfrak{N}(J, x, y, z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}\,dy - \mathfrak{G}\,dz &= dF,\\ \mathfrak{F}\,dz - \mathfrak{H}\,dx &= dG,\\ \mathfrak{G}\,dx - \mathfrak{F}\,dy &= dH.\end{aligned}$$

Ces égalités sont les égalités (β). Nous avons vu qu'elles entraînaient

$$\mathfrak{F} = \text{const.},\qquad \mathfrak{G} = \text{const.},\qquad \mathfrak{H} = \text{const.},$$

et, par conséquent, en vertu des égalités (γ),

$$X = 0,\qquad Y = 0,\qquad Z = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

§ 5. — Théorème de M. H. von Helmholtz.

Un dernier problème peut être traité par les mêmes méthodes. Le potentiel électrodynamique de deux courants est donné par

la formule

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\int JJ'\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega+\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)ds\,ds'.$$

Si les deux courants sont uniformes, cas auquel les deux intensités J et J' doivent être traitées comme des constantes dans l'intégration, on sait que l'on peut choisir la quantité λ arbitrairement, ce qui permet de donner une infinité de formes différentes à la quantité sous le signe $\int\int$. Mais il se peut que les déterminations ainsi obtenues pour cette quantité ne soient pas toutes les déterminations dont elle est susceptible. Nous allons nous proposer de trouver toutes ces déterminations.

Soit

$$JJ'\int\int\varphi(r,\cos\theta,\cos\theta',\cos\omega)\,ds\,ds'$$

une des formes du potentiel électrodynamique. Toute autre forme sera figurée par la formule

$$JJ'\int\int[\varphi(r,\cos\theta,\cos\theta',\cos\omega)+\psi(r,\cos\theta,\cos\theta',\cos\omega)]\,ds\,ds',$$

avec cette condition que l'on ait, pour deux circuits fermés quelconques,

$$(\varepsilon)\qquad\int\int\psi(r,\cos\theta,\cos\theta',\cos\omega)\,ds\,ds'=0,$$

Considérons l'intégrale $\int\psi(r,\cos\theta,\cos\theta',\cos\omega)\,ds$ étendue au circuit s. Cette intégrale doit être finie. Par le circuit s, faisons passer une surface à deux côtés et, par deux systèmes de lignes, découpons l'aire de cette surface en aires infiniment petites. L'intégrale précédente sera la somme des intégrales analogues étendues aux contours de ces aires infiniment petites, suivant une démonstration souvent indiquée. L'intégrale précédente doit donc être un infiniment petit du second ordre lorsque le contour auquel elle s'étend est un infiniment petit du premier ordre. Dès lors, d'après le théorème de M. Bertrand, la fonction ψ doit être linéaire en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. On démontrerait de même qu'elle doit être linéaire en $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$.

Il faut donc que l'on ait

$$\begin{aligned}\psi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega) = \; & A_{11}\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{12}\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{13}\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\ & + A_{21}\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{22}\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{23}\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\ & + A_{31}\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{32}\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{33}\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},\end{aligned}$$

les quantités A_{ij} étant des fonctions des x, y, z, x', y', z'. Il est facile d'en déduire, par un raisonnement analogue à celui qui a été donné à la fin du Chapitre II (Livre XIII), que ψ doit être de la forme suivante

$$\begin{aligned}&\psi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega) \\ &\quad = F(r)\cos\theta\cos\theta' + G(r)\cos\omega \\ &\quad = f(r)\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) \\ &\qquad + g(r)\left[(x'-x)\frac{dx}{ds} + (y'-y)\frac{dy}{ds} + (z'-z)\frac{dz}{ds}\right] \\ &\qquad\qquad \times \left[(x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds'} + (z'-z)\frac{dz'}{ds'}\right].\end{aligned}$$

On doit donc avoir, pour deux courants fermés quelconques, l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\iint \Big\{ & f(r)\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) \\ & + g(r)\left[(x'-x)\frac{dx}{ds} + (y'-y)\frac{dy}{ds} + (z'-z)\frac{dz}{ds}\right] \\ & \quad \times \left[(x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds'} + (z'-z)\frac{dz'}{ds'}\right]\Big\} ds\, ds' = 0.\end{aligned}$$

Cela exige que l'on ait

$$\int \Big\{ f(r)\frac{dx'}{ds'} + g(r)(x'-x)\left[(x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds'} + (z'-z)\frac{dz'}{ds'}\right]\Big\} ds' = \frac{\partial \mho(x,y,z)}{\partial x},$$

$$\int \Big\{ f(r)\frac{dy'}{ds'} + g(r)(y'-y)\left[(x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds'} + (z'-z)\frac{dz'}{ds'}\right)\Big\} ds' = \frac{\partial \mho(x,y,z)}{\partial y},$$

$$\int \Big\{ f(r)\frac{dz'}{ds'} + g(r)(z'-z)\left[(x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds'} + (z'-z)\frac{dz'}{ds'}\right]\Big\} ds' = \frac{\partial \mho(x,y,z)}{\partial z},$$

$\mho(x, y, z)$ étant une fonction finie, uniforme et continue des variables x, y, z.

Écrivons les conditions nécessaires et suffisantes pour que de

semblables égalités puissent exister. Nous trouverons, toute réduction faite,

$$\int\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right]\left[(z'-z)\frac{dy'}{ds'}-(y'-y)\frac{dz'}{ds'}\right]ds'=0,$$
$$\int\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right]\left[(x'-x)\frac{dz'}{ds'}-(z'-z)\frac{dx'}{ds'}\right]ds'=0,$$
$$\int\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right]\left[(y'-y)\frac{dx'}{ds'}-(x'-x)\frac{dy'}{ds'}\right]ds'=0.$$

Ces égalités devant avoir lieu quel que soit le courant fermé s', on doit avoir

$$\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right][(z'-z)\,dy'-(y'-y)\,dz']=d\,\mathrm{F}(\mathrm{J}',x',y',z'),$$
$$\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right][(x'-x)\,dz'-(z'-z)\,dx']=d\,\mathrm{G}(\mathrm{J}',x',y',z'),$$
$$\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right][(y'-y)\,dx'-(x'-x)\,dy']=d\,\mathrm{H}(\mathrm{J}',x',y',z').$$

Ces égalités sont de la forme (β). On a donc

$$\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right](x'-x)=\text{const.},$$
$$\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right](y'-y)=\text{const.},$$
$$\left[\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)\right](z'-z)=\text{const.}$$

Pour que ces égalités aient lieu, il faut et il suffit que l'on ait

$$(\zeta)\qquad \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}-g(r)=0.$$

Telle est la considération nécessaire et suffisante pour que l'égalité (ε) ait lieu.

Si l'on observe que l'on a

$$\frac{\partial r}{\partial s}=-\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y'-y}{r}\frac{dy}{ds}+\frac{z'-z}{r}\frac{dz}{ds}\right),$$
$$\frac{\partial r}{\partial s'}=\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'}+\frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}\right),$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}=&-\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)\\&+\frac{1}{r^3}\left[(x'-x)\frac{dx}{ds}+(y'-y)\frac{dy}{ds}+(z'-z)\frac{dz}{ds}\right]\\&\times\left[(x'-x)\frac{dx'}{ds'}+(y'-y)\frac{dy'}{ds'}+(z'-z)\frac{dz'}{ds'}\right],\end{aligned}$$

on verra sans peine que l'on peut écrire

$$\psi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega) = -rf(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - [f(r) + r^2 g(r)]\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$$

$$= -rf(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{d}{dr}[rf(r)]\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

ou, enfin, en posant,

$$\mathfrak{R}(r) = -rf(r),$$

$$\psi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega) = \frac{\partial^2 \mathfrak{R}(r)}{\partial s\,\partial s'}.$$

Ainsi, *ayant une forme du potentiel électrodynamique de deux courants fermés et uniformes, on obtiendra toutes les autres en ajoutant à la première une quantité de la forme*

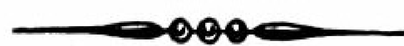
$$\mathrm{J}\,\mathrm{J}'\int\int \frac{\partial^2 \mathfrak{R}(r)}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds',$$

$\mathfrak{R}(r)$ *étant une fonction uniforme, finie et continue quelconque de* r.

Ce théorème a été énoncé par M. H. von Helmholtz [1].

---

[1] H. VON HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* (*Borchardt's Journal*, Bd. LXXII, p. 74; 1870. — HELMHOLTZ, *Abhandlungen*, t. I, p. 565).



CHAPITRE X.

FORCES QUE LES COURANTS FERMÉS ET UNIFORMES EXERCENT LES UNS SUR LES AUTRES.

§ 1. — Théorèmes généraux.

Nous sommes arrivés, au Chapitre III, à cette conséquence fondamentale :

Les forces électrodynamiques qui s'exercent dans un système de courants linéaires quelconques admettent pour potentiel la quantité

$$\Pi = \sum JJ'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\cos\omega]\,ds\,ds', \tag{1}$$

les intensités J *et* J′ *devant être laissées constantes dans la différentiation de cette quantité*

Si l'on fait sur les fonctions $f(r)$ et $g(r)$ les hypothèses que nous avons faites au Livre XIII, Chapitre III, hypothèses d'où l'on déduit que

$$f(r) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1-\lambda}{2r},$$

$$g(r) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1+\lambda}{2r},$$

on déduit aisément de la loi précédente la proposition que voici :

Les actions mutuelles de deux courants quelconques C *et* C′ *admettent pour potentiel la quantité*

$$\Pi(C, C') = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int_C\int_{C'} JJ'\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)ds\,ds'. \tag{2}$$

Lorsque les courants C et C′ sont fermés et uniformes, on sait que l'on peut prendre arbitrairement la valeur de la constante λ.

On peut, en particulier, faire $\lambda = 1$ ou bien $\lambda = -1$. On arrive ainsi à la conséquence suivante :

Les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes C et C' admettent un potentiel pour lequel on peut prendre arbitrairement l'une des deux formes

$$(3)\quad \begin{cases} \Pi(C, C') = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \displaystyle\int_C \int_{C'} \dfrac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds\, ds' \\ \Pi(C, C') = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \displaystyle\int_C \int_{C'} \dfrac{\cos\omega}{r} ds\, ds'. \end{cases}$$

La première de ces deux formes est celle qui a été employée par W. Weber; la seconde a été constamment employée par M. F.-E. Neumann.

La loi des actions mutuelles des courants fermés et uniformes peut encore s'énoncer d'une autre manière. Nous avons vu au Chapitre IX [égalité (8)] que *les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes étaient les mêmes que si deux éléments de courant quelconques exerçaient l'un sur l'autre une répulsion ayant pour grandeur*

$$(4)\quad R = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) JJ'\, ds\, ds'.$$

Cette force R peut être mise sous plusieurs formes différentes. Nous avons [Introduction, Chap. I, égalités (6) et (7)],

$$\cos\omega - \cos\theta\cos\theta' = -\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'},$$

$$\cos\omega = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right).$$

La formule (4) peut d'ailleurs s'écrire

$$R = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{1}{r^2}\left(\cos\omega - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + 2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right) J\, ds\, J'ds',$$

égalité à laquelle on pourra alors donner les diverses formes

$$(5)\quad R = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) J\, ds\, J'ds',$$

$$(6)\quad R = -\mathfrak{A}^2\frac{1}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right) J\, ds\, J'ds',$$

$$(7)\quad R = -\mathfrak{A}^2\frac{1}{r^2}\left(\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon - \frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'\right) J\, ds\, J'ds'.$$

On peut encore donner à la quantité R une dernière forme. On a

$$\frac{\partial^2 r^{\frac{1}{2}}}{\partial s\,\partial s'} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + \frac{1}{4} r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

L'égalité (5) peut donc s'écrire

$$(8) \qquad \mathrm{R} = 2\mathfrak{A}^2 \mathrm{J}\, ds\, \mathrm{J}' ds' \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

Ces diverses formes (4), (5), (6), (7) et (8) de la loi élémentaire des actions électrodynamiques entre courants fermés et uniformes ont été données, en 1826, par Ampère. Dans ses recherches, Ampère a fait surtout usage de la dernière.

La loi d'Ampère n'a plus guère, aujourd'hui, qu'un intérêt historique. La plupart des résultats obtenus par Ampère s'obtiennent plus immédiatement au moyen de l'expression du potentiel mutuel de deux courants donnée par les formules (3) et, en particulier, de celle qui est donnée par la dernière de ces deux formules, de celle qu'a employée F.-E. Neumann.

D'après la loi d'Ampère, deux éléments de courant parallèles, de même sens et perpendiculaires à une même droite exercent l'un sur l'autre une action attractive ayant pour grandeur

$$\mathfrak{A}^2 \frac{\mathrm{J}\, ds\, \mathrm{J}' ds'}{r^2}.$$

Ampère choisissait l'unité à laquelle il rapportait les intensités, de telle manière que cette force fût représentée en grandeur par

$$\frac{\mathrm{J}\, ds\, \mathrm{J}' ds'}{r^2},$$

c'est-à-dire de telle manière que la constante $\mathfrak{A}^2$ prît pour valeur 1. L'unité d'intensité ainsi choisie porte le nom d'*unité électrodynamique*. Intimement liée à la formule d'Ampère, elle n'a plus, comme elle, qu'un intérêt historique.

Revenons à l'expression

$$(9) \qquad \Pi(\mathrm{C}, \mathrm{C}') = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathrm{J}\mathrm{J}' \int_{\mathrm{C}} \int_{\mathrm{C}'} \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds',$$

qui représente le potentiel des actions mutuelles des deux courants fermés et uniformes C et C'. Le théorème d'Ampère nous montre

immédiatement que, si A et A′ sont des aires à deux côtés passant par les contours C et C′, nous aurons

$$(10) \qquad \Pi(C, C') = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \mathbf{S}_A \mathbf{S}_{A'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial N \, \partial N'} d\Omega \, d\Omega'.$$

Nous allons interpréter cette expression comme nous l'avons déjà fait au Chapitre VI du Livre précédent.

Menons deux surfaces infiniment voisines de la surface A, l'une A_1 du côté positif, l'autre A_2 du côté négatif. Soit ε la distance des deux surfaces A_1, A_2. Sur la surface A_1, distribuons du fluide magnétique austral avec la densité superficielle uniforme $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{J}{\varepsilon}$. Sur la surface A_2, distribuons du fluide magnétique boréal avec la même densité. Nous constituerons ainsi un feuillet magnétique que nous dirons *équivalent* au courant C.

Nous voyons alors que le potentiel électrodynamique mutuel de deux courants C et C′ est identique au potentiel magnétique mutuel des deux feuillets F et F′ qui leur sont respectivement équivalents, ce qui entraîne la conséquence suivante :

Les forces électrodynamiques qui s'exercent entre deux conducteurs fermés, parcourus par des courants uniformes, sont identiques aux forces qui s'exercent entre les deux feuillets magnétiques respectivement équivalents à ces deux courants.

Ce beau théorème est dû à Ampère.

Des transformations analogues à celles qui ont été faites au Chapitre VI du Livre précédent nous donneront encore les théorèmes suivants :

Lorsqu'un conducteur fermé C, *traversé par un courant d'intensité constante* J, *se déforme et se déplace devant un conducteur* C′, *fermé, immobile, traversé par un courant d'intensité constante* J′, *le travail effectué par les forces que le conducteur* C′ *exerce sur le conducteur* C *est proportionnel au nombre de lignes de force du conducteur* C′ *que le conducteur* C *coupe dans son mouvement.*

Lorsque deux conducteurs fermés C *et* C′, *parcourus par des courants uniformes et constants* J *et* J′, *se déplacent et se déforment d'une manière quelconque, le travail effectué par*

leurs actions électrodynamiques mutuelles s'obtient en multipliant par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}J'$ *la dérivée par rapport au temps du flux de force du courant* C *qui entre par la face négative d'une aire limitée au conducteur* C'.

§ 2. — **Action d'un courant fermé et uniforme sur un solénoïde** [1].

Soit J l'intensité du courant qui traverse le solénoïde S; soit C un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité J'. Supposons que Ω désigne l'aire d'un des petits cercles qui composent le solénoïde et que D soit la distance de deux de ces cercles, en sorte que

$$\Phi = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J \frac{\Omega}{D}$$

soit la puissance de ce solénoïde.

Par le conducteur C, faisons passer une surface à deux côtés, que l'axe du solénoïde perce n fois en passant de la face négative à la face positive et n' fois en passant de la face positive à la face négative.

Soit σ_A une des valeurs, au pôle austral du solénoïde, de la fonction $f(x, y, z)$ définie au Chapitre III de l'Introduction. Considérons un chemin ab allant du point A au point B sans rencontrer la surface menée par le contour C. Posons

$$\sigma_B = \sigma_A + \int_{ab} \frac{df(x, y, z)}{dl} dl.$$

D'après ce que nous avons vu au Chapitre IX du Livre précédent, le potentiel électrodynamique mutuel du courant fermé et du solénoïde aura pour valeur

$$\Pi(S, C) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J' [\sigma_A - \sigma_B + 4\pi(n - n')]. \tag{11}$$

---

[1] La théorie des forces exercées par les solénoïdes est due à Savary [*Mémoire sur l'application du calcul aux phénomènes électrodynamiques* (*Journal de Physique*, t. XCVI, p. 1; février 1823)] et à Ampère [*Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 175)]. *Voir* les tomes II et III de la *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, publiée par la Société française de Physique.

Imaginons que l'on donne au solénoïde un déplacement infiniment petit. Les actions que le courant fermé exerce sur le solénoïde effectueront un travail $d\mathfrak{T}$, et nous aurons

$$d\mathfrak{T} = -\,\delta\Pi(\mathrm{S},\,\mathrm{C}) = -\,\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi\mathrm{J}'\,\delta[\sigma_{\mathrm{A}} - \sigma_{\mathrm{B}} + 4\pi(n - n')].$$

On peut toujours supposer la surface qui passe par le circuit C menée de telle manière que le nombre des rencontres du solénoïde avec cette surface ne varie pas dans le déplacement infiniment petit considéré. On aura donc

$$d\mathfrak{T} = -\,\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi\mathrm{J}'(\delta\sigma_{\mathrm{A}} - \delta\sigma_{\mathrm{B}}).$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du pôle austral A du solénoïde, et ξ', η', ζ' les coordonnées du pôle boréal B. Nous aurons

$$\delta\sigma_{\mathrm{A}} = \frac{\partial f(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{\partial\xi}\,\delta\xi + \frac{\partial f(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{\partial\eta}\,\delta\eta + \frac{\partial f(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{\partial\zeta}\,\delta\zeta,$$

$$\delta\sigma_{\mathrm{B}} = \frac{\partial f(\xi',\,\eta',\,\zeta')}{\partial\xi'}\,\delta\xi' + \frac{\partial f(\xi',\,\eta',\,\zeta')}{\partial\eta'}\,\delta\eta' + \frac{\partial f(\xi',\,\eta',\,\zeta')}{\partial\zeta'}\,\delta\zeta'.$$

Les actions d'un courant fermé sur un solénoïde se réduisent donc à une force appliquée au pôle austral du solénoïde, force ayant pour composantes

$$\mathrm{X} = -\,\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi\mathrm{J}'\frac{\partial f(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{\partial\xi},$$

$$\mathrm{Y} = -\,\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi\mathrm{J}'\frac{\partial f(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{\partial\eta},$$

$$\mathrm{Z} = -\,\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi\mathrm{J}'\frac{\partial f(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{\partial\zeta}$$

et à une force appliquée au pôle boréal, force ayant pour composantes

$$\mathrm{X}' = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi\mathrm{J}'\frac{\partial f(\xi',\,\eta',\,\zeta')}{\partial\xi'},$$

$$\mathrm{Y}' = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi\mathrm{J}'\frac{\partial f(\xi',\,\eta',\,\zeta')}{\partial\eta'},$$

$$\mathrm{Z}' = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi\mathrm{J}'\frac{\partial f(\xi',\,\eta',\,\zeta')}{\partial\zeta'}.$$

Or nous avons calculé [Introduction, Chap. III, égalité (10)],

les dérivées partielles de la fonction $f(\xi, \eta, \zeta)$. Les résultats obtenus nous permettent d'écrire

$$(12)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \displaystyle\int_C \frac{1}{r^3}\left[(y-\eta)\frac{dz}{ds} - (z-\zeta)\frac{dy}{ds}\right] ds, \\ Y = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \displaystyle\int_C \frac{1}{r^3}\left[(z-\zeta)\frac{dx}{ds} - (x-\xi)\frac{dz}{ds}\right] ds, \\ Z = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \displaystyle\int_C \frac{1}{r^3}\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds} - (y-\eta)\frac{dx}{ds}\right] ds; \end{cases}$$

$$(12\,bis)\quad \begin{cases} X' = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \displaystyle\int_C \frac{1}{r^3}\left[(y-\eta')\frac{dz}{ds} - (z-\zeta')\frac{dy}{ds}\right] ds, \\ Y' = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \displaystyle\int_C \frac{1}{r^3}\left[(z-\zeta')\frac{dx}{ds} - (x-\xi')\frac{dz}{ds}\right] ds, \\ Z' = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \displaystyle\int_C \frac{1}{r^3}\left[(x-\xi')\frac{dy}{ds} - (y-\eta')\frac{dx}{ds}\right] ds. \end{cases}$$

Ces résultats peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Imaginons qu'un solénoïde porte, en son pôle austral, une quantité *positive* Φ d'un certain *fluide fictif* susceptible, comme le fluide électrique et le fluide magnétique, d'être affecté de signe, et, en son pôle boréal, une quantité $(-\Phi)$ du même fluide.

Un courant fermé et uniforme exercera, sur un solénoïde, la même action que si chaque élément du courant exerçait sur une masse Φ *de fluide fictif une force appliquée au point* (ξ, η, ζ), *où se trouve cette masse, force ayant pour composantes*

$$(13)\quad \begin{cases} \Xi = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \dfrac{1}{r^3}\left[(y-\eta)\dfrac{dz}{ds} - (z-\zeta)\dfrac{dy}{ds}\right] ds, \\ H = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \dfrac{1}{r^3}\left[(z-\zeta)\dfrac{dx}{ds} - (y-\xi)\dfrac{dz}{ds}\right] ds, \\ Z = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Phi J' \dfrac{1}{r^3}\left[(x-\xi)\dfrac{dy}{ds} - (y-\eta)\dfrac{dx}{ds}\right] ds. \end{cases}$$

Nous dirons que ces formules représentent la *loi de Biot et Savart pour l'action d'un courant sur un pôle de solénoïde.*

Ampère, en s'appuyant sur des considérations auxquelles les progrès de l'Électrodynamique ont enlevé toute valeur, énonçait que *l'action d'un élément de courant ds sur un pôle de solénoïde était donnée en grandeur et en direction par les for-*

mules (13), *mais qu'elle était appliquée au point* (x, y, z) *coïncidant avec un point d'élément ds et supposé invariablement lié au solénoïde, et non pas au point* (ξ, η, ζ).

Il est aisé de voir que *la loi d'Ampère et la loi de Biot et Savart conduisent au même résultat lorsqu'on veut calculer l'action d'un courant fermé et uniforme sur un pôle de solénoïde,* et que l'on peut, par conséquent, les substituer l'une à l'autre ([1]).

En effet, la force donnée par les formules (13) et appliquée au point (x, y, z) comme le veut Ampère, peut être remplacée par une force de même grandeur et de même direction appliquée au point (ξ, η, ζ), c'est-à-dire par la force de Biot et Savart, et par un couple dont l'axe aura pour composantes

$$\begin{aligned} \lambda\, ds &= \mathrm{Z}(\eta - y) - \mathrm{H}(\zeta - z), \\ \mu\, ds &= \Xi(\zeta - z) - \mathrm{Z}(\xi - x), \\ \nu\, ds &= \mathrm{H}(\xi - x) - \Xi(\eta - y). \end{aligned}$$

Tout calcul fait, ces formules deviennent

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda\, ds &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi \mathrm{J}' \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) ds, \\ \mu\, ds &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi \mathrm{J}' \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) ds, \\ \nu\, ds &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi \mathrm{J}' \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) ds. \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on calculera l'action d'un courant fermé et uniforme sur un pôle de solénoïde, tous ces couples élémentaires se composeront en un couple unique ayant pour composantes

$$\mathrm{L} = \int_{\mathrm{C}} \lambda\, ds, \qquad \mathrm{M} = \int_{\mathrm{C}} \mu\, ds, \qquad \mathrm{N} = \int_{\mathrm{C}} \nu\, ds,$$

c'est-à-dire, d'après les égalités (14),

$$\mathrm{L} = 0, \qquad \mathrm{M} = 0, \qquad \mathrm{N} = 0.$$

La loi d'Ampère et la loi de Biot et Savart conduisent donc bien au même résultat lorsqu'on calcule l'action d'un courant fermé et uniforme sur un pôle de solénoïde.

([1]) Cette démonstration est due à Ampère (*Collection de Mémoires publiés par la Société de Physique,* t. III, p. 132).

Étudions la force dont les composantes sont données par les égalités (13).

Nous avons

$$\Xi \frac{dx}{ds} + \mathrm{H} \frac{dy}{ds} + \mathrm{Z} \frac{dz}{ds} = 0.$$

Donc *l'action d'un élément de courant sur un pôle de solénoïde est normale à l'élément de courant.*

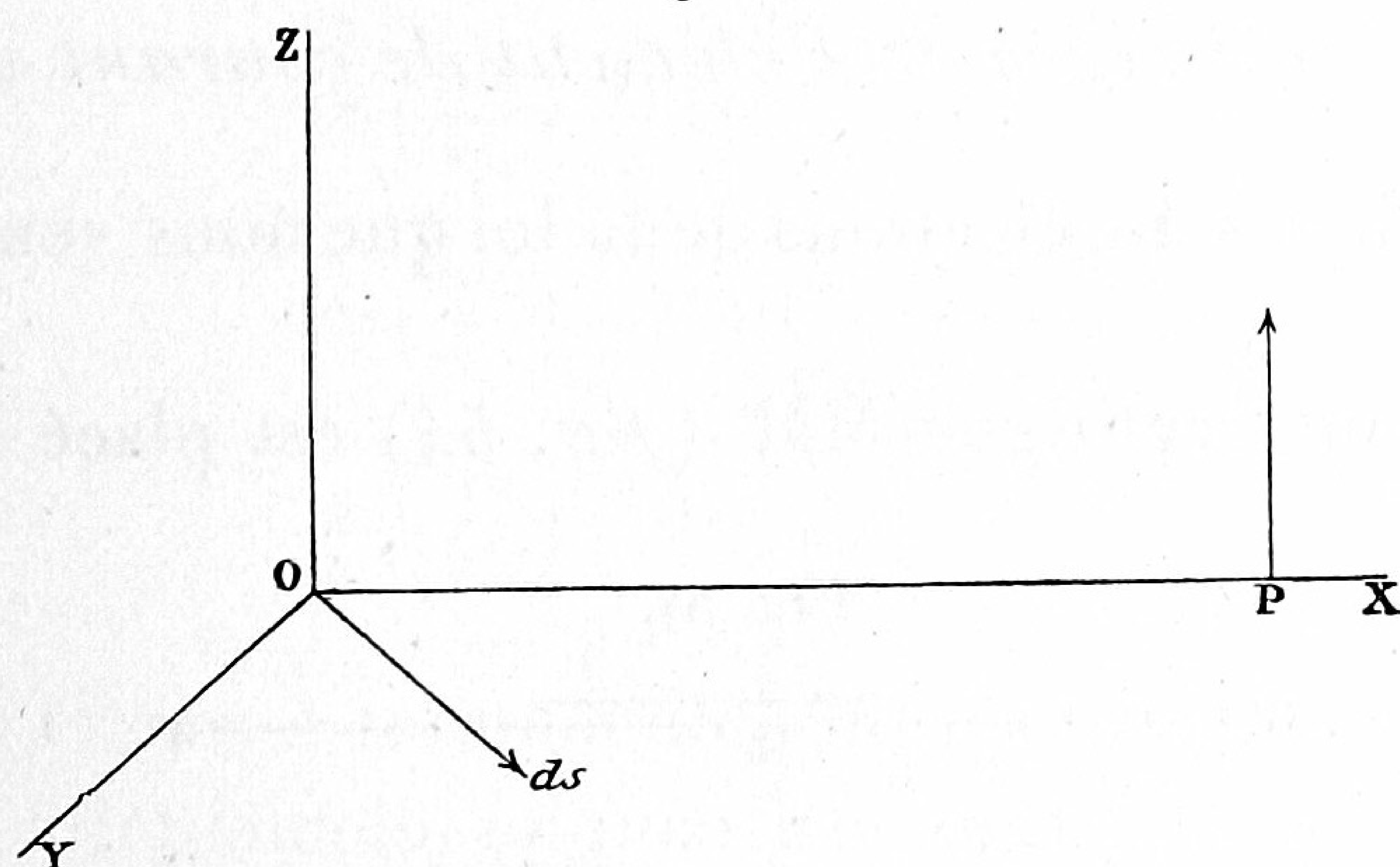
Nous avons aussi

$$\Xi \frac{\xi - x}{r} + \mathrm{H} \frac{\eta - y}{r} + \mathrm{Z} \frac{\zeta - z}{r} = 0.$$

Donc *l'action d'un élément de courant sur un pôle de solénoïde est normale à la droite qui joint l'élément de courant au pôle de solénoïde.*

Prenons pour axe des x (*fig.* 53) la droite qui joint l'élément de courant au pôle P; pour axe des y une droite normale à OP,

Fig. 53.



située dans le plan de OP et de ds, du côté de OP où se trouve ds; pour axe des z une droite formant, avec les précédentes, un trièdre trirectangle négatif.

La force F, comptée positivement parallèlement à OZ, aura pour valeur, d'après les formules (13),

$$\mathrm{Z} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi \mathrm{J}' \frac{1}{r^3} \left[(x - \xi) \frac{dy}{ds} - (y - \eta) \frac{dx}{ds} \right] ds.$$

Or on a

$$x - \xi = -r, \qquad y - \eta = 0,$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin(r, ds),$$

la droite r étant supposée dirigée de l'élément de courant vers le pôle. On a donc

$$F = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J' \frac{\sin(r, ds)}{r^2} ds.$$

Ainsi *un courant fermé et uniforme agit sur un solénoide comme si tout élément de courant exerçait, sur une masse de fluide fictif, une certaine force.*

Cette force est appliquée au pôle de solénoïde (loi de Biot et Savart) ou en un point invariablement lié au pôle, mais coïncidant avec un point de l'élément de courant (loi d'Ampère).

Transportée au pôle de solénoïde, elle forme, avec l'élément ds, un système à sens positif de rotation.

Elle a pour grandeur

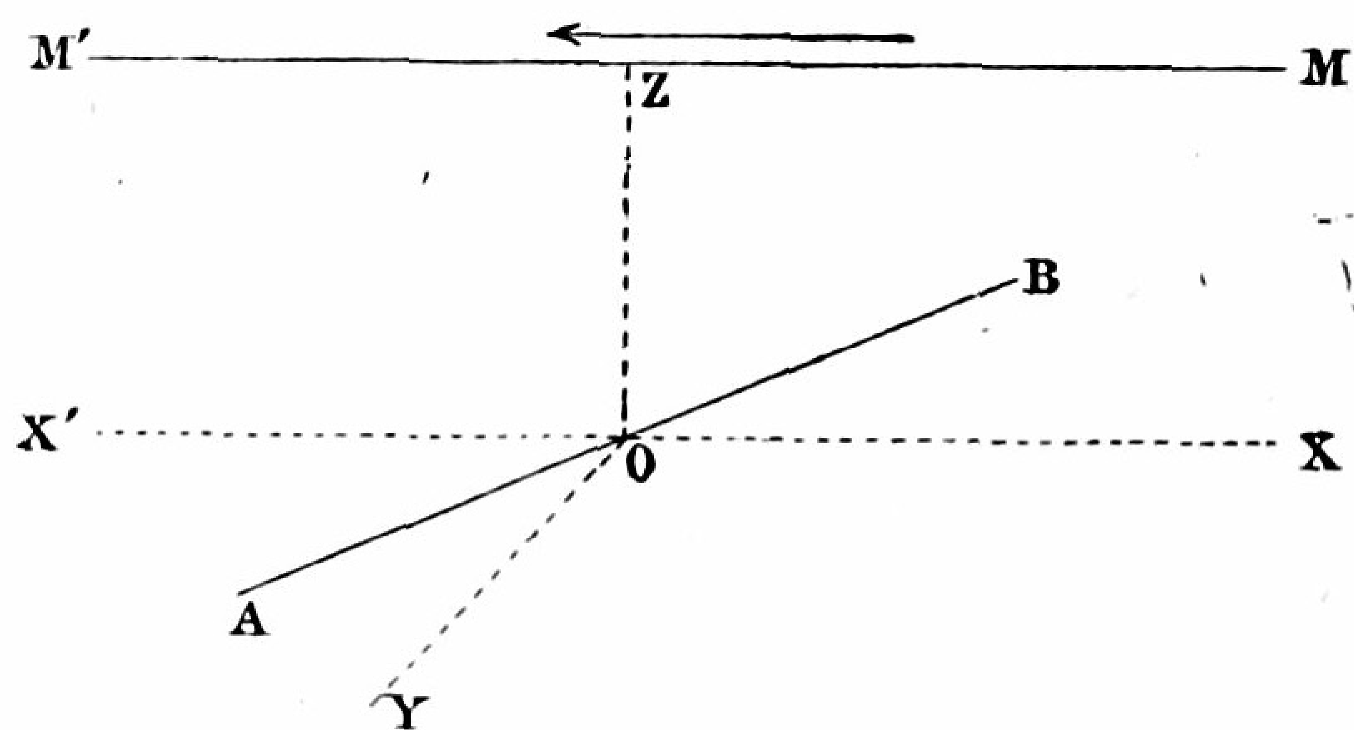
$$F = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J' \frac{\sin(r, ds)}{r^2} ds, \tag{15}$$

la droite r étant dirigée de l'élément de courant vers le pôle.

Faisons quelques applications de la loi que nous venons d'énoncer.

1° Un courant rectiligne MM′ (*fig.* 54) est placé horizontalement.

Fig. 54.



Un solénoïde horizontal AB est mobile autour d'un axe OZ vertical passant par son milieu O et par le courant rectiligne indéfini MM′. Quelle sera la position d'équilibre du solénoïde?

Soit XOX′ une parallèle à MX′; soit OY une perpendiculaire au plan ZOX, dirigée à gauche de XOX′.

Chaque élément ds du courant exerce sur le pôle A une force donnée par la loi précédente et, par conséquent, ayant, suivantOY,

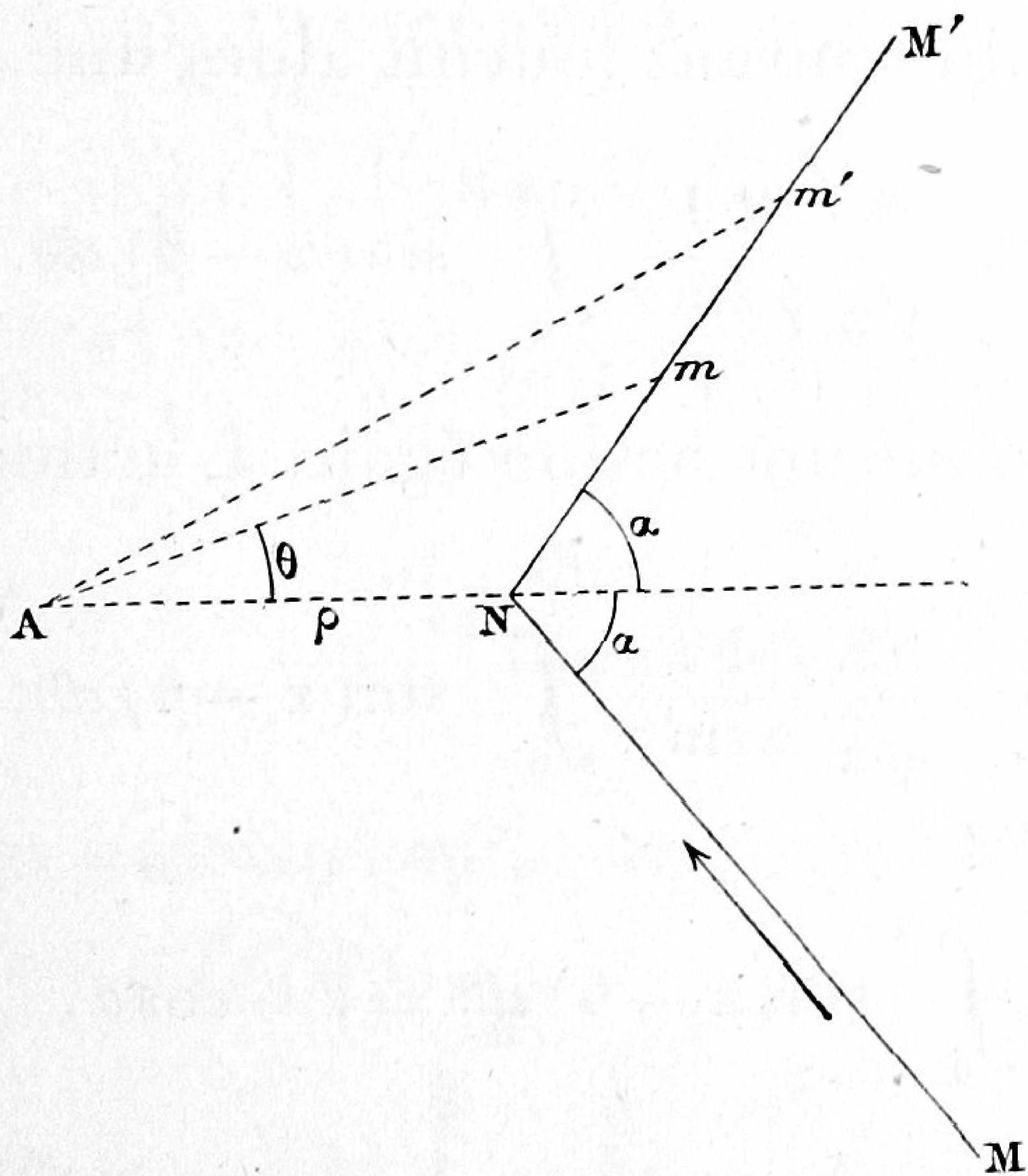
une composante positive. Toutes ces forces se composeront en une seule dont la composante, suivant OY, sera positive. De même, toutes les forces agissant sur le pôle B se composeront en une seule égale et directement opposée à la précédente.

Il est d'ailleurs évident, par raison de symétrie, que le solénoïde AB est en équilibre, lorsque OA ou OB vient se placer suivant OY. Ce que nous venons de dire montre qu'il est en équilibre stable si OA est suivant OY, et en équilibre instable si OB est suivant OY. On arrive donc au résultat suivant :

Un solénoïde horizontal étant mobile autour d'un axe vertical, si l'on place au-dessus de lui un courant rectiligne indéfini, le solénoïde se mettra en croix avec le courant de manière que son pôle austral se place à la gauche du courant.

2° Considérons (*fig.* 55) un courant plan, indéfini, formé de deux parties rectilignes MN, NM′, faisant entre elles un angle 2α.

Fig. 55.



Sur le prolongement de la bissectrice de cet angle se trouve un pôle austral de solénoïde A. Cherchons quelle est l'action du courant sur le pôle.

Tous les éléments $mm' = ds$ du courant exercent sur le pôle A une action normale au plan de la figure et dirigée en avant de ce plan. Toutes ces actions étant de même sens, on aura leur résultante en faisant leur somme.

L'action de mm' sur le pôle A a pour valeur, d'après la for-

mule (13),

$$F = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J' \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\overline{Am}^2} mm',$$

θ étant l'angle mAN.

Dans le triangle mAN, on a

$$Am = \frac{\rho \sin\alpha}{\sin(\alpha - \theta)},$$

ρ désignant la distance AN.

Dans le triangle Amm', on a

$$mm' = \frac{Am}{\sin(\alpha - \theta)} d\theta.$$

On a donc

$$\sin(\alpha - \theta) \frac{mm'}{\overline{Am}^2} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\rho \sin\alpha} d\theta,$$

ce qui donne

$$F = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\Phi J'}{\rho} \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin\alpha} d\theta.$$

La branche NM' du courant fournit alors une action

$$g = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\Phi J'}{\rho \sin\alpha} \int_0^\alpha \sin(\alpha - \theta)\, d\theta.$$

La branche MN donne une action égale. L'action cherchée a donc pour valeur

$$G = \frac{2\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\Phi J'}{\rho \sin\alpha} \int_0^\alpha \sin(\alpha - \theta)\, d\theta.$$

Or

$$\int_0^\alpha \sin(\alpha - \theta)\, d\theta = 1 - \cos\alpha.$$

On a donc, en remarquant que

$$\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2},$$

$$G = \frac{2\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\Phi J'}{\rho} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}. \tag{16}$$

Dans le cas particulier où le courant est rectiligne, on a simplement

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

et

$$G = \frac{2\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\Phi J'}{\rho}. \tag{17}$$

Dans l'étude de l'Électromagnétisme, nous verrons l'importance de ces résultats.

§ 3. — Actions mutuelles de deux solénoïdes.

Considérons deux solénoïdes, l'un S ou AB, l'autre S' ou A'B'. Soient

$$\Phi = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\Omega J}{D}, \qquad \Phi' = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\Omega' J'}{D'}$$

les puissances de ces deux solénoïdes.

Soit C un des courants élémentaires du premier solénoïde.

Soit C' un des courants élémentaires du second. Le potentiel mutuel de ces deux courants a pour valeur

$$\frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial N \, \partial N'} \Omega\Omega'.$$

Le potentiel mutuel des deux solénoïdes a alors pour valeur

$$\Pi(S, S') = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \sum_s \sum_{s'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial N \, \partial N'} \Omega\Omega'.$$

Comme dans un cas analogue, au Livre XIII, Chapitre VIII, cette expression peut s'écrire

$$\Pi(S, S') = \Phi\Phi' \int_B^A \int_{B'}^{A'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l \, \partial l'} dl \, dl',$$

dl et dl' étant les éléments des axes des solénoïdes.

L'intégration s'effectue immédiatement et donne

$$\Pi(S, S') = \Phi\Phi' \left[\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} - \frac{1}{\overline{AB'}} - \frac{1}{\overline{BA'}} \right]. \tag{18}$$

Cette formule conduit aux conséquences suivantes :

Les pôles de même nom de deux solénoïdes se repoussent; les

pôles de nom contraire s'attirent; ces actions sont, en grandeur, proportionnelles au produit des puissances des deux solénoïdes et en raison inverse du carré de la distance des deux pôles.

En d'autres termes, *les actions mutuelles de deux solénoïdes électrodynamiques sont identiques à celles de deux solénoïdes magnétiques de même forme, portant en leurs extrémités des quantités de fluide magnétique respectivement égales en grandeur et en signe aux quantités de fluide fictif que l'on est convenu de placer aux extrémités des deux solénoïdes.*

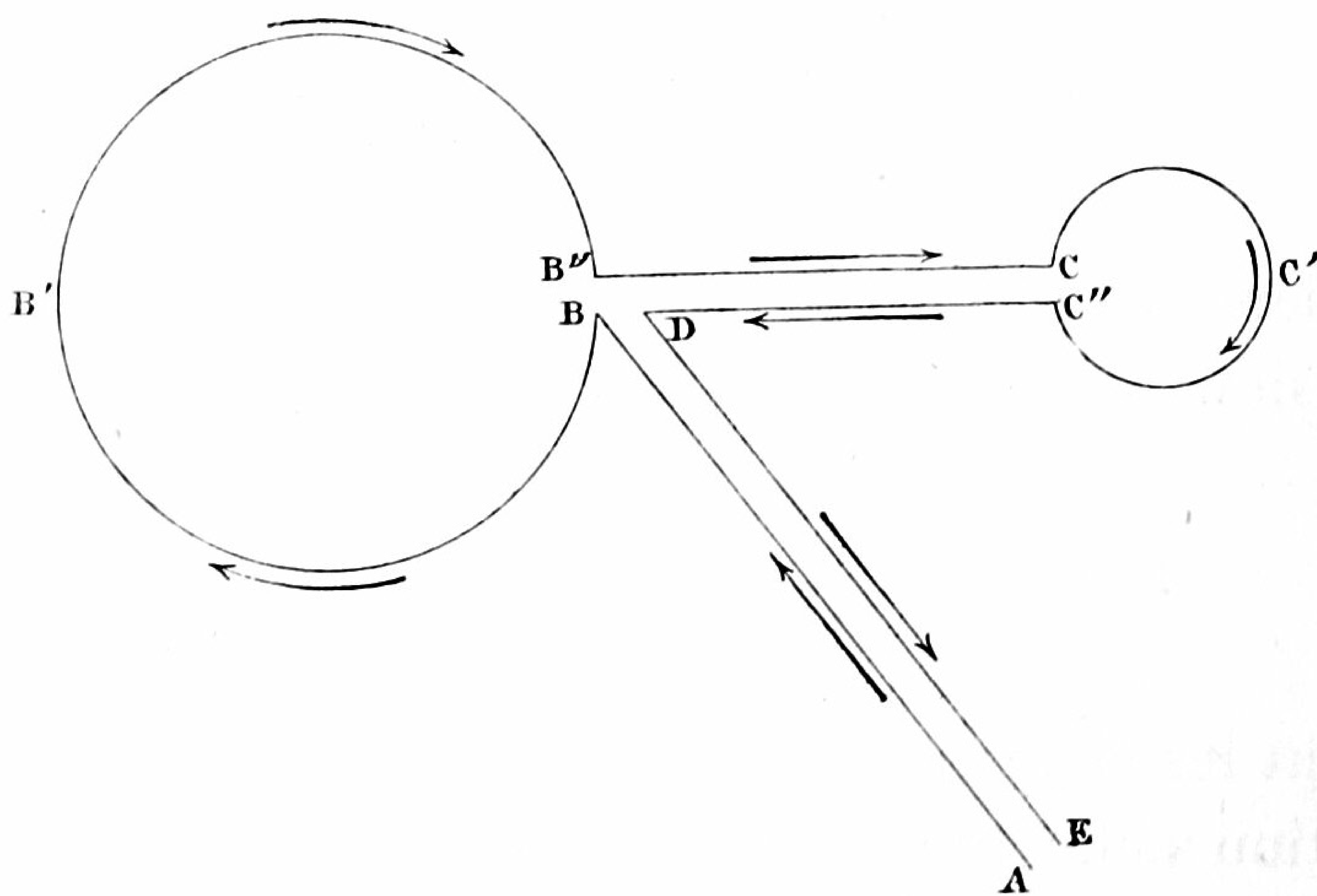
§ 4. — Électrodynamomètre absolu.

Nous avons étudié jusqu'ici les forces électrodynamiques développées par l'action d'un courant fermé sur un autre courant fermé. Les divers éléments d'un courant fermé et uniforme exercent aussi les uns sur les autres des actions qui ont pour potentiel

$$\Pi(C, C) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{4} J^2 \int_C \int_C \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds'.$$

Nous allons faire de cette formule une application qui nous donnera le principe de l'électrodynamomètre absolu (¹).

Fig. 56.



Un courant, amené de loin par un fil AB (*fig.* 56), parcourt un circuit presque fermé BB'B'', B'' étant tout près de B.

(¹) W. WEBER, *Electrodynamische Maassbestimmungen*. Heft 1; 1846.

De là il s'éloigne par un fil B″C pour parcourir un autre circuit presque fermé CC′C″. Il en revient par un fil C″DE qui est constamment très voisin de CB″ et de BA.

La seule partie mobile du circuit est la partie B″CC′C″D; encore le circuit CC′C″ est-il supposé rigide.

Si γ et γ' désignent deux portions de circuit, et si l'on pose, pour abréger,

$$(\gamma, \gamma') = \int_\gamma \int_{\gamma'} \frac{\cos \omega}{r} \, ds \, ds',$$

on verra sans peine que la partie variable de Π se réduit à

$$\begin{aligned}-\frac{\mathfrak{A}^2}{2} J^2 \Big[& (AB, CC'C'')+(BB'B'', CC'C'')+(B''C, CC'C'')+(BC, CC'C'')+(DE, CC'C'') \\ & +(AB, B''C)+(BB'B'', B''C)+\frac{1}{2}(B''C, B''C)+(DE, B''C) \\ & +(AB, C''D)+(BB'B'', C''D)+\frac{1}{2}(C''D, C''D)+(DE, C''D)+(B''C, C''D)\Big].\end{aligned}$$

Or, on a sensiblement

$$\begin{aligned}(AB, CC'C'') + (DE, CC'C'') &= 0,\\ (B''C, CC'C'') + (C''D, CC'C'') &= 0,\\ (AB, B''C) + (AB, C''D) &= 0,\\ (BB'B'', B''C) + (BB'B'', C''D) &= 0,\\ (DE, B''C) + (DE, C''D) &= 0,\\ (B''C, B''C) = (C''D, C''D) &= -(B''C, C''D).\end{aligned}$$

La partie variable de $\Pi(C, C)$ se réduit donc à

$$\Pi_1(C, C) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} J^2 (BB'B'', CC'C'').$$

Le travail élémentaire produit par les actions électrodynamiques dans une déformation du système est

$$(19) \qquad d\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J^2 \delta (BB'B'', CC'C'').$$

Si l'on donne aux deux circuits presque fermés BB′B″, CC′C″, qui, pratiquement, sont deux bobines, une forme géométrique simple et bien déterminée, on pourra calculer la quantité

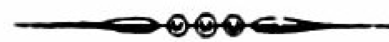
$$\delta(BB'B'', CC'C'').$$

Si l'on fait équilibre aux actions en question par des forces con-

nues telles qu'une suspension bifilaire (électrodynamomètre de Weber) ou un poids (électrodynamomètre de Joule), on aura obtenu un instrument qui, grâce à la formule (19), permettra de déterminer expérimentalement le produit

$$\mathfrak{A}^2 J^2.$$

Nous renverrons aux Traités pour la description détaillée des électrodynamomètres.



CHAPITRE XI.

ACTION D'UN COURANT FERMÉ ET UNIFORME SUR UN ÉLÉMENT DE COURANT UNIFORME.

§ 1. — Théorèmes généraux.

Soit un circuit fermé C, parcouru par un courant uniforme d'intensité J′, agissant sur un élément $AB = ds$, parcouru de A en B par un courant uniforme d'intensité J.

Nous savons que l'action du circuit fermé C sur l'élément ds se réduit à une force unique appliquée à l'élément ds. D'après la définition de cette force, lorsque l'élément AB se déplace de manière à venir en A′B′, cette force effectue un travail égal au potentiel électrodynamique du courant C sur un courant d'intensité J parcourant le circuit ABB′A′A.

Si l'on se reporte à une démonstration donnée au Livre XIII, Chapitre VI, on voit que : *le travail produit par l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme, dans un déplacement de cet élément, est proportionnel au nombre de lignes de force du courant fermé que l'élément coupe dans son mouvement.*

Nous avons vu [Livre XIV, Chap. IX, équations (2)] que la force en question avait pour composantes

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,J\,ds \int \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{dx'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) J'\,ds', \\
Y &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,J\,ds \int \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{dy'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) J'\,ds', \\
Z &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,J\,ds \int \left(\cos\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{dz'}{ds'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right) J'\,ds',
\end{aligned}
\right.
$$

expressions auxquelles conduisent également la loi d'Ampère et la loi de Grassmann.

Remarquons que nous avons

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

$$\cos\omega = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'};$$

posons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz'}{ds'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy'}{ds'} \right) ds', \\ B &= \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dx'}{ds'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dz'}{ds'} \right) ds', \\ C &= \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dy'}{ds'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dx'}{ds'} \right) ds', \end{aligned}\right.$$

et les formules (1) prendront la forme très élégante

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(C\frac{dy}{ds} - B\frac{dz}{ds} \right) J' J\, ds, \\ Y &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(A\frac{dz}{ds} - C\frac{dx}{ds} \right) J' J\, ds, \\ Z &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(B\frac{dx}{ds} - A\frac{dy}{ds} \right) J' J\, ds. \end{aligned}\right.$$

Ces formules donnent la démonstration immédiate de plusieurs propositions importantes.

1° Des formules (3), on déduit immédiatement

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = 0.$$

L'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme est normale à l'élément sur lequel elle s'exerce.

Cette proposition, outre son importance intrinsèque, a un grand intérêt historique. Ampère avait fondé la démonstration de la loi des actions électrodynamiques sur un certain nombre d'hypothèses et sur trois lois expérimentales. M. Bertrand a montré que, de ces trois lois, deux seulement étaient nécessaires à l'éta-

blissement de la loi d'Ampère. Or la loi que nous venons d'énoncer constitue l'une des deux lois expérimentales d'Ampère que M. Bertrand a conservées ([1]).

2° Les égalités (3) nous donnent encore

$$AX + BY + CZ = 0.$$

Si nous donnons, avec Ampère, le nom de *directrice de l'action du courant fermé* à la droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels à A, B, C, nous voyons que *l'action exercée par un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme est normale à la directrice au point où se trouve l'élément.*

3° Envisageons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ A & B & C \end{vmatrix}.$$

Il se réduit, en vertu des égalités (3), à

$$\Delta = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\left(C\frac{dy}{ds} - B\frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(A\frac{dz}{ds} - C\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(B\frac{dx}{ds} - A\frac{dy}{ds}\right)^2\right] J' J\, ds,$$

et, par conséquent, est essentiellement positif. Ainsi :

Le trièdre trirectangle formé par l'action qu'un courant fermé exerce sur un élément de courant, l'élément de courant et la directrice, a un sens de rotation négatif.

4° Examinons de plus près les propriétés de la directrice. Le théorème de Stokes nous donne, en désignant par N la normale à l'élément $d\Omega$ d'une aire passant par le circuit C,

$$\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz'}{ds'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy'}{ds'}\right)ds'$$

$$= S\left[\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial y'} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z'}\right)\cos(N, x) - \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x'}\cos(N, y) - \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x'}\cos(N, z)\right]d\Omega.$$

([1]) *Voir* l'*Appendice* au Livre XIV.

Mais

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial y'} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial z'} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2};$$

d'ailleurs

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial y'} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial z'} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial x'}.$$

On a aussi

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x'} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y'}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x'} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z'}.$$

L'égalité précédente fournit donc la première des formules

$$A = -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{S} \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \cos(N, x) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \cos(N, y) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \cos(N, z) \right] d\Omega,$$

$$B = -\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{S} \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \cos(N, x) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \cos(N, y) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \cos(N, z) \right] d\Omega,$$

$$C = -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{S} \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \cos(N, x) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \cos(N, y) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \cos(N, z) \right] d\Omega.$$

On en déduit immédiatement

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} A J' = -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{S} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Omega,$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} B J' = -\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{S} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Omega,$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} C J' = -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{S} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\Omega,$$

ou bien, en désignant par $\mathfrak{V}$ la fonction potentielle magnétique

du feuillet équivalent au courant C,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{AJ}' = -\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{BJ}' = -\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{CJ}' = -\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces formules (4) conduisent alors à la conséquence suivante :

La directrice en un point de l'action d'un courant fermé et uniforme coïncide en direction et sens avec la tangente à la ligne de force du courant menée par ce point.

§ 2. — Action d'un solénoïde sur un élément de courant uniforme.

D'après les égalités (3) et (4), l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément d'un courant a pour composantes

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{J}\,ds\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\dfrac{dz}{ds}\right), \\ \mathrm{Y} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{J}\,ds\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\dfrac{dz}{ds} - \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\dfrac{dx}{ds}\right), \\ \mathrm{Z} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{J}\,ds\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\dfrac{dx}{ds} - \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\dfrac{dy}{ds}\right). \end{cases}$$

Supposons que le courant C soit un petit cercle d'aire Ω.

Nous aurons

$$\mathcal{V} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{J}'\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathrm{N}}\,\Omega,$$

et les formules précédentes deviendront

$$(5\ bis)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\mathrm{J}'\Omega\mathrm{J}\,ds\,\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{N}}\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\dfrac{dz}{ds}\right), \\ \mathrm{Y} = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\mathrm{J}'\Omega\mathrm{J}\,ds\,\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{N}}\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\dfrac{dz}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\dfrac{dx}{ds}\right), \\ \mathrm{Z} = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\mathrm{J}'\Omega\mathrm{J}\,ds\,\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{N}}\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\dfrac{dx}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\dfrac{dy}{ds}\right). \end{cases}$$

Si nous écrivons des égalités analogues pour les divers cercles qui composent un solénoïde AB, de puissance $\Phi = \frac{\Omega J'}{D} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$, trois intégrations nous fourniront les trois composantes de l'action que ce solénoïde exerce sur un élément de courant uniforme. Nous verrons alors que :

L'action d'un solénoide sur un élément de courant uniforme peut se décomposer en deux autres :

1° *Une action émanée du pôle austral du solénoïde; celle-ci est une force appliquée à l'élément de courant et ayant pour composantes*

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J \frac{1}{r^3} \left[(y-\eta) \frac{dz}{ds} - (z-\zeta) \frac{dy}{ds} \right] ds, \\ Y &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J \frac{1}{r^3} \left[(z-\zeta) \frac{dx}{ds} - (x-\xi) \frac{dz}{ds} \right] ds, \\ Z &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J \frac{1}{r^3} \left[(x-\xi) \frac{dy}{ds} - (y-\eta) \frac{dx}{ds} \right] ds; \end{aligned} \right.$$

2° *Une action émanée du pôle boréal du solénoïde; celle-ci est une force appliquée à l'élément et ayant pour composantes*

$$(6\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} X' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J \frac{1}{r'^3} \left[(y-\eta') \frac{dz}{ds} - (z-\zeta') \frac{dy}{ds} \right] ds, \\ Y' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J \frac{1}{r'^3} \left[(z-\zeta') \frac{dx}{ds} - (x-\xi') \frac{dz}{ds} \right] ds, \\ Z' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Phi J \frac{1}{r'^3} \left[(x-\xi') \frac{dy}{ds} - (y-\eta') \frac{dx}{ds} \right] ds \end{aligned} \right.$$

Si l'on compare ces égalités (6) et (6 *bis*) aux égalités (13) du Chapitre précédent, on arrive à cette proposition qui nous dispense de pousser plus loin l'étude de l'action d'un solénoïde sur un élément de courant :

L'action d'un pôle de solénoïde sur un élément de courant est une force égale et directement opposée à celle qui représente, d'après la loi d'Ampère, l'action d'un élément de courant sur un pôle de solénoide.



APPENDICE AU LIVRE XIV.

SUR LA LOI D'AMPÈRE.

L'ordre que nous avons suivi pour exposer les lois de l'Induction et de l'Électrodynamique diffère extrêmement de l'ordre habituellement reçu dans les Ouvrages qui traitent de ces sciences. Nous avons donné, au Chapitre V du Livre XIV, les raisons qui imposaient à notre choix le plan que nous avons adopté. Néanmoins, nous pensons que nos Leçons présenteraient une grave lacune si elles ne faisaient connaître, au moins dans leurs grandes lignes, les théories classiques par lesquelles on parvient directement aux lois des actions électrodynamiques entre courants fermés et uniformes. C'est à l'exposé très bref de ces théories qu'est consacré le présent Appendice.

§ 1. — Loi d'Ampère; démonstration d'Ampère.

Les divers travaux par lesquels Ampère est arrivé à formuler la loi de l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme sont résumés dans le grand Mémoire qu'il a publié en 1826 [1]. La démonstration d'Ampère repose sur six hypothèses et sur trois lois expérimentales.

Première hypothèse. — *Soit un courant uniforme* $\mathcal{C}$ *qui agit sur un élément de courant uniforme* ds'. *Décomposons par la pensée le courant* $\mathcal{C}$ *en éléments* $ds_1, ds_2, \ldots$. *L'action du courant* $\mathcal{C}$ *sur l'élément* ds' *est la résultante d'actions élémentaires exercées par les éléments* $ds_1, ds_2, \ldots$ *sur l'élément* ds'.

Deuxième hypothèse. — *L'action que l'élément* ds *exerce sur l'élément* ds' *est une force, appliquée en un point de l'élément* ds' *et dirigée suivant la ligne qui joint un point de l'élément* ds *à un point de*

[1] Ampère, *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1826).

l'élément ds'. L'action de l'élément ds' sur l'élément ds est egale et directement opposée à la précédente.

TROISIÈME HYPOTHÈSE. — *L'action de l'élément ds sur l'élément ds' dépend uniquement des intensités* J *et* J' *des courants qui traversent les éléments ds et ds', de la longueur et de la situation relative de ces deux éléments.*

De cette hypothèse, on déduit aisément que la force exercée par l'élément ds sur l'élément ds' est proportionnelle au produit JJ'.

Considérons en effet un premier élément ds_1, traversé par un courant d'intensité J_1. Il exerce sur l'élément ds' une force répulsive que nous représenterons par $f(J_1, J')$.

A l'élément ds_1 accolons un élément ds_2 de même longueur, traversé par un courant d'intensité J_2. Il exercera sur l'élément ds' une action répulsive dont l'expression ne différera de la précédente que par l'échange des quantités J_1, J_2. Cette action aura pour valeur $f(J_2, J')$.

L'ensemble des deux éléments ds_1, ds_2 exerce donc sur l'élément ds' une force répulsive dont la valeur est

$$f(J_1, J') + f(J_2, J').$$

Mais cet ensemble peut être regardé comme un élément unique, de même longueur que chacun des deux précédents, placé comme chacun des deux précédents et parcouru par un courant d'intensité $(J_1 + J_2)$. L'action de cet élément sur l'élément ds' doit donc avoir pour valeur

$$f(J_1 + J_2, J').$$

On a, par conséquent, l'identité

$$f(J_1, J') + f(J_2, J') = f(J_1 + J_2, J'),$$

identité qui démontre que l'action de l'élément ds sur l'élément ds' est proportionnelle à J. On démontrerait de même qu'elle est proportionnelle à J' et, par conséquent, au produit JJ'.

L'hypothèse précédente prouve également que l'action exercée par l'élément ds sur l'élément ds' est proportionnelle au produit $ds\, ds'$.

Imaginons, en effet, qu'un premier élément ds_1, traversé par un courant d'intensité J, exerce sur l'élément ds', traversé par un courant d'intensité J', une répulsion que nous représenterons par $f(ds_1, ds')$.

Prolongeons l'élément ds_1 d'une longueur infiniment petite ds_2. Supposons l'élément ds_2 traversé, lui aussi, par un courant d'intensité J. Il exercera sur l'élément ds' une action répulsive dont la direction sera sensiblement la même que la précédente et dont la valeur sera sensiblement $f(ds_2, ds')$.

L'ensemble des deux éléments ds_1, ds_2 exerce donc sur l'élément ds' une force répulsive dont la valeur est

$$f(ds_1, ds') + f(ds_2, ds')$$

Mais, d'autre part, l'ensemble de ces deux éléments peut être considéré comme un élément unique, de longueur $(ds_1 + ds_2)$, de même intensité, de même position que chacun des éléments ds_1, ds_2. Son action répulsive sur l'élément ds' peut donc s'écrire

$$f(ds_1 + ds_2, ds').$$

On a, par conséquent, l'identité

$$f(ds_1, ds') + f(ds_2, ds') = f(ds_1 + ds_2, ds'),$$

identité qui démontre que l'action de l'élément ds sur l'élément ds' est proportionnelle à ds; on démontrerait de même que cette action est proportionnelle à ds', et, par conséquent, au produit $ds\, ds'$.

Les propositions que nous venons de démontrer conduisent à la conclusion suivante : *L'action que l'élément ds, parcouru par un courant uniforme d'intensité* J, *exerce sur un élément ds', parcouru par un courant uniforme d'intensité* J', *action comptée positivement lorsqu'elle est répulsive, a pour valeur*

$$F = JJ'\Phi\, ds\, ds', \tag{1}$$

Φ dépendant seulement de la situation relative des deux éléments ds, ds', et point de leur longueur.

QUATRIÈME HYPOTHÈSE (¹). — *Les deux éléments* $MM_1 = ds_1$, $MM_2 = ds_2$, *issus d'un même point* M, *ayant même longueur, parcourus par des courants de même intensité, exercent même action sur l'élément* $M'M'_1 = ds'$, *s'ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan* $MM'M'_1$.

Si l'on se reporte alors aux considérations exposées plus haut (Introduction, Chap. I, § I), on voit que cette hypothèse entraîne la conséquence suivante :

La fonction Φ est une fonction uniforme des quatre variables

$$r, \quad \cos\theta, \quad \cos\theta', \quad \cos\omega,$$

$$\Phi = \varphi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega). \tag{2}$$

PREMIÈRE LOI EXPÉRIMENTALE (PRINCIPE DES COURANTS SINUEUX). — *Lorsqu'un courant fermé et uniforme parcourt le contour d'une aire à deux côtés, dont toutes les dimensions sont infiniment petites, l'action*

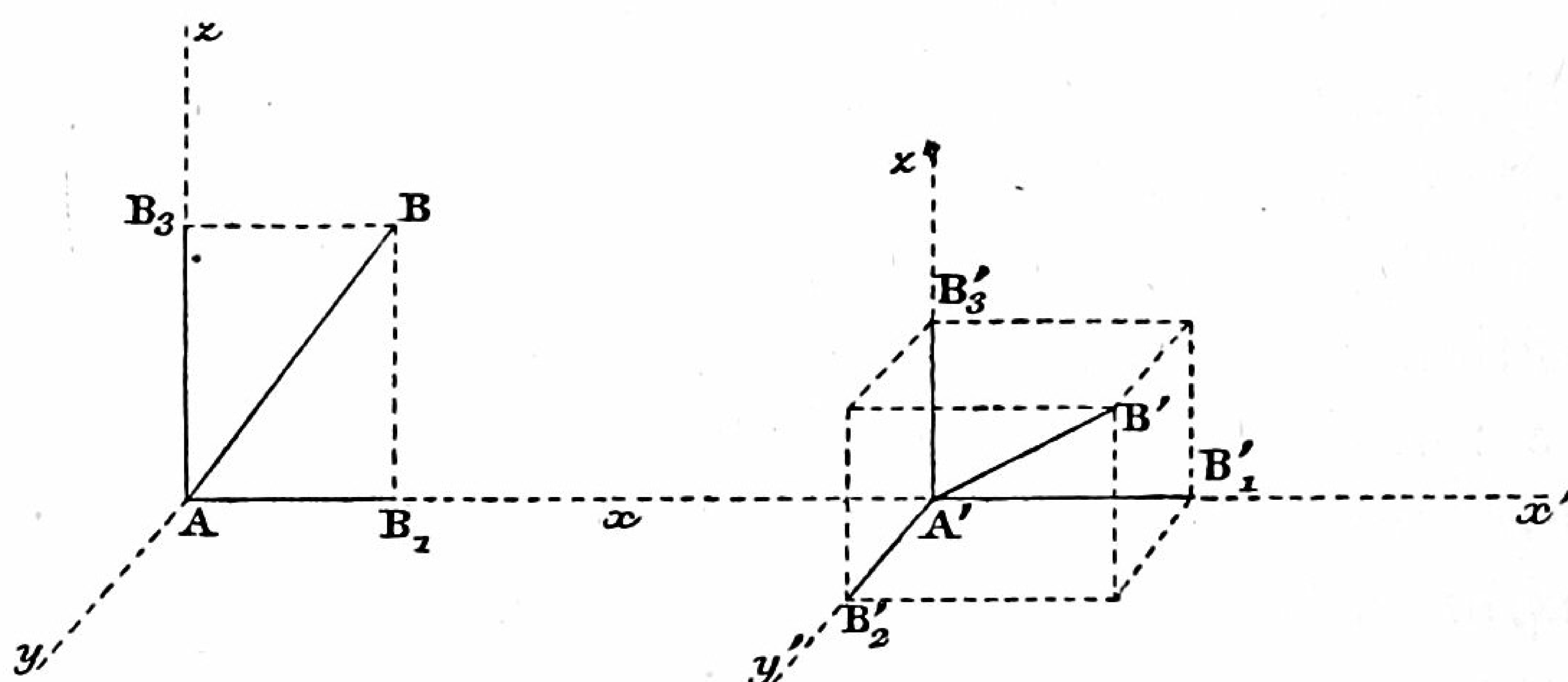
(¹) Cette hypothèse, ou du moins un cas particulier de cette hypothèse, suffisant pour la démonstration, est indiquée par Ampère (*Théorie mathématique...*, réimpression A. Hermann, p. 20) comme un *théorème;* mais la démonstration de ce théorème implique une autre hypothèse sur l'action mutuelle de deux courants rectangulaires. Le caractère hypothétique de cette proposition saute aux yeux si l'on observe qu'on obtiendrait une erreur en énonçant la même proposition après avoir remplacé l'élément de *courant* $M'M'_1$ par un *élément magnétique* $M'M'_1$.

de ce courant sur un élément de courant quelconque est infiniment petite comme le produit de la longueur de l'élément qui subit l'action par l'aire qu'embrasse le circuit agissant.

Il est inutile de rappeler ici l'expérience classique par laquelle Ampère a démontré cette proposition.

Cette proposition admise, considérons deux éléments $AB = ds$ et $A'B' = ds'$ (*fig.* 57).

Fig. 57.



Pour direction des axes Ax, Ax', prenons la droite AA'. Dans le demi-plan BAA', menons la normale à la droite AA' et prenons-la pour direction des axes Az, $A'z'$. Menons une normale au plan BAA', du côté de ce plan où se trouve l'élément A'B'. Prenons-la pour direction des axes Ay, $A'y'$.

Soient AB_1, AB_3 les projections de AB sur Ax et sur Az.

L'aire AB_1B étant infiniment petite par rapport à ds, l'action d'un courant uniforme d'intensité J, parcourant le circuit AB_1BA, sur l'élément ds', parcouru par un courant d'intensité J', est infiniment petite par rapport à $JJ'\,ds\,ds'$. L'action des deux éléments AB_1 et B_1B, réduite aux quantités de l'ordre de $JJ'\,ds\,ds'$, équivaut à l'action de l'élément AB sur l'élément ds'. L'élément B_1B peut, lui-même, être remplacé par l'élément AB_3.

On prouverait, par un raisonnement analogue, qu'au lieu de déterminer l'action d'un élément quelconque sur l'élément A'B', on peut déterminer les actions du même élément sur les éléments $A'B'_1$, $A'B'_2$, $A'B'_3$ et composer entre elles ces dernières actions.

Nous sommes donc ramené à évaluer l'action de chacun des deux éléments

$$AB_1 = ds\cos\theta,$$
$$AB_3 = ds\sin\theta,$$

sur chacun des trois éléments

$$A'B'_1 = ds'\cos\theta',$$
$$A'B'_2 = ds'\sin\theta'\sin\varepsilon,$$
$$A'B'_3 = ds'\sin\theta'\cos\varepsilon.$$

En raisonnant comme au Livre XIII, Chapitre II, nous prouverons que

l'on peut négliger

L'action de AB_1 sur $A'B'_2$,
L'action de AB_1 sur $A'B'_3$,
L'action de AB_3 sur $A'B'_1$,
L'action de AB_3 sur $A'B'_2$.

Si nous désignons alors l'action répulsive de AB_1 sur $A'B'_1$ par

$$JJ' f(r) \overline{AB_1} . \overline{A'B'_1},$$

et l'action rép ulsive de AB_3 sur $A'B'_3$ par

$$JJ' g(r) \overline{AB_3} . \overline{A'B'_3},$$

nous aurons

$$(3) \qquad F = JJ' \, ds \, ds' [f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon],$$

ou bien encore, en remarquant que l'on a [Introduction, Chap. I, égalité (8)]

$$\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = \cos\omega - \cos\theta \cos\theta',$$

et en posant

$$h(r) = f(r) - g(r),$$

$$(3\ bis) \qquad F = JJ' \, ds \, ds' [h(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \cos\omega].$$

DEUXIÈME LOI EXPÉRIMENTALE. — *L'action qu'un courant fermé et uniforme quelconque exerce sur un élément de courant est normale à cet élément.*

Soit ds un élément du circuit agissant. Soit ds' l'élément sur lequel s'exerce l'action.

L'élément ds exerce sur l'élément ds' une action dont la composante suivant ds' a pour valeur

$$F \cos\theta'.$$

Le circuit agissant tout entier exercera donc sur l'élément ds' une action dont la composante suivant l'élément ds' aura pour valeur

$$\sum F \cos\theta',$$

ou bien, d'après l'égalité (3),

$$JJ' \, ds' \int [f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon] \cos\theta' \, ds.$$

Pour que la proposition précédente soit exacte, il faut et il suffit que cette quantité soit égale à o.

Or on a [Introduction, Chap. I, égalités (5) et (9)]

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = -r \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'}.$$

Par conséquent, pour que la proposition précédente soit exacte, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int \left[f(r) \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + r\, g(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} \right] \frac{\partial r}{\partial s'}\, ds,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, soit égale à o.

Cette égalité peut encore s'écrire de la manière suivante

$$\int_s \left[f(r) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 dr + \frac{1}{2} r\, g(r)\, d\left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] = 0.$$

Si l'on observe que, lorsque l'on parcourt le circuit s, les deux quantités r et $\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2$ varient d'une manière continue, on arrive à la conclusion suivante :

Pour que l'égalité précédente ait lieu, il faut et il suffit que la quantité

$$f(r) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 dr + \frac{1}{2} r\, g(r)\, d\left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2$$

soit la différentielle totale d'une fonction uniforme et continue de r et de $\frac{\partial r}{\partial s'}$.

Cette condition est traduite par l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2} \left[f(r) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2} r\, g(r) \right]$$

ou

$$(4) \qquad 2 f(r) = \frac{d}{dr} [r\, g(r)].$$

En vertu de cette égalité (4), l'égalité (3) devient

$$(5) \quad \mathrm{F} = \mathrm{JJ'}\, ds\, ds' \left\{ g(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} [r\, g(r)] \cos\theta \cos\theta' \right\}.$$

Cinquième hypothèse. — *La fonction $g(r)$ est de la forme*

$$g(r) = \frac{\mathrm{A}}{r^n},$$

A étant une constante et n un nombre entier et positif.

L'égalité (5) prend alors la forme

$$(6) \qquad \mathrm{F} = \frac{\mathrm{AJJ'}\, ds\, ds'}{r^n} \left(\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon - \frac{n-1}{2} \cos\theta \cos\theta' \right).$$

Troisième loi expérimentale. — *Dans deux systèmes électrodynamiques semblables, les actions qui s'exercent sur deux éléments ho-*

mologues sont les mêmes, si les intensités des courants qui traversent les divers conducteurs sont les mêmes.

Soient deux systèmes électrodynamiques semblables S et S_1, le rapport de similitude du second au premier étant k.

Dans le premier S, l'élément ds' supporte, de la part de l'élément ds, une action répulsive donnée par la formule (6).

Dans le second, S_1, considérons les deux éléments ds_1, ds'_1, homologues de ds, ds'; l'élément ds'_1 subit, de la part de l'élément ds_1, une force répulsive F_1 donnée par la formule

$$(7)\qquad F_1 = \frac{AJJ'\,ds_1\,ds'_1}{r_1^n}\left(\sin\theta_1\sin\theta'_1\cos\varepsilon_1 - \frac{n-1}{2}\cos\theta_1\cos\theta'_1\right).$$

Mais on a

$$\theta_1=\theta,\qquad \theta'_1=\theta',\qquad \varepsilon_1=\varepsilon,$$
$$ds_1 = k\,ds,\qquad ds'_1 = k\,ds',\qquad r_1 = kr.$$

La formule (7), comparée à la formule (6), donne donc

$$F_1 = k^{2-n}F.$$

Les actions élémentaires subies par un élément ds'_1 du système S_1 forment donc un système semblable à celui des actions élémentaires qui agissent sur l'élément homologue ds' du système S, le rapport de similitude étant k^{2-n}.

Or ces deux systèmes doivent avoir des résultantes égales l'une à l'autre. Il faut donc que l'on ait

$$k^{2-n} = 1$$

ou

$$n = 2.$$

Cette relation, portée dans la formule (6), donne

$$(8)\qquad F = \frac{AJJ'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon - \frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

SIXIÈME HYPOTHÈSE. — *Deux éléments de courant parallèles, de même sens, perpendiculaires à la droite qui les joint, s'attirent.*

Dans ce cas, on a

$$\cos\theta = 0,\qquad \cos\theta' = 0,$$
$$\sin\theta = 1,\qquad \sin\theta' = 1,\qquad \cos\varepsilon = 1.$$

La formule (8) doit donner pour F une valeur négative. La constante A doit donc avoir une valeur négative.

Si nous posons

$$-A = \mathfrak{A}^2,$$

la formule (8) devient

$$(9)\qquad F = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{JJ'\,ds\,ds'}{r^2}(\cos\theta\cos\theta' - 2\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon).$$

C'est, comme nous l'avons vu [Livre XIV, Chap. X, égalité (7)], une des formes de la loi d'Ampère.

§ 2. — Loi d'Ampère; démonstration de M. J. Bertrand.

La démonstration d'Ampère repose sur l'emploi de trois lois expérimentales. M. J. Bertrand [1] a montré que la seconde loi expérimentale invoquée par Ampère impliquait la première, le *principe des courants sinueux,* en sorte que cette première loi expérimentale ne devait plus être conservée à titre de principe.

La démonstration donnée par M. J. Bertrand est la suivante :

Les quatre premières hypothèses d'Ampère entraînent les égalités (1) et (2), c'est-à-dire la proposition suivante :

L'action répulsive de l'élément ds sur l'élément ds' est donnée par la formule

$$(10)\qquad F = JJ'\,ds\,ds'\,\varphi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega).$$

Les égalités [Introduction, Chap. I, égalités (5) et (7)]

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\cos\omega = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right)$$

permettent de mettre cette égalité sous la forme

$$(11)\qquad F = JJ'\,ds\,ds'\,\psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right).$$

Invoquons maintenant la seconde des lois expérimentales prises, par Ampère, comme principes. Nous avons vu que cette loi s'exprimait par la condition suivante : La somme $\sum F\cos\theta'$, étendue à tous les éléments ds d'un courant fermé et uniforme, est égale à 0.

En vertu de l'égalité (9), cette condition peut encore s'énoncer ainsi :

---

[1] J. Bertrand, *Sur la démonstration de la formule qui représente l'action élémentaire de deux courants* (*Comptes rendus,* t. LXXV, p. 733; 1872). — *Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques* (*Journal de Physique,* 1re série, t. III, p. 297; 1874). — *Leçons sur la théorie mathématique de l'Électricité,* professées au Collège de France, p. 166. Paris, 1890.

L'intégrale

$$\int \psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) \frac{\partial r}{\partial s'} ds,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, est égale à o.

Les quantités r et $\frac{\partial r}{\partial s'}$ varient assurément d'une manière continue lorsque l'on parcourt une courbe s, tandis que les quantités $\frac{\partial r}{\partial s'}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$ peuvent varier d'une manière discontinue quelconque dans le cas où cette courbe présente des points anguleux. Pour que l'énoncé précédent ne soit pas une erreur, il faut et il suffit que l'on ait

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) \frac{\partial r}{\partial s'} ds \\ &\quad = \frac{\partial \Psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s'}\right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} ds + \frac{\partial \Psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s'}\right)}{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)} \frac{\partial^2 r}{\partial s'\, \partial s} ds, \end{aligned} \right.$$

$\Psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s'}\right)$ étant une fonction uniforme et continue des variables r, $\frac{\partial r}{\partial s'}$ et ne dépendant pas des variables $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$.

Le second membre de l'identité (12) est linéaire et homogène en $\frac{\partial r}{\partial s}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$. Il en doit être assurément de même du premier. Donc la fonction

$$\psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right)$$

est linéaire et homogène en $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$.

La loi de l'égalité de l'action et de la réaction, qui constitue la deuxième hypothèse d'Ampère, entraîne immédiatement cette conséquence : la fonction ψ ne doit pas changer lorsqu'on permute les lettres s et s'. La fonction ψ est donc aussi linéaire et homogène en $\frac{\partial r}{\partial s'}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$.

Ainsi on doit avoir

$$\psi = \mathrm{A} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'},$$

les deux quantités A et B étant indépendantes des variables

$$\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \frac{\partial r}{\partial s'}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$$

et, par conséquent, ne dépendant que de la quatrième variable dont peut

dépendre ψ, la variable r. On a donc

$$\psi = \mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$$

ou bien, d'après l'égalité (11),

$$\mathrm{F} = \mathrm{JJ'}\,ds\,ds'\left[\mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]. \tag{13}$$

Comme nous avons

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial s'} = \cos\theta', \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = -\frac{\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon}{r},$$

si nous posons

$$\mathrm{A}(r) = -f(r),$$
$$\mathrm{B}(r) = -\frac{1}{r}g(r),$$

l'égalité (12) reproduira l'égalité

$$\mathrm{F} = \mathrm{JJ'}\,ds\,ds'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon]. \tag{3}$$

Or il est aisé de voir que cette égalité (3) est exactement équivalente au principe des courants sinueux.

Nous avons déjà vu, en effet, que, le principe des courants sinueux, joint aux trois premières hypothèses d'Ampère, entraînait l'égalité (3). Prouvons maintenant que, de l'égalité (3), on peut déduire le principe des courants sinueux.

Faisons choix d'un système de coordonnées rectangulaires quelconques. Soient (x, y, z) un point de l'élément ds et (x', y', z') un point de l'élément ds'. Un circuit fermé s exercera sur l'élément ds' une force dont les trois composantes seront

$$\mathrm{X}\,ds' = \mathrm{JJ'}\,ds'\int[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon]\frac{x'-x}{r}\,ds,$$
$$\mathrm{Y}\,ds' = \mathrm{JJ'}\,ds'\int[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon]\frac{y'-y}{r}\,ds,$$
$$\mathrm{Z}\,ds' = \mathrm{JJ'}\,ds'\int[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon]\frac{z'-z}{r}\,ds,$$

égalités qui peuvent encore s'écrire

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{X}\,ds' &= \mathrm{JJ'}\,ds'\int\left[\mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]\frac{x'-x}{r}\,ds,\\
\mathrm{Y}\,ds' &= \mathrm{JJ'}\,ds'\int\left[\mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]\frac{y'-y}{r}\,ds,\\
\mathrm{Z}\,ds' &= \mathrm{JJ'}\,ds'\int\left[\mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]\frac{z'-z}{r}\,ds.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Soit (ξ, η, ζ) un point fixe pris sur le circuit s; soit ρ la distance de ce point au point (x', y', z').

Supposons que le circuit s soit le contour d'une aire convexe dont toutes les dimensions sont infiniment petites du premier ordre. On voit sans peine que nous pourrons, en altérant seulement X, Y, Z de quantités infiniment petites du second ordre, remplacer les égalités (14) par les suivantes :

$$X\,ds' = JJ'\,ds'\left[A(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial s'}\frac{x'-\xi}{\rho}\int\frac{\partial r}{\partial s}ds + B(\rho)\frac{x'-\xi}{\rho}\int\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}ds\right],$$

$$Y\,ds' = JJ'\,ds'\left[A(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial s'}\frac{y'-\eta}{\rho}\int\frac{\partial r}{\partial s}ds + B(\rho)\frac{y'-\eta}{\rho}\int\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}ds\right],$$

$$Z\,ds' = JJ'\,ds'\left[A(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial s'}\frac{z'-\zeta}{\rho}\int\frac{\partial r}{\partial s}ds + B(\rho)\frac{z'-\zeta}{\rho}\int\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}ds\right].$$

Les deux quantités r et $\frac{\partial r}{\partial s'}$ variant d'une manière continue le long de la courbe s, on a pour toute courbe fermée

$$\int\frac{\partial r}{\partial s}ds = 0, \qquad \int\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}ds = 0,$$

et les égalités précédentes deviennent

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Il suffit d'altérer les trois quantités X, Y, Z de quantités infiniment petites du même ordre que l'aire embrassée par le circuit fermé pour les rendre égales à 0. Ces quantités X, Y, Z sont donc des infiniment petits du même ordre que cette aire, ce qui est le principe des courants sinueux.

Ainsi les quatre premières hypothèses et la deuxième loi expérimentale invoquée par Ampère entraînent le principe des courants sinueux. Il en résulte que l'on peut se passer de ce dernier pour établir la loi d'Ampère.

En effet, dans la démonstration de la loi d'Ampère, le principe des courants sinueux sert seulement à établir l'égalité (3) et nous venons de voir que cette égalité (3) pouvait être établie sans invoquer le principe des courants sinueux.

§ 3. — Du sens véritable qu'il convient d'attribuer au principe des courants sinueux.

Aux démonstrations des propositions que nous venons d'établir, M. J. Bertrand [1] joint les considérations suivantes :

« On me permettra d'ajouter une remarque relative à la probabilité de

(1) J. Bertrand, *Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques* (*Journal de Physique*, 1re série, t. III, p. 300; 1874).

l'hypothèse fondamentale, si naturelle en elle-même, acceptée par Ampère : l'action de deux éléments est dirigée suivant la droite qui les joint.

» Supposons qu'Ampère, qui a découvert expérimentalement la première et la deuxième loi, ait vérifié et énoncé d'abord la deuxième loi, et que, par le raisonnement seul, ainsi que nous l'avons fait, il en ait déduit la première loi; il aurait pu dire : si l'action de deux éléments est, comme cela me paraît vraisemblable, dirigée suivant la droite qui les joint, il faut nécessairement qu'un conducteur sinueux exerce la même action qu'un conducteur rectiligne suivant la même direction. L'expérience, venant ensuite confirmer cette prévision, n'aurait-elle pas été regardée avec raison comme une très forte preuve en faveur de l'hypothèse qui y conduit? L'ordre dans lequel les vérités ont été découvertes et l'époque à laquelle a été signalée leur dépendance mutuelle changent-ils quelque chose à leur probabilité? »

En réalité, à regarder les choses de près, la classique expérience d'Ampère, sur l'action des courants sinueux, ne saurait avoir la portée que M. J. Bertrand lui attribue dans le passage que nous venons de citer.

Conservons la première hypothèse d'Ampère; laissons de côté la deuxième, et modifions la troisième de la manière suivante :

La grandeur et la direction de l'action exercée par l'élément ds sur l'élément ds' dépendent uniquement des intensités des courants qui traversent ces deux éléments, de leurs longueurs et de leur situation relative.

Nous allons voir que ces deux hypothèses, les moins contestables de tous les principes sur lesquels repose la théorie d'Ampère, entraînent la loi relative aux courants sinueux; en sorte que la vérification expérimentale de cette loi vérifie seulement les deux hypothèses dont il s'agit.

Considérons un élément ds', de position donnée par rapport aux axes OX, OY, OZ. Les composantes de l'action de l'élément ds sur l'élément ds' peuvent être mises, en vertu des deux hypothèses précédentes, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{X}\, ds &= \mathrm{JJ}'\, \Phi\, ds\, ds', \\ \mathrm{Y}\, ds &= \mathrm{JJ}'\, \Psi\, ds\, ds', \\ \mathrm{Z}\, ds &= \mathrm{JJ}'\, \mathrm{X}\, ds\, ds', \end{aligned}$$

les trois quantités Φ, Ψ, X étant, pour une direction donnée de l'élément ds', des fonctions des éléments qui fixent la situation relative des deux éléments ds, ds'.

De ces égalités, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Les trois fonctions Φ, Ψ, X *changent de signe, sans changer de valeur absolue, lorsqu'on renverse le sens de parcours de l'élément ds sans changer le sens de parcours de l'élément ds'.*

A ce théorème, joignons ces deux propositions évidentes :

1° *L'action d'un courant fermé et uniforme quelconque sur un élé-*

ment ds' quelconque est le produit de ds' par une quantité finie, en sorte qu'il en doit être de même des trois quantités

$$\int \Phi \, ds, \quad \int \Psi \, ds, \quad \int X \, ds,$$

où les intégrations s'étendent au courant fermé.

2° *Les intégrales*

$$\int \Phi \, ds, \quad \int \Psi \, ds, \quad \int X \, ds,$$

étendues à un contour fermé infiniment petit, varient d'une manière continue, lorsque ce contour se déforme et se déplace d'une manière continue.

Par un raisonnement semblable à celui qui a été exposé aux pages 98-99, nous arriverons à la conclusion suivante :

Les trois intégrales

$$\int \Phi \, ds, \quad \int \Psi \, ds, \quad \int X \, ds$$

sont infiniment petites du second ordre, lorsque l'intégrale

$$\int ds$$

est infiniment petite du premier ordre.

Cette proposition, on le voit aisément, n'est autre chose que le principe des courants sinueux.

§ 4. — Du potentiel électrodynamique.

Supposons que deux conducteurs fermés soient en présence.

L'action répulsive mutuelle d'un élément ds du premier conducteur et d'un élément ds' du second, est, en désignant par J, J' les intensités des courants qui les traversent,

$$F = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{JJ' \, ds \, ds'}{r^2} (\cos\theta \cos\theta' - 2 \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon). \tag{9}$$

Mais on a

$$\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = \cos\omega - \cos\theta \cos\theta'.$$

On peut donc écrire

$$F = \mathfrak{A}^2 \frac{JJ' \, ds \, ds'}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos\theta \cos\theta' - \cos\omega \right).$$

Si, dans une modification, la distance r augmente de δr, cette action mutuelle effectue un travail

$$F \, \delta r,$$

et les actions mutuelles des deux conducteurs effectuent un travail

$$(15)\qquad d\mathfrak{T} = \mathfrak{A}^2 JJ' \int\int \frac{1}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta' - \cos\omega\right)\delta r\, ds\, ds'.$$

Nous avons démontré d'une manière entièrement générale [Appendice au Livre XIII, égalité (27)] que cette égalité peut s'écrire

$$(16)\qquad d\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \delta \int\int \frac{1}{r}\cos\theta\cos\theta'\, ds\, ds',$$

ce qui peut encore s'écrire [Introduction, Chap. I, égalité (10)]

$$(16\ bis)\qquad d\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \delta \int\int \frac{1}{r}\cos\omega\, ds\, ds'.$$

D'après les égalités (16) et (16 *bis*), *les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes d'intensités invariables admettent un potentiel, que l'on peut représenter à volonté par l'une des deux expressions*

$$(17)\qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\, ds\, ds',$$

$$(17\ bis)\qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds'.$$

Ce théorème fondamental a été, pour la première fois, démontré par F.-E. Neumann [1].

Ce théorème, nous l'avons vu, renferme la solution de tous les problèmes que peut poser l'étude expérimentale des courants uniformes. On peut donc se demander s'il n'est pas possible de l'obtenir directement sans passer par l'intermédiaire de la loi d'Ampère. On peut, en effet, en donner la démonstration suivante, qui repose sur cinq hypothèses et sur une loi expérimentale.

Première hypothèse. — *Les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes dont les intensités sont maintenues constantes admettent un potentiel.*

Deuxième hypothèse. — *Ce potentiel est de la forme*

$$\Pi = \sum \Psi_{12},$$

la quantité Ψ_{12} *dépendant des intensités* J_1, J_2 *des courants qui traversent les éléments* ds_1, ds_2, *des longueurs de ces éléments, et des pa-*

---

(1) F.-E. Neumann, *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme*, lu à l'Académie de Berlin, le 9 août 1847.

ramètres qui fixent leur situation relative; le signe $\sum$ *est supposé s'étendre à toutes les combinaisons obtenues en prenant un élément du premier circuit et un élément du second.*

TROISIÈME HYPOTHÈSE. — *La quantité* Ψ_{12} *ne change pas si l'on remplace l'élément* ds_2 *par l'élément* ds'_2, *symétrique de* ds_2 *par rapport à un plan renfermant l'élément* ds_1 *et un point de l'élément* ds_2.

Des raisonnements, analogues à ceux que nous avons exposés au début du § 1, nous prouveront que Ψ_{12} est de la forme

$$\Psi_{12} = \Phi_{12} J_1 J_2 \, ds_1 \, ds_2,$$

Φ_{12} dépendant seulement de la position mutuelle des deux éléments ds_1, ds_2.

Des considérations semblables à celles du paragraphe précédent nous montreront que la quantité $\int \Phi_{12} \, ds_1$ est infiniment petite du second ordre, lorsque $\int ds_1$ est infiniment petit du premier ordre, et que la quantité $\int \Phi_{12} \, ds_2$ est infiniment petite du second ordre, lorsque $\int ds_2$ est infiniment petit du premier ordre.

En raisonnant alors comme nous l'avons fait aux pages 102 à 105, nous verrons que

$$\Psi_{12} = J_1 J_2 \, ds_1 \, ds_2 [F(r) \cos\theta_1 \cos\theta_2 + G(r) \cos\omega]. \tag{18}$$

QUATRIÈME HYPOTHÈSE. — *Les deux fonctions* $F(r)$ *et* $G(r)$ *sont de la forme*

$$F(r) = \frac{A}{r^n}, \qquad G(r) = \frac{B}{r^n},$$

n étant un nombre entier et positif, et A *et* B, *deux constantes.*

Ces égalités donnent à l'égalité (18) la forme

$$\Psi_{12} = \frac{J_1 J_2 \, ds_1 \, ds_2}{r^n} (A \cos\theta_1 \cos\theta_2 + B \cos\omega). \tag{19}$$

LOI EXPÉRIMENTALE : *La troisième loi expérimentale invoquée par Ampère.* — Considérons deux conducteurs fermés C_1, C_2, traversés par des courants uniformes d'intensités J_1, J_2. Donnons aux divers points (x, y, z), ... du conducteur C_2 un système de déplacements virtuels δx, δy, δz, ...

Les actions du conducteur C_1 sur le conducteur C_2 effectuent un travail virtuel

$$d\mathfrak{T} = - J_1 J_2 \, \delta \int\int \frac{A \cos\theta_1 \cos\theta_2 + B \cos\omega}{r^n} ds_1 \, ds_2. \tag{20}$$

Considérons ensuite deux conducteurs C'_1, C'_2, semblables aux conduc-

teurs C_1, C_2 et semblablement placés. Soit K le rapport de similitude du second système au premier. Donnons au point (x', y', z'), homologue, sur le conducteur C'_2, du point (x, y, z) du conducteur C_2, un déplacement virtuel

$$\delta x' = K\,\delta x, \qquad \delta y' = K\,\delta y, \qquad \delta z' = K\,\delta z.$$

Le travail virtuel, effectué par les actions du conducteur C'_1 sur le conducteur C'_2, aura pour valeur

$$(21) \qquad d\mathfrak{T}' = -J_1 J_2\, \delta \int\int \frac{A \cos\theta'_1 \cos\theta'_2 + B \cos\omega'}{r'^n}\, ds'_1\, ds'_2.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\begin{array}{lll} \cos\theta'_1 = \cos\theta_1, & \cos\theta'_2 = \cos\theta_2, & \cos\omega' = \cos\omega, \\ r' = K r, & ds'_1 = K\, ds_1, & ds'_2 = K\, ds_2, \\ \delta \cos\theta'_1 = \delta \cos\theta_1, & \delta \cos\theta'_2 = \delta \cos\theta_2, & \delta \cos\omega' = \delta \cos\omega, \\ \delta r' = K\,\delta r, & \delta\, ds'_1 = K\,\delta\, ds_1, & \delta\, ds'_2 = K\,\delta\, ds_2, \end{array}$$

en sorte que l'égalité (21), comparée à l'égalité (20), donne

$$d\mathfrak{T}' = K^{(2-n)}\, d\mathfrak{T}.$$

Mais, l'action subie par un élément des conducteurs C'_1, C'_2 étant supposée égale à l'action subie par l'élément homologue des conducteurs C_1, C_2, on doit évidemment avoir

$$d\mathfrak{T}' = K\, d\mathfrak{T}.$$

On a donc

$$n = 1,$$

et la formule (19) devient

$$\Psi_{12} = \frac{J_1 J_2\, ds_1\, ds_2}{r} (A \cos\theta_1 \cos\theta_2 + B \cos\omega).$$

Le potentiel électrodynamique mutuel de deux courants fermés et uniformes a, par conséquent, pour valeur

$$\Pi = JJ' \int\int \frac{A \cos\theta \cos\theta' + B \cos\omega}{r}\, ds\, ds'.$$

Si l'on observe que l'on a [Introduction, Chap. I, égalité (10)]

$$\int\int \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r}\, ds\, ds' = \int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds',$$

on voit que l'on pourra écrire à volonté

$$(22) \qquad \Pi = (A + B) JJ' \int\int \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r}\, ds\, ds',$$

ou

$$(22\ bis) \qquad \Pi = (A + B) JJ' \int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds'.$$

CINQUIÈME HYPOTHÈSE. — *La constante* (A + B) *est négative*.

Si l'on pose alors

$$A + B = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2},$$

les égalités (22) et (22 *bis*) redonnent les égalités (17) et (17 *bis*).

§ 5. — Sur la détermination de la fonction de la distance qui figure dans la formule d'Ampère.

La formule des actions électrodynamiques étant mise sous la forme

$$(5)\quad F = JJ'\,ds\,ds'\left\{ g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}[rg(r)]\cos\theta\cos\theta' \right\},$$

Ampère fait l'hypothèse que la fonction $g(r)$ est de la forme

$$g(r) = \frac{A}{r^n},$$

A étant une constante, et n, un nombre entier positif. Cette hypothèse semble fort arbitraire. On peut la remplacer par une loi expérimentale facile à vérifier, comme l'a montré M. J. Bertrand [1].

Les égalités, souvent invoquées,

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}, \qquad \sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

transforment la formule (5) en

$$(23)\quad F = -JJ'\,ds\,ds'\left\{ rg(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}[rg(r)]\frac{\partial r\,\partial r}{\partial s\,\partial s'} \right\}.$$

Considérons une fonction $\psi(r)$ définie par l'égalité

$$(24)\quad \frac{d\psi(r)}{dr} = [rg(r)]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous aurons alors

$$rg(r) = \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2,$$

$$\frac{d}{dr}[rg(r)] = 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dr^2},$$

et l'égalité (23) deviendra

$$F = -JJ'\,ds\,ds'\,\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right)$$

---

[1] J. BERTRAND, *Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques* (*Journal de Physique*, 1re série, t. III, p. 335; 1874).

ou bien

$$(25)\qquad F = -JJ'\,ds\,ds'\,\frac{d\psi}{dr}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial s'}.$$

Le travail, effectué par les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes dans un déplacement quelconque de ces courants, aura pour valeur

$$d\mathfrak{T} = -JJ'\int\int\frac{d\psi}{dr}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial s'}\,\delta r\,ds\,ds'.$$

En raisonnant sur cette intégrale double exactement comme à la page 191, nous avons raisonné sur l'intégrale

$$\int\int\frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dr}\,\frac{\partial^2 r^{\frac{1}{2}}}{\partial s\,\partial s'}\,\delta r\,ds\,ds',$$

qui en est une forme particulière obtenue en posant $\psi(r) = r^{\frac{1}{2}}$, nous arriverons à ce résultat:

Le travail élémentaire entre deux courants fermés et uniformes a pour valeur

$$d\mathfrak{T} = -\frac{1}{2}JJ'\,\delta\int\int\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\cos\theta\cos\theta'\,ds\,ds'$$

ou bien, en vertu de l'égalité (24),

$$d\mathfrak{T} = -\frac{1}{2}JJ'\,\delta\int\int r g(r)\cos\theta\cos\theta'\,ds\,ds'.$$

En d'autres termes, deux courants fermés, uniformes et constants exercent l'un sur l'autre des actions qui admettent pour potentiel la quantité

$$(26)\qquad \Pi = \frac{1}{2}JJ'\int\int r g(r)\cos\theta\cos\theta'\,ds\,ds'.$$

Nous sommes ainsi amenés à la question générale suivante :

Sachant que les actions mutuelles de deux courants fermés, uniformes et constants, admettent un potentiel de la forme

$$(27)\qquad \Pi = JJ'\int\int[F(r)\cos\theta\cos\theta' + G(r)\cos\omega]\,ds\,ds',$$

déterminer la forme des fonctions $F(r)$ *et* $G(r)$.

La loi expérimentale que M. J. Bertrand propose de prendre comme principe propre à résoudre cette question est la suivante :

L'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant quelconque est égale à 0.

Cette proposition peut, comme on le voit aisément, être remplacée par la suivante :

Le potentiel électrodynamique mutuel d'un solénoïde fermé et d'un courant fermé, infiniment petit, n'entourant pas l'axe du solénoïde, est égal à o.

Adoptons cette proposition et voyons quelles conditions elle impose aux fonctions $F(r)$ et $G(r)$.

Considérons deux fonctions, $\varphi(r)$ et $\psi(r)$, définies par les égalités

$$\frac{1}{r}\varphi(r) - \frac{d\varphi(r)}{dr} + F(r) = 0, \tag{28}$$

$$G(r) - \frac{1}{r}\varphi(r) = \psi(r). \tag{29}$$

L'égalité (27) pourra s'écrire

$$\Pi = JJ'\int\int\left\{\psi(r)\cos\omega + \frac{\varphi(r)}{r}\cos\omega + \left[\frac{d\varphi(r)}{dr} - \frac{\varphi(r)}{r}\right]\cos\theta\cos\theta'\right\} ds\, ds'.$$

Mais on a

$$\cos\omega - \cos\theta\cos\theta' = \sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

en sorte que l'égalité précédente peut s'écrire

$$\Pi = JJ'\int\int\left[\psi(r)\cos\omega - \varphi(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] ds\, ds'.$$

Si nous posons

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\varphi(r),$$

cette égalité deviendra

$$\Pi = JJ'\int\int\left[\psi(r)\cos\omega + \frac{\partial^2\Phi(r)}{\partial s\,\partial s'}\right] ds\, ds',$$

ou simplement

$$\Pi = JJ'\int\int\psi(r)\cos\omega\, ds\, ds'. \tag{30}$$

Supposons que s et s' soient deux courants fermés infiniment petits; que Ω, Ω' soient les aires de deux surfaces menées par ces courants; que N, N' soient les normales aux faces positives de ces aires.

Nous aurons [Introduction, Chap. II, égalité (5)]

$$(31)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\int \psi(r)\cos\omega\, ds\, ds' = -\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos(N, N')\Omega\Omega' \\ \qquad\qquad -\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - \frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos(N, r)\cos(N', r)\Omega\Omega'. \end{cases}$$

Supposons que l'aire Ω soit celle d'un courant infiniment petit appartenant à un solénoïde; soit D la distance de deux anneaux du solénoïde; soit $\Phi = \frac{\Omega J}{D}$ la puissance du solénoïde; soit l la directrice du solénoïde. Le potentiel électrodynamique de ce solénoïde sur le petit courant fermé s' aura pour valeur, d'après les égalités (30) et (31),

$$(32)\quad \begin{cases} \displaystyle \Pi = -\Phi J'\Omega' \int \left[\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos(l, N')\right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - \frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos(l, r)\cos(N', r)\right] dl. \end{cases}$$

On a, d'ailleurs,

$$\cos(l, r) = -\frac{\partial r}{\partial l}, \qquad \cos(N', r) = \frac{\partial r}{\partial N'},$$

$$\cos(l, N') = -\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial N'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial l\, \partial N'}.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(33)\qquad \Pi = \Phi J'\Omega' \int \left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial N'} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial N'}\right] dl.$$

En vertu de la loi expérimentale admise, il est nécessaire et suffisant que la courbe l soit fermée pour que cette quantité soit égale à 0; en d'autres termes, la quantité sous le signe $\int$ doit être de la forme

$$\frac{\partial}{\partial l}\Psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial N'}\right) dl,$$

Ψ étant une fonction uniforme et continue de r et de $\frac{\partial r}{\partial N'}$.

Cette condition équivaut à celle-ci

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \frac{\partial r}{\partial N'}}\left(\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial r}{\partial N'}\right).$$

Posons

$$(34)\qquad \Theta = r\frac{d\psi}{dr},$$

et cette égalité deviendra la nouvelle égalité

$$r^2 \frac{d^2\Theta}{dr^2} = \frac{2\Theta}{r^2}.$$

En ajoutant aux deux membres la quantité $2r\frac{d\Theta}{dr}$, on peut écrire cette dernière égalité

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Theta}{dr}\right) = 2\frac{d}{dr}(r\Theta).$$

Sous cette forme, elle s'intègre une première fois, et donne l'égalité

$$r^2\frac{d\Theta}{dr} - 2r\Theta + C = 0,$$

C étant une constante.

Cette égalité, à son tour, peut s'écrire

$$\frac{1}{r^2}\frac{d\Theta}{dr} - \frac{2}{r^3}\Theta + \frac{C}{r^4} = 0$$

ou

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\Theta}{r^2}\right) + \frac{C}{r^4} = 0.$$

On déduit de là

$$\Theta = \frac{C}{4r} + C'r^2,$$

C' étant une nouvelle constante.

Si, dans l'égalité (34), on reporte cette valeur de Θ, on trouve

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{C}{4r^2} + C'r.$$

Cette égalité nous montre que ψ doit être de la forme

$$\psi = \frac{A}{r} + Br^2 + C, \tag{35}$$

A, B, C étant trois constantes.

Ainsi, si le potentiel électrodynamique de deux courants fermés doit être de la forme (27), la loi expérimentale que nous venons d'invoquer exigera, en vertu des égalités (28), (29) et (35), que l'on ait

$$G(r) = \frac{A}{r} + Br^2 + C + \frac{1}{r}\varphi(r), \tag{36}$$

$$F(r) = \frac{1}{r}\varphi(r) + \frac{d\varphi(r)}{dr}, \tag{37}$$

$\varphi(r)$ étant une fonction arbitraire de r.

En d'autres termes, la forme la plus générale du potentiel électrodynamique de deux courants fermés et uniformes, qui soit compatible avec la

loi expérimentale que nous avons invoquée, est la suivante :

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi = JJ'\Big\{ & \int\int\left(\frac{A}{r} + Br^2 + C\right)\cos\omega\, ds\, ds' \\ & + \int\int\left[\frac{\varphi(r)}{r}(\cos\omega - \cos\theta\cos\theta') + \frac{d\varphi(r)}{dr}\cos\theta\cos\theta'\right] ds\, ds'\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Revenons à la question qui a servi de point de départ à ces considérations.

Nous supposons que l'on ait démontré que la forme du potentiel électrodynamique mutuel de deux courants fermés et uniformes est

$$(26)\qquad \Pi = \frac{1}{2}JJ'\int\int r\,g(r)\cos\theta\cos\theta'\, ds\, ds'.$$

Quelle forme faut-il attribuer à la fonction $g(r)$ pour que l'action d'un solénoïde fermé quelconque sur un élément de courant quelconque soit égale à o?

La formule (26) se déduit de la formule (27) en faisant

$$G(r) = 0,$$

$$F(r) = \frac{1}{2} r\,g(r).$$

Dès lors, les égalités (36) et (37) deviennent

$$\varphi(r) = -(A + Cr + Br^3),$$

$$\frac{1}{2} r\,g(r) = \frac{A}{r} - 2Br^2.$$

Si donc à la cinquième hypothèse et à la troisième loi expérimentale invoquées par Ampère, on substitue cette loi expérimentale qu'un solénoïde fermé est sans action sur un élément de courant quelconque, on arrive à cette conclusion; *la fonction $g(r)$ est de la forme*

$$\frac{1}{2} g(r) = \frac{A}{r^2} - 2Br.$$

Si l'on invoque alors l'HYPOTHÈSE suivante :

L'action mutuelle de deux éléments de courants quelconques tend vers o lorsque leur distance croît au delà de toute limite,

on sera contraint de prendre pour $g(r)$ la forme

$$g(r) = \frac{2A}{r^2},$$

et l'on retrouvera la loi d'Ampère.

La formule (38) nous permet de faire subir à la démonstration des lois de l'Électrodynamique exposée au paragraphe précédent une modification

analogue à celle que M. J. Bertrand a fait subir à la démonstration d'Ampère.

N'invoquons plus, comme au paragraphe précédent, l'hypothèse que les deux fonctions $F(r)$ et $G(r)$ sont de la forme $\frac{A}{r^n}$, $\frac{B}{r^n}$; n'invoquons pas, non plus, la loi expérimentale des actions qui s'exercent entre conducteurs semblables. Au lieu de cette loi, invoquons celle-ci : *L'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant quelconque est égale à* o.

Il en résultera, pour le potentiel électrodynamique de deux courants fermés et uniformes quelconques, la forme (38).

Or on a

$$\frac{\varphi(r)}{r}(\cos\omega - \cos\theta\cos\theta') + \frac{d\varphi(r)}{dr}\cos\theta\cos\theta'$$
$$= -\left[\varphi(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + \frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] = -\frac{\partial}{\partial s'}\left[\varphi(r)\frac{\partial r}{\partial s}\right],$$

en sorte que la quantité

$$\int\int\left[\frac{\varphi(r)}{r}(\cos\omega - \cos\theta\cos\theta') + \frac{d\varphi(r)}{dr}\cos\theta\cos\theta'\right]ds\,ds'$$

est égale à o, quelle que soit la fonction $\varphi(r)$.

Le choix de la fonction $\varphi(r)$ qui figure dans l'égalité (38) étant indifférent, on peut prendre

$$\varphi(r) = -(A + Br^3 + C),$$

et l'égalité (38) donne alors

$$\Pi = JJ'\int\int\left(\frac{A}{r} - 2Br^2\right)\cos\theta\cos\theta'\,ds\,ds'. \tag{39}$$

Cette formule, comparée à la formule (26), nous démontre que *les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes sont les mêmes que si deux éléments de courants uniformes quelconques se repoussaient avec une force dirigée suivant la droite qui les joint, et représentée par l'égalité*

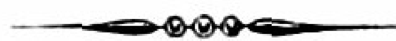
$$F = JJ'\,ds\,ds'\left\{g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}[r\,g(r)]\cos\theta\cos\theta'\right\}, \tag{5}$$

où la fonction $g(r)$ *est de la forme*

$$g(r) = \frac{2A}{r^2} - 4Br.$$

Si, comme M. J. Bertrand, on fait l'hypothèse que cette force doit tendre vers o lorsque les deux éléments s'éloignent au delà de toute limite, cette force devient identique à la force élémentaire admise par Ampère.

On voit donc que l'on peut laisser de côté l'hypothèse que les actions de deux courants fermés et uniformes se décomposent en actions élémentaires soumises à la règle de l'égalité de l'action et de la réaction; ne point invoquer non plus la loi, difficile à vérifier, qu'un courant fermé et uniforme exerce sur tout élément de courant une action normale à cet élément, et remplacer ces hypothèses d'Ampère par l'hypothèse bien moins contestable que les actions mutuelles de deux courants fermés, uniformes et constants admettent un potentiel. Pour déterminer la forme de ce potentiel, on pourra suivre les méthodes indiquées soit par Ampère, soit par M. J. Bertrand, pour déterminer la forme de l'action élémentaire.



LIVRE XV.

ACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES EXERCÉES PAR LES COURANTS UNIFORMES.

CHAPITRE PREMIER.

LOI ÉLÉMENTAIRE DE L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

Entre les aimants et les courants s'exercent certaines forces qui ont été découvertes par Œrstedt, et étudiées par Biot et Savart, Laplace, Ampère et Savary. Le fer doux, placé en présence de courants, s'aimante. Lorsqu'on déplace un aimant, ou bien lorsqu'on modifie son aimantation en présence d'un conducteur, ce conducteur est traversé par un courant d'induction. Les trois classes de phénomènes réunis sous ces titres : *Forces électromagnétiques, Aimantation par les courants, Induction électromagnétique,* constituent la partie de la Physique qui a reçu le nom d'*Électromagnétisme*.

Nous allons étudier cette partie de la Physique en suivant une voie semblable à celle que nous avons suivie dans l'étude de l'Électrodynamique. A cet effet, nous commencerons par établir les lois de l'*induction électromagnétique*.

Énonçons d'abord les hypothèses fondamentales sur lesquelles nous ferons reposer cette étude.

En premier lieu, un système formé d'un aimant et d'un courant sera supposé défini, au point de vue de l'Électromagnétisme, lorsqu'on connaîtra :

1° La forme du volume occupé par l'aimant;

2° La grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point de cet espace;

3° La forme du conducteur parcouru par le courant;

4° L'intensité du courant en chaque point de la courbe qu'il dessine;

5° La situation relative du conducteur et de l'aimant.

La nature, les propriétés, la position de chacun des éléments *matériels* qui forment soit le conducteur, soit l'aimant, n'interviennent point dans cette définition. Une modification qui altère ces dernières variables sans altérer les premières est, au point de vue de l'Électromagnétisme, équivalente à l'absence de toute modification.

En second lieu, imaginons un système renfermant des aimants et des conducteurs linéaires. Soit $AB = ds$ un élément de l'un de ces conducteurs. Soit $e\,ds$ la force électromotrice hydro-électrique et thermo-électrique qui agit dans cet élément; soit V le niveau potentiel au point A; soit V′ le niveau potentiel au point B; soit $\mathcal{E}\,ds$ la force électromotrice d'induction électrodynamique qui agit dans l'élément ds; soit $R\,ds$ la résistance de l'élément ds; soit J l'intensité du courant en A à l'instant t.

S'il n'existait pas d'induction électromagnétique, on aurait

$$RJ\,ds = \varepsilon(V - V') + \Theta - \Theta' + e\,ds + \mathcal{E}\,ds.$$

En réalité, si le système renferme des aimants dont on fait varier l'aimantation ou la situation par rapport à l'élément AB, cette égalité n'est plus exacte et doit être remplacée par la suivante

$$RJ\,ds = \varepsilon(V - V') + \Theta - \Theta' + e\,ds + \mathcal{E}\,ds + \mathfrak{E}\,ds.$$

La quantité $\mathfrak{E}\,ds$ est ce qu'on nomme la *force électromotrice d'induction électromagnétique* dans l'élément ds. Il s'agit de déterminer l'expression de cette force électromotrice.

Supposons les divers aimants qui composent le système décomposés en éléments dont les volumes sont respectivement dv, dv', dv'', ...

Nous dirons que l'*état relatif* de l'élément magnétique dv et de l'élément de courant ds est déterminé quand on connaît les paramètres suivants :

1° La longueur ds de l'élément de courant;

2° Le volume dv de l'élément magnétique;

3° Les paramètres α, β, ... qui déterminent la forme de la surface qui limite l'élément dv et l'orientation de cette surface par rapport à l'élément ds;

4° L'intensité J du courant qui traverse l'élément ds;

5° L'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$ en un point de l'élément dv;

6° La distance r d'un point A de l'élément ds à un point A′ de l'élément dv;

7° L'angle (r, ds) que la demi-droite ds fait avec la demi-droite AA′;

8° L'angle (r, dl) que la direction de l'aimantation de l'élément dv fait avec la même demi-droite AA′;

9° L'angle e, relatif au demi-plan formé par les directions r, ds et au demi-plan formé par les directions r, dl, cet angle étant défini comme au Chapitre I de l'Introduction.

Nous rappellerons que les paramètres r, (r, ds), (r, dl), e définissent, *sans aucune ambiguïté,* la situation relative des deux éléments ds, dl.

Cela posé, soit dt un élément de temps; *nous admettrons que l'on a*

$$\mathfrak{E}\, ds\, dt = \delta\nu + \delta\nu' + \delta\nu'' + \ldots,$$

la quantité $\delta\nu^{(k)}$ dépendant uniquement des paramètres qui fixent, à l'instant t, l'état relatif de l'élément de courant ds et de l'élément $dv^{(k)}$, et des variations que ces paramètres subissent pendant le temps dt.

Nous donnerons à la quantité

$$\frac{\delta\nu^{(k)}}{dt} = e(ds, dv^{(k)})$$

le nom de *force électromotrice élémentaire d'induction électromagnétique engendrée par l'élément magnétique $dv^{(k)}$ dans l'élément de courant ds.*

L'hypothèse fondamentale que nous venons de faire va nous servir à déterminer la forme de la quantité

$$e(ds, dv^{(k)}),$$

ou, ce qui revient au même, de la quantité $\delta\nu^{(k)}$.

1° Il résulte, en premier lieu, de l'hypothèse faite, que l'on a

$$\begin{aligned}\delta\nu = f[&ds, dv, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{J}, \mathfrak{M}, r, (r, ds), (r, dl), e,\\ &\delta\, ds, \delta\, dv, \delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\mathrm{J}, \delta\mathfrak{M}, \delta r,\\ &\delta(r, ds), \delta(r, dl), \delta e].\end{aligned}$$

Nous allons prouver que cette quantité est une fonction linéaire et homogène de

$$\begin{gathered}\delta\, ds,\quad \delta\, dv,\quad \delta\alpha,\quad \delta\beta,\quad \ldots,\quad \delta\mathrm{J},\quad \delta\mathfrak{M},\quad \delta r,\\ \delta(r, ds),\quad \delta(r, dl),\quad \delta e.\end{gathered}$$

Envisageons un premier élément de temps dt_1. Pendant cet élément de temps,

$$\begin{gathered}ds,\quad dv,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad \mathrm{J},\quad \mathfrak{M},\quad r,\\ (r, ds),\quad (r, dl),\quad e\end{gathered}$$

varient de

$$\begin{gathered}\delta_1 ds,\quad \delta_1 dv,\quad \delta_1 \alpha,\quad \delta_1 \beta,\quad \ldots,\quad \delta_1 \mathrm{J},\quad \delta_1 \mathfrak{M},\quad \delta_1 r,\\ \delta_1(r, ds),\quad \delta_1(r, dl),\quad \delta_1 e,\end{gathered}$$

et l'on a, pour cet élément de temps,

$$\begin{aligned}\delta\nu_1 = f[&ds, dv, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{J}, \mathfrak{M}, r,\\ &(r, ds), (r, dl), e,\\ &\delta_1 ds, \delta_1 dv, \delta_1\alpha, \delta_1\beta, \ldots, \delta_1\mathrm{J}, \delta_1\mathfrak{M}, \delta_1 r,\\ &\delta_1(r, ds), \delta_1(r, dl), \delta_1 e].\end{aligned}$$

Dans ce même temps dt_1, l'induction de l'élément dv dans l'élément ds met en mouvement une quantité d'électricité

$$\delta_1 \mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{R}_1}\delta\nu_1,$$

R_1 étant la résistance de l'élément ds au début du temps dt_1.

A la suite du temps dt_1, prenons un nouvel élément de temps dt_2. Pendant cet élément de temps,

$$\begin{gathered}ds,\quad dv,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad \mathrm{J},\quad \mathfrak{M},\quad r,\\ (r, ds),\quad (r, dl),\quad e\end{gathered}$$

subissent de nouvelles variations

$$\begin{gathered}\delta_2 ds,\quad \delta_2 dv,\quad \delta_2 \alpha,\quad \delta_2 \beta,\quad \ldots,\quad \delta_2 \mathrm{J},\quad \delta_2 \mathfrak{M},\quad \delta_2 r,\\ \delta_2(r, ds),\quad \delta_2(r, dl),\quad \delta_2 e,\end{gathered}$$

et l'on a, pour ce nouvel élément de temps,

$$\begin{aligned}\delta\nu_2 = f[&ds + \delta_1 ds, dv + \delta_1 dv, \alpha + \delta_1\alpha, \beta + \delta_1\beta, \ldots, J + \delta_1 J, \mathfrak{M} + \delta_1\mathfrak{M},\\ &r + \delta_1 r, (r, ds) + \delta_1(r, ds), (r, dl) + \delta_1(r, dl), e + \delta_1 e,\\ &\delta_2 ds, \delta_2 dv, \delta_2\alpha, \delta_2\beta, \ldots, \delta_2 J, \delta_2\mathfrak{M}, \delta_2 r, \delta_2(r, ds), \delta_2(r, dl), \delta_2 e].\end{aligned}$$

Si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, cette égalité est réduite à

$$\begin{aligned}\delta\nu_2 = f[&ds, dv, \alpha, \beta, \ldots, J, \mathfrak{M}, r,\\ &(r, ds), (r, dl), e,\\ &\delta_2 ds, \delta_2 dv, \delta_2\alpha, \delta_2\beta, \ldots, \delta_2 J, \delta_2\mathfrak{M}, \delta_2 r,\\ &\delta_2(r, ds), \delta_2(r, dl), \delta_2 e].\end{aligned}$$

Dans ce même temps dt_2, l'induction de l'élément dv dans l'élément ds met en mouvement une quantité d'électricité

$$\delta_2 Q = \frac{1}{R_2}\delta\nu_2,$$

R_2 étant la résistance de l'élément ds au début du temps dt_2. Comme R_2 diffère infiniment peu de R_1, on peut écrire

$$\delta_2 Q = \frac{1}{R_1}\delta\nu_2.$$

Considérons maintenant l'élément de temps dt_3, formé par l'ensemble des deux éléments dt_1 et dt_2,

$$dt_3 = dt_1 + dt_2.$$

Pendant ce temps dt_3, les paramètres

$$\begin{gathered}ds,\quad dv,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad J,\quad \mathfrak{M},\quad r,\\ (r, ds),\quad (r, dl),\quad e\end{gathered}$$

subissent des variations

$$\begin{gathered}(\delta_1 ds + \delta_2 ds),\quad (\delta_1 dv + \delta_2 dv),\quad (\delta_1\alpha + \delta_2\alpha),\quad (\delta_1\beta + \delta_2\beta),\quad \ldots,\\ (\delta_1 J + \delta_2 J),\quad (\delta_1\mathfrak{M} + \delta_2\mathfrak{M}),\quad (\delta_1 r + \delta_2 r),\quad [\delta_1(r, ds) + \delta_2(r, ds)],\\ [\delta_1(r, dl) + \delta_2(r, dl)],\quad (\delta_1 e + \delta_2 e).\end{gathered}$$

Pour ce même temps dt_3, on a

$$\begin{aligned}\delta\nu_3 = f\{ & (ds, dv, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{J}, \mathfrak{M}, r, \\ & (r, ds), (r, dl), e, \\ & (\delta_1 ds + \delta_2 ds), (\delta_1 dv + \delta_2 dv), (\delta_1\alpha + \delta_2\alpha), \\ & (\delta_1\beta + \delta_2\beta), \ldots, (\delta_1\mathrm{J} + \delta_2\mathrm{J}), (\delta_1\mathfrak{M} + \delta_2\mathfrak{M}), \\ & (\delta_1 r + \delta_2 r), \quad [\delta_1(r, ds) + \delta_2(r, ds)], \quad [\delta_1(r, dl) + \delta_2(r, dl)] \\ & \qquad\qquad (\delta_1 e + \delta_2 e)\}.\end{aligned}$$

La quantité d'électricité que l'induction de l'élément dv met en mouvement dans l'élément ds, pendant ce temps dt_3, a pour valeur

$$\delta_3 \mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{R}_1}\,\delta\nu_3.$$

Mais l'élément dv met en mouvement, par induction, dans l'élément ds pendant le temps dt_3, une quantité d'électricité qui est la somme de la quantité d'électricité mise en mouvement pendant le temps dt_1, et de la quantité d'électricité mise en mouvement pendant le temps dt_2. On a donc

$$\delta_3 \mathrm{Q} = \delta_1 \mathrm{Q} + \delta_2 \mathrm{Q}$$

ou bien

$$\delta\nu_3 = \delta\nu_1 + \delta\nu_2.$$

Si l'on se reporte aux expressions de $\delta\nu_1$, $\delta\nu_2$, $\delta\nu_3$, on trouve ainsi l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}& f\{ds, dv, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{J}, \mathfrak{M}, r, (r, ds), (r, dl), e, \\ & \quad (\delta_1 ds + \delta_2 ds), (\delta_1 dv + \delta_2 dv), (\delta_1\alpha + \delta_2\alpha), \\ & \quad (\delta_1\beta + \delta_2\beta), \ldots, (\delta_1\mathrm{J} + \delta_2\mathrm{J}), (\delta_1\mathfrak{M} + \delta_2\mathfrak{M}), \\ & \quad (\delta_1 r + \delta_2 r), [\delta_1(r, ds) + \delta_2(r, ds)], [\delta_1(r, dl) + \delta_2(r, dl)], (\delta_1 e + \delta_2 e)\} \\ = \; & f[ds, dv, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{J}, \mathfrak{M}, r, (r, ds), (r, dl), e, \\ & \quad \delta_1 ds, \delta_1 dv, \delta_1\alpha, \delta_1\beta, \ldots, \delta_1\mathrm{J}, \delta_1\mathfrak{M}, \delta_1 r, \\ & \qquad \delta_1(r, ds), \delta_1(r, dl), \delta_1 e] \\ & + f[ds, dv, \alpha, \beta, \ldots, \mathrm{J}, \mathfrak{M}, r, (r, ds), (r, dl), e, \\ & \quad \delta_2 ds, \delta_2 dv, \delta_2\alpha, \delta_2\beta, \ldots, \delta_2\mathrm{J}, \delta_2\mathfrak{M}, \delta_2 r, \\ & \qquad \delta_2(r, ds), \delta_2(r, dl), \delta_2 e].\end{aligned}$$

Cette égalité démontre la proposition énoncée, et, par conséquent, permet d'écrire

$$\begin{aligned}\delta\nu = {} & \Sigma\,\delta\, ds + \Upsilon\,\delta\, dv + \mathrm{A}\,\delta\alpha + \mathrm{B}\,\delta\beta + \ldots + \mathrm{H}\,\delta\mathrm{J} \\ & + \mathrm{M}\,\delta\mathfrak{M} + \mathrm{P}\,\delta r + \Theta\,\delta(r, ds) + \Theta'\,\delta(r, dl) + \Omega\,\delta e,\end{aligned}$$

Σ, Υ, A, B, ..., H, M, P, Θ, Θ', Ω étant des fonctions uniformes des paramètres

$$ds, \quad dv, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad J, \quad \mathfrak{M}, \quad r, \quad \cos(r, ds), \quad \cos(r, dl), \quad e.$$

Nous allons prouver maintenant que les quantités

$$\Sigma, \quad \Upsilon, \quad H, \quad M, \quad P, \quad \Theta, \quad \Theta', \quad \Omega$$

sont indépendantes de α, β, ...; que les quantités

$$\Sigma, \quad H, \quad M, \quad P, \quad \Theta, \quad \Theta', \quad \Omega$$

sont proportionnelles à dv; enfin, que la quantité

$$\Upsilon$$

ne dépend pas de dv.

Pour cela, nous allons envisager une modification de l'élément dv, dans laquelle la surface qui limite cet élément demeure semblable à elle-même et conserve une orientation invariable par rapport aux droites r et ds. Dans cette modification, les paramètres α, β, ... demeureront invariables, et l'on aura

$$\begin{aligned}\delta\nu = \Sigma\,\delta\,ds + \Upsilon\,\delta\,dv + H\,\delta J + M\,\delta\mathfrak{M} + P\,\delta r \\ + \Theta\,\delta(r, ds) + \Theta'\,\delta(r, dl) + \Omega\,\delta e.\end{aligned}$$

Divisons l'élément dv en n autres éléments, tous égaux entre eux et égaux à un même élément, dont le volume, la forme et l'orientation par rapport aux lignes r et ds aient été choisis une fois pour toutes. Soit du le volume commun de tous ces éléments. Supposons que, dans la modification, ils se dilatent en gardant leur forme, leur disposition et restant tous égaux entre eux. Soit $\delta\,du$ l'augmentation de volume de chacun d'eux.

Pour l'un d'entre eux, du, la quantité analogue à $\delta\nu$ a pour valeur

$$\begin{aligned}\delta\lambda = \sigma\,\delta\,ds + \upsilon\,\delta\,du + \eta\,\delta J + \mu\,\delta\mathfrak{M} + \rho\,\delta r \\ + \theta\,\delta(r, ds) + \theta'\,\delta(r, dl) + \omega\,\delta e.\end{aligned}$$

La quantité $\delta\nu$ doit évidemment être la somme des quantités analogues à $\delta\lambda$ relative aux divers éléments du en lesquels l'élément dv a été divisé. Or, pour tous ces éléments du, les paramètres ont sensiblement la même valeur initiale et subissent sensiblement la même variation. La somme des quantités $\delta\lambda$ se réduit donc à

n fois l'une d'entre elles, et l'on a

$$\delta\nu = n\sigma\,\delta\,ds + n\upsilon\,\delta\,du + n\eta\,\delta\mathrm{J} + n\mu\,\delta\mathfrak{M} + n\rho\,\delta r + n\theta\,\delta(r, ds) + n\theta'\,\delta(r, dl) + n\omega\,\delta e.$$

Si l'on remarque que

$$\delta\,dv = n\,\delta\,du,$$

cette égalité deviendra

$$\delta\nu = n\sigma\,\delta\,ds + \upsilon\,\delta\,dv + n\eta\,\delta\mathrm{J} + n\mu\,\delta\mathfrak{M} + n\rho\,\delta r + n\theta\,\delta(r, ds) + n\theta'\,\delta(r, dl) + n\omega\,\delta e.$$

En identifiant les deux expressions de $\delta\nu$, on trouve

$$\begin{aligned} \Sigma &= n\sigma, \\ \mathrm{H} &= n\eta, \\ \mathrm{M} &= n\mu, \\ \mathrm{P} &= n\rho, \\ \Theta &= n\theta, \\ \Theta' &= n\theta', \\ \Omega &= n\omega, \\ \Upsilon &= \upsilon. \end{aligned}$$

L'élément du ayant une grandeur, une forme, une orientation qui n'ont plus rien d'arbitraire, et qui ne dépendent pas de la grandeur, de la forme, de l'orientation de l'élément dv, on voit que les quantités

$$\sigma, \quad \eta, \quad \mu, \quad \rho, \quad \theta, \quad \theta', \quad \omega, \quad \upsilon$$

sont indépendantes des paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad dv,$$

relatifs à l'élément dv. D'ailleurs le nombre n est proportionnel au volume de l'élément dv. Ainsi se trouve démontrée la proposition que nous avions énoncée : les huit fonctions

$$\Sigma, \quad \mathrm{H}, \quad \mathrm{M}, \quad \mathrm{P}, \quad \Theta, \quad \Theta', \quad \Omega, \quad \Upsilon$$

sont indépendantes de α, β, ... Les sept premières sont proportionnelles à dv; la dernière est indépendante de dv.

Nous pourrons dès lors écrire

$$\begin{aligned} \delta\nu = {} & f\,dv\,\delta\,ds + g\,\delta\,dv + h\,dv\,\delta\mathrm{J} + k\,dv\,\delta\mathfrak{M} + l\,dv\,\delta r \\ & + m\,dv\,\delta(r, ds) + n\,dv\,\delta(r, dl) + p\,dv\,\delta e \\ & + \mathrm{A}\,\delta\alpha + \mathrm{B}\,\delta\beta + \ldots, \end{aligned}$$

les quantités

$$f, \quad g, \quad h, \quad k, \quad l, \quad m, \quad n, \quad p$$

étant des fonctions de

$$ds, \quad \text{J}, \quad \mathfrak{M}, \quad r, \quad (r, ds), \quad (r, dl), \quad e.$$

3° Nous allons maintenant démontrer que l'on a identiquement

$$\text{A} = 0, \qquad \text{B} = 0, \qquad \ldots.$$

Imaginons qu'un élément magnétique dv demeure invariable d'aimantation, de volume et de position en présence d'un élément de courant invariable, tandis que les paramètres qui définissent la forme subissent des variations infiniment petites $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... On a alors, pour cet élément dv,

$$\delta\nu = \text{A}\,\delta\alpha + \text{B}\,\delta\beta + \ldots.$$

Il nous faut démontrer que cette quantité est infiniment petite par rapport aux produits

$$dv\,\delta\alpha, \quad dv\,\delta\beta, \quad \ldots.$$

Pour cela, nous remarquons que l'on peut produire le changement de forme de l'élément dv de la manière suivante :

Après avoir divisé cet élément dv en un nombre infini n d'éléments du, sans rien changer à la grandeur, à la forme, à l'aimantation d'aucun d'entre eux, on change d'une manière convenable la position de N d'entre eux. Ce nombre N est infiniment grand en lui-même, mais infiniment petit par rapport à n.

La quantité $\delta\nu$, relative à l'élément primitif dv, sera la somme des n quantités analogues $\delta\varpi$ relatives aux n éléments du en lesquels il a été divisé. Comme, d'ailleurs, pour les $(n - \text{N})$ éléments du demeurés invariables, la quantité $\delta\varpi$ est identiquement nulle, $\delta\nu$ est la somme des N quantités $\delta\varpi$ relatives aux éléments déplacés.

Pour chacun de ces éléments, on a

$$\delta\varpi = l\,du\,\delta r + m\,du\,\delta(r, ds) + n\,du\,\delta(r, dl) + p\,du\,\delta e.$$

Si l'on remarque que les variations qui figurent au second membre sont, en général, de l'ordre de $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., on voit sans peine que $\delta\varpi$ est de l'ordre de

$$du\,\delta\alpha,$$

et la somme des quantités $\delta\varpi$ de l'ordre de

$$N\, du\, \delta\alpha,$$

quantité infiniment petite par rapport à

$$n\, du\, \delta\alpha = dv\, \delta\alpha,$$

Ce que nous nous proposions de démontrer.

On peut donc réduire l'expression générale de $\delta\nu$ à

$$\delta v = f\, dv\, \delta\, ds + g\, \delta\, dv + h\, dv\, \delta J + k\, dv\, \delta\mathfrak{M} + l\, dv\, \delta r \\ + m\, dv\, \delta(r, ds) + n\, dv\, \delta(r, dl) + p\, dv\, \delta e.$$

4° Une nouvelle propriété de cette quantité $\delta\nu$ est la suivante :

La quantité $\delta\nu$ ne dépend pas séparément des quantités $\mathfrak{M}$, dv, $\delta\mathfrak{M}$, $\delta\, dv$, mais seulement des quantités

$$\mathbf{M} = \mathfrak{M}\, dv,$$
$$\delta\mathbf{M} = \mathfrak{M}\, \delta\, dv + dv\, \delta\mathfrak{M}.$$

La démonstration de cette propriété repose sur une nouvelle hypothèse que nous allons énoncer.

Imaginons un aimant qui, au lieu d'être homogène, soit continuellement hétérogène. Chaque particule dv de cet aimant est formée de n particules magnétiques, d'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$, de volume du, dont l'ensemble représente un volume $\lambda\, dv$, et de particules non magnétiques dont l'ensemble représente un volume $(1 - \lambda)\, dv$.

Nous admettrons qu'un semblable élément équivaut à un élément homogène de volume dv et d'intensité d'aimantation $\lambda\mathfrak{M}$.

Il est d'ailleurs certain que la quantité $\delta\nu$ relative à cet élément complexe est la somme des quantités analogues $\delta\nu$ relatives aux particules dont il se compose. Or, la quantité $\delta\nu$ étant nulle, par hypothèse, pour tout élément non magnétique, on voit que la quantité $\delta\nu$ relative à l'élément complexe doit être égale à la somme des n quantités $\delta\nu$ relatives aux n éléments magnétiques du. Ces n quantités $\delta\nu$ différant infiniment peu les unes des autres, leur somme est égale à n fois l'une d'entre elles ; ou bien encore à la quantité $\delta\nu$ relative à un élément d'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$ et de volume $n\, du = \lambda\, dv$.

On doit donc obtenir la même valeur pour $\delta\nu$, soit que l'on considère un élément de volume dv et d'intensité d'aimantation

$\lambda \mathfrak{M}$, soit que l'on considère un élément de volume $\lambda\, dv$ et d'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$. Cela démontre la proposition énoncée et permet d'écrire

$$\begin{aligned}\delta\nu = \;& F\mathfrak{M}\, dv\, \delta\, ds + G\,\delta(\mathfrak{M}\, dv) + H\mathfrak{M}\, dv\, \delta J\\ &+ K\mathfrak{M}\, dv\, \delta r + M\mathfrak{M}\, dv\, \delta(r, ds)\\ &+ N\mathfrak{M}\, dv\, \delta(r, dl) + P\mathfrak{M}\, dv\, \delta e,\end{aligned}$$

$\delta\nu$ devant être fonction linéaire et homogène de dv et de $\delta\, dv$, les quantités F, G, H, L, M, N, P ne peuvent pas dépendre de dv ; et, comme elles ne peuvent dépendre de $\mathfrak{M}$ qu'en dépendant de $\mathfrak{M}\, dv$, on voit qu'elles sont indépendantes de $\mathfrak{M}$. Ce sont des fonctions de J, ds, r, (r, ds), (r, dl), e.

5° Nous allons voir que la quantité $\delta\nu$ ne dépend ni de J, ni de δJ.

Imaginons un premier élément $A_1B_1 = ds$, de résistance R_1, traversé par un courant dont l'intensité J varie de δJ. Pour ce premier élément, nous avons

$$\begin{aligned}\delta\nu_1 = \;& F(J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta\, ds + G(J)\,\delta(\mathfrak{M}\, dv) + H(J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta J\\ &+ L(J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta r + M(J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta(r, ds)\\ &+ N(J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta(r, dl) + P(J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta e\\ = \;& \delta\nu(J, \delta J).\end{aligned}$$

A ce premier élément, accolons-en un second A_2B_2, de même longueur ds, de même résistance, traversé par un courant dont l'intensité λJ varie de $\mu\, \delta J$. Soit, pour ce second élément,

$$\begin{aligned}\delta\nu_2 = \;& F(\lambda J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta\, ds + G(\lambda J)\,\delta(\mathfrak{M}\, dv) + H(\lambda J)\mathfrak{M}\, dv\, \mu\, \delta J\\ &+ L(\lambda J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta r + M(\lambda J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta(r, ds)\\ &+ N(\lambda J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta(r, dl) + P(\lambda J)\mathfrak{M}\, dv\, \delta e\\ = \;& \delta\nu(\lambda J, \mu\, \delta J).\end{aligned}$$

L'ensemble des deux éléments A_1B_1, A_2B_2 peut être regardé comme formant un seul élément A_3B_3, de longueur ds, de résistance $R_3 = \frac{1}{2}R_1$, traversé par un courant d'intensité $(1 + \lambda)J$, cette intensité variant de $(1 + \mu)\,\delta J$. Pour ce nouvel élément, on a

$$\begin{aligned}\delta\nu_3 = \;& F[(1+\lambda)J]\mathfrak{M}\, dv\, \delta\, ds + G[(1+\lambda)J]\,\delta(\mathfrak{M}\, dv)\\ &+ H[(1+\lambda)J]\mathfrak{M}\, dv\,(1+\mu)\,\delta J\\ &+ L[(1+\lambda)J]\mathfrak{M}\, dv\, \delta r + M[(1+\lambda)J]\mathfrak{M}\, dv\, \delta(r, ds)\\ &+ N[(1+\lambda)J]\mathfrak{M}\, dv\, \delta(r, dl) + P[(1+\lambda)J]\mathfrak{M}\, dv\, \delta e\\ = \;& \delta\nu[(1+\lambda)J, (1+\mu)\,\delta J].\end{aligned}$$

L'induction de l'élément dv met en mouvement, dans l'élément A_1B_1, une quantité d'électricité

$$\frac{1}{R_1}\delta\nu_1;$$

dans l'élément A_2B_2, une quantité d'électricité

$$\frac{1}{R_1}\delta\nu_2;$$

dans l'élément A_3B_3, une quantité d'électricité

$$\frac{1}{R_3}\delta\nu_3.$$

Or, cette dernière est évidemment la somme des deux premières. On a donc, en toutes circonstances,

$$\delta\nu(J, \delta J) + \delta\nu(\lambda J, \mu\,\delta J) = 2\,\delta\nu[(1+\lambda)J, (1+\mu)\,\delta J].$$

Faisons en particulier $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Nous trouvons

$$\delta\nu(J, \delta J) = \delta\nu(0, 0).$$

Le second membre étant indépendant de J et de δJ, il en est de même du premier, ainsi que nous l'avions annoncé. On a donc

$$\begin{aligned}\delta\nu = {} & F\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta\,ds + G\,\delta(\mathfrak{M}\,dv) + L\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta r \\ & + M\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta(r, ds) + N\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta(r\,dl) + P\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta e.\end{aligned}$$

les quantités F, G, L, M, N, P étant des fonctions de ds, r, (r, ds), (r, dl), e.

6° Prouvons enfin que $\delta\nu$ est une fonction linéaire et homogène de ds et de $\delta\,ds$.

Imaginons deux éléments consécutifs AB, BC; ces deux éléments sont supposés identiques entre eux; chacun d'eux a pour longueur ds, et cette longueur varie de $\delta\,ds$.

Pour le premier, la quantité $\delta\nu$ a une valeur

$$\begin{aligned}\delta\nu_1 = {} & F(ds)\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta\,ds + G(ds)\,\delta\mathfrak{M}\,dv + L(ds)\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta r \\ & + M(ds)\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta(r, ds) + N(ds)\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta(r, dl) \\ & + P(ds)\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta e.\end{aligned}$$

Pour le second, la quantité $\delta\nu$ a une valeur $\delta\nu_2$ qui diffère infiniment peu de $\delta\nu_1$.

L'induction provenant de l'élément dv transporte, de A en B, une quantité d'électricité

$$\delta Q_1 = \frac{\delta \nu_1}{R},$$

R étant la résistance commune des deux éléments AB, BC. Elle transporte de B en C une quantité d'électricité

$$\delta Q_2 = \frac{\delta \nu_2}{R},$$

sensiblement égale à la précédente. On peut donc dire qu'elle transporte de A en C une quantité d'électricité

$$\delta Q_1 = \frac{\delta \nu_1}{R}.$$

Mais, d'autre part, l'élément AC est un élément de longueur $2\,ds$ dont la longueur varie de $2\,\delta\,ds$. Pour cet élément, on a

$$\begin{aligned} \delta \nu_3 = {} & 2\,F(2\,ds)\mathfrak{M}\,dv\,\delta\,ds + G(2\,ds)\,\delta\,\mathfrak{M}\,dv + L(2\,ds)\mathfrak{M}\,dv\,\delta r \\ & + M(2\,ds)\mathfrak{M}\,dv\,\delta(r, ds) + N(2\,ds)\mathfrak{M}\,dv\,\delta(r, dl) \\ & + P(2\,ds)\mathfrak{M}\,dv\,\delta e. \end{aligned}$$

La résistance de ce nouvel élément est $2R$. La quantité d'électricité transportée de A en C a donc pour valeur

$$\delta Q_1 = \frac{\delta \nu_3}{2R}.$$

La comparaison des deux expressions de δQ_1 donne

$$\delta \nu_3 = 2\,\delta \nu_1.$$

En identifiant les deux membres, on trouve

$$\begin{aligned} F(2\,ds) &= F(ds), \\ G(2\,ds) &= 2\,G(ds), \\ L(2\,ds) &= 2\,L(ds), \\ M(2\,ds) &= 2\,M(ds), \\ N(2\,ds) &= 2\,N(ds), \\ P(2\,ds) &= 2\,P(ds). \end{aligned}$$

La fonction F est donc indépendante de ds. Les fonctions G, L, M, N, P sont proportionnelles à ds. La proposition énoncée

est ainsi démontrée, et l'on peut écrire

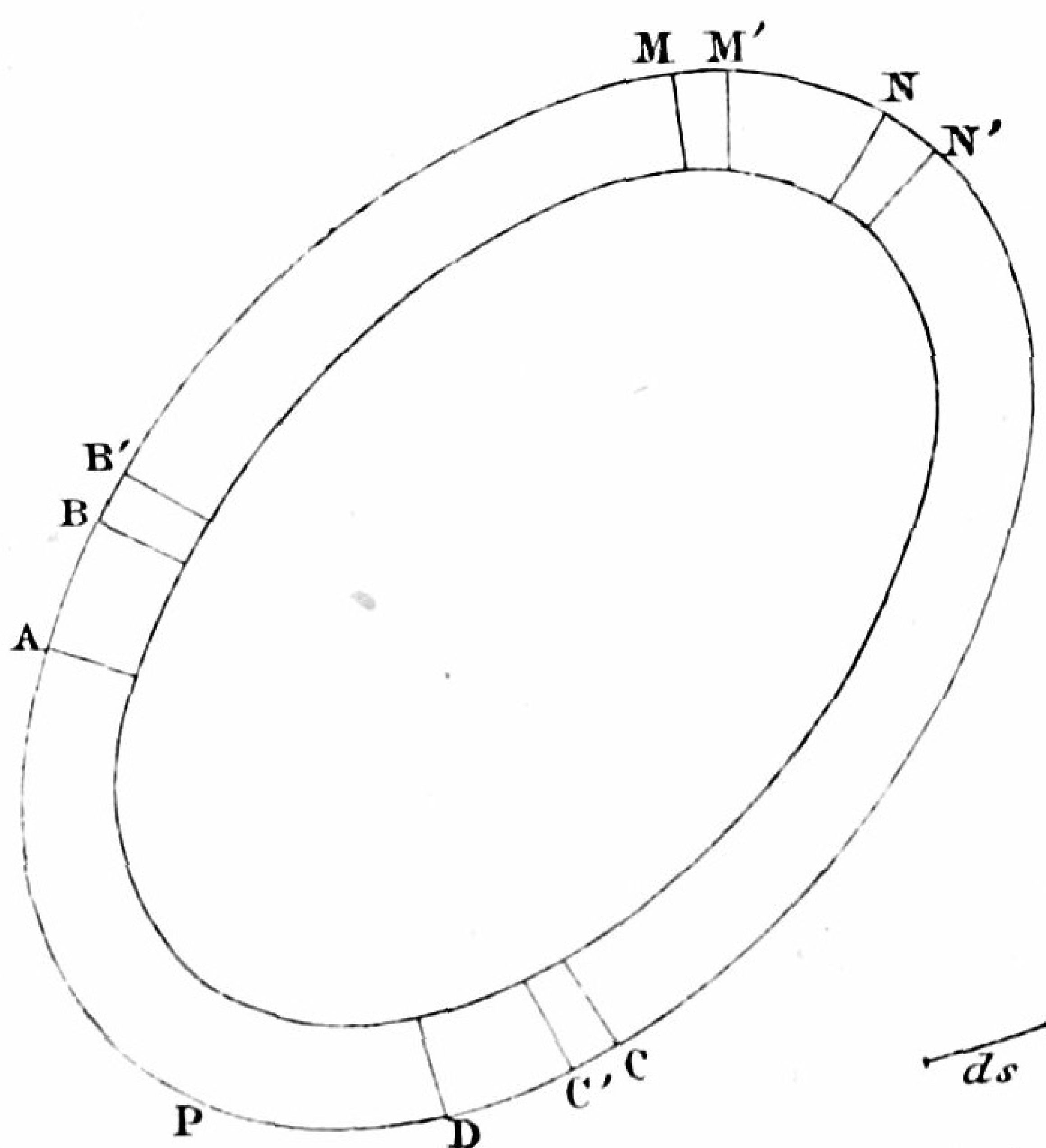
$$\begin{aligned}\delta\nu = \; & \Sigma[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta\,ds \\ & + M[r, (r, ds), (r, dl), e]\,ds\,\delta(\mathfrak{M}\,dv) \\ & + P[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\mathfrak{M}\,dv\,ds\,\delta r \\ & + \Theta[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\mathfrak{M}\,dv\,ds\,\delta(r, ds) \\ & + \Theta'[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\mathfrak{M}\,dv\,ds\,\delta(r, dl) \\ & + \Omega[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\mathfrak{M}\,dv\,ds\,\delta e;\end{aligned}$$

$\delta\nu$ dépend ainsi de six fonctions inconnues de $r, (r, ds), (r, dl), e$. Nous allons réduire à l'unité le nombre de ces fonctions inconnues.

7° Commençons par réduire à une seule les cinq fonctions M, P, Θ, Θ', Ω.

Imaginons qu'une courbe fermée (*fig.* 58) soit prise pour directrice d'une surface canal de section très petite ω. Remplissons

Fig. 58.



cette surface canal par une substance magnétique ayant en tout point une même intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$, dirigée comme la tangente à la courbe directrice. Nous obtenons ainsi un *solénoïde magnétique fermé*.

Imaginons que ce solénoïde éprouve la modification suivante :

Un élément AB, de longueur dl_0, de ce solénoïde, s'allonge de $\delta\,dl$, de manière à venir en AB'.

Un autre élément CD, de longueur dl_1, de ce solénoïde, se raccourcit de $\delta\,dl$ de manière à venir en C'D.

Tout élément MN, de longueur dl, situé sur le solénoïde entre B et C, se déplace dans sa propre direction d'une longueur $\delta\, dl$, de manière à venir en M'N'.

Les éléments de la région DPA ne subissent aucune variation.

Enfin l'aimantation garde en tout point l'intensité $\mathfrak{M}$ et reste tangente à la directrice.

Considérons un élément de courant ds, et calculons les diverses quantités $\delta\nu$ pour cet élément, supposé invariable de grandeur et de position.

Un seul des paramètres qui définissent le système des éléments AB et ds varie ; c'est le paramètre dv qui varie de

$$\delta\, dv = \omega\, \delta\, dl.$$

On a donc, pour l'ensemble des éléments AB et ds,

$$\delta\nu_0 = \mathrm{M}\,[r_0,\ (r_0, ds),\ (r_0, dl_0),\ e_0]\, \mathfrak{M}\, ds\, \omega\, \delta\, dl.$$

De même, pour l'ensemble des éléments CD et ds, on a

$$\delta\nu_1 = -\mathrm{M}\,[r_1,\ (r_1, ds),\ (r_1, dl_1),\ e_1]\, \mathfrak{M}\, ds\, \omega\, \delta\, dl.$$

Pour l'ensemble des éléments MN et ds, on a

$$\delta\, ds = 0,$$
$$\delta\,(\mathfrak{M}\, dv) = 0,$$
$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial l}\,\delta\, dl,$$
$$\delta\,(r, ds) = \frac{\partial\,(r, ds)}{\partial l}\,\delta\, dl,$$
$$\delta\,(r, dl) = \frac{\partial\,(r, dl)}{\partial l}\,\delta\, dl,$$
$$\delta e = \frac{\partial e}{\partial l}\,\delta\, dl,$$

ce qui donne

$$\delta\nu = \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{P}\,[r,\ (r, ds),\ (r, dl),\ e]\,\frac{\partial r}{\partial l} \\ & + \Theta\,[r,\ (r, ds),\ (r, dl),\ e]\,\frac{\partial\,(r, ds)}{\partial l} \\ & + \Theta'[r,\ (r, ds),\ (r, dl),\ e]\,\frac{\partial\,(r, dl)}{\partial l} \\ & + \Omega\,[r,\ (r, ds),\ (r, dl),\ e]\,\frac{\partial e}{\partial l} \end{aligned} \right\} \mathfrak{M}\,\omega\, ds\, dl\, \delta\, dl.$$

Or la modification que nous venons de définir n'altère pas les variables qui définissent, au point de vue de l'Électromagnétisme, le système formé par le solénoïde et l'élément conducteur; d'après ce qui a été dit au début de ce Chapitre, elle équivaut à l'absence de toute modification et, par conséquent, ne doit donner lieu à aucune induction dans l'élément ds. Nous devons donc avoir

$$\delta\nu_0 + \delta\nu_1 + \sum \delta\nu = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $\mathfrak{M}\, ds\, \omega\, \delta dl$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}\,[r_0, (r_0, ds), (r_0, dl_0), e_0] \\ &- \mathrm{M}_1[r_1, (r_1, ds), (r_1, dl_1), e_1] \\ + \int_0^1 \Big\{ &\mathrm{P}[r, (r, ds), (r, dl), e]\frac{\partial r}{\partial l} \\ &+ \Theta[r, (r, ds), (r, dl), e]\frac{\partial (r, ds)}{\partial l} \\ &+ \Theta'[r, (r, ds), (r, dl), e]\frac{\partial (r, dl)}{\partial l} \\ &+ \Omega[r, (r, ds), (r, dl), e]\frac{\partial e}{\partial l}\Big\}\, dl = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité, devant avoir lieu quelle que soit la forme de la courbe ABMNCD, on doit avoir

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial r}, \\ \Theta &= \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial (r, ds)}, \\ \Theta' &= \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial (r, dl)}, \\ \Omega &= \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial e}. \end{aligned} \right.$$

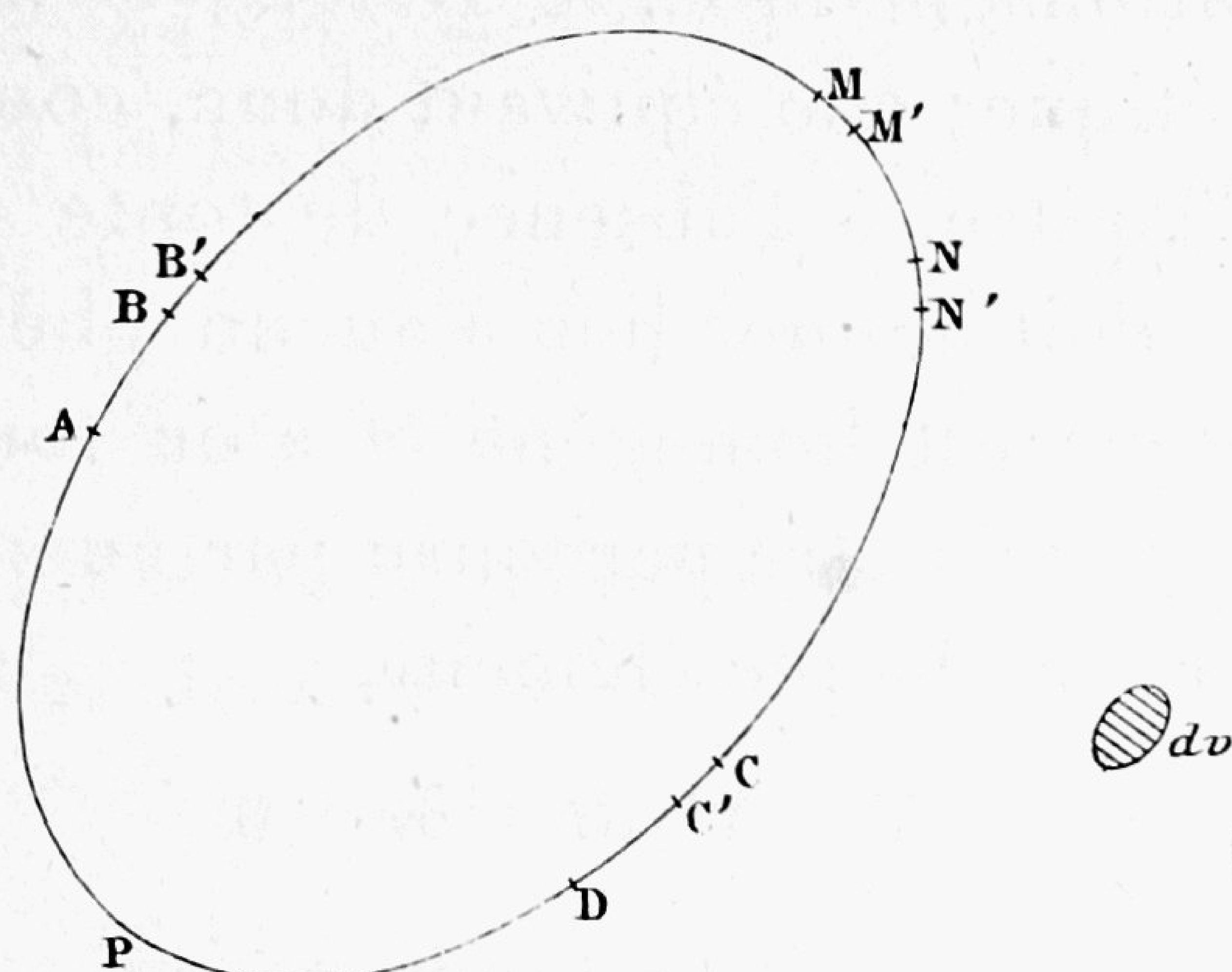
Ces égalités réduisent déjà à deux le nombre des fonctions inconnues figurant dans l'expression de $\delta\nu$.

8° Nous allons maintenant réduire ces fonctions inconnues à une seule, en prouvant que les deux fonctions M et Σ sont identiques.

Envisageons un conducteur fermé placé en présence d'un élément magnétique immobile dv (*fig.* 59). Un élément $\mathrm{AB} = ds_0$ de ce conducteur s'allonge de δds, de manière à venir en AB′. Un

autre élément CD $= ds_1$ se raccourcit de $\delta\, ds$, de manière à venir en C'D. Tout élément MN de l'arc BMC se déplace de $\delta\, ds$ dans sa propre direction. Enfin les éléments de l'arc DPA demeurent immobiles.

Fig. 59.



Pour le système formé par l'élément de conducteur AB et l'élément magnétique dv, on a

$$\delta\nu_0 = \Sigma\,[r_0,\, (r_0, ds_0),\, (r_0, dl),\, e_0]\, \mathfrak{M}\, dv\, \delta\, ds.$$

Pour le système formé par les éléments CD et dv, on a

$$\delta\nu_1 = -\,\Sigma\,[r_1,\, (r_1, ds_1),\, (r_1, dl),\, e_1]\, \mathfrak{M}\, dv\, \delta\, ds.$$

Pour le système formé par l'élément MN et l'élément dv, on a

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial s}\,\delta\, ds,$$

$$\delta \cos(r, ds) = \frac{\partial\,(r, ds)}{\partial s}\,\delta\, ds,$$

$$\delta \cos(r, dl) = \frac{\partial\,(r, dl)}{\partial s}\,\delta\, ds,$$

$$\delta \cos(ds, dl) = \frac{\partial e}{\partial s}\,\delta\, ds,$$

ce qui donne

$$\delta\nu = \left\{\begin{aligned} &\mathrm{P}\,[r,\, (r, ds),\, (r, dl),\, e]\,\frac{\partial r}{\partial s} \\ &+\Theta\,[r,\, (r, ds),\, (r, dl),\, e]\,\frac{\partial\,(r, ds)}{\partial s} \\ &+\Theta'[r,\, (r, ds),\, (r, dl),\, e]\,\frac{\partial\,(r, dl)}{\partial s} \\ &+\Omega\,[r,\, (r, ds),\, (r, dl),\, e]\,\frac{\partial e}{\partial s} \end{aligned}\right\}\mathfrak{M}\, dv\, ds\, \delta\, ds.$$

Enfin pour l'élément dv et un élément quelconque de l'arc DPA, on a

$$\delta \nu = 0.$$

Cette modification n'altère pas les variables qui définissent, au point de vue électromagnétique, le système formé par le courant et l'élément magnétique; elle équivaut donc, comme nous l'avons vu au début du Chapitre, à l'absence de toute modification, et, par conséquent, ne doit donner lieu à aucun phénomène d'induction. Si le conducteur est homogène et a en tout point la même température, il ne pourra être parcouru par aucun courant. Nous devrons donc avoir, en chaque élément,

$$\varepsilon(V - V')\,dt + \delta\nu = 0$$

et, par conséquent, pour tout le conducteur,

$$\varepsilon\,dt \sum (V - V') + \sum \delta\nu = 0.$$

Or, le long de tout conducteur fermé, on a

$$\sum (V - V') = 0.$$

Il reste donc

$$\sum \delta\nu = 0,$$

ce qui devient, en supprimant le facteur $\mathfrak{M}\,dv\,\delta\,ds$,

$$\begin{aligned} &\Sigma[r_0, (r_0, ds_0), (r_0, dl), e] \\ &- \Sigma[r_1, (r_1, ds_1), (r_1, dl), e] \\ &+ \int_0^1 \Big\{ P[r, (r, ds), (r, dl), e]\frac{\partial r}{\partial s} \\ &\quad + \Theta[r, (r, ds), (r, dl), e]\frac{\partial(r.\,ds)}{\partial s} \\ &\quad + \Theta'[r, (r, ds), (r, dl), e]\frac{\partial(r, dl)}{\partial s} \\ &\quad + \Omega[r, (r, ds), (r, l), e]\frac{\partial e}{\partial s}\Big\} ds = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu quel que soit l'arc ABMNCD. On doit donc avoir

$$(\beta) \qquad P = \frac{\partial \Sigma}{\partial r}, \qquad \Theta = \frac{\partial \Sigma}{\partial(r, ds)}, \qquad \Theta' = \frac{\partial \Sigma}{\partial(r, dl)}, \qquad \Omega = \frac{\partial \Sigma}{\partial e}.$$

En comparant les égalités (α), (β), nous voyons que les deux fonctions Σ et M ont les mêmes dérivées partielles et ne peuvent différer que par une constante. Il est aisé de voir que cette constante a la valeur o.

Considérons, en effet, un élément magnétique et un élément de courant infiniment éloignés l'un de l'autre; exprimons qu'un changement dans le moment magnétique du premier ne produit aucune induction dans le second. Nous trouverons la condition

$$M[\infty, (r, ds), (r, dl), e] = 0.$$

Exprimons que l'élément magnétique ne produit aucune induction dans l'élément de conducteur lorsque ce dernier change de longueur. Nous trouverons la condition

$$\Sigma[\infty, (r, ds), (r, dl), e] = 0.$$

Ces égalités nous montrent que la constante par laquelle M diffère de Σ ne peut être que o. Nous avons donc, comme nous l'avions annoncé,

$$M = \Sigma.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (α), ne laisse plus, dans l'expression de $\delta\nu$, qu'une seule fonction inconnue de r, (r, ds), (r, dl) et e, la fonction M. Elle permet d'écrire

$$\begin{aligned}\delta\nu = M\,\delta(\mathfrak{M}\, dv\, ds) &+ \mathfrak{M}\, dv\, ds \frac{\partial M}{\partial r}\delta r \\ &+ \mathfrak{M}\, dv\, ds \frac{\partial M}{\partial (r, ds)}\delta(r, ds) + \mathfrak{M}\, dv\, ds \frac{\partial M}{\partial (r, dl)}\delta(r, dl) \\ &+ \mathfrak{M}\, dv\, ds \frac{\partial M}{\partial e}\delta e,\end{aligned}$$

ou bien, simplement

$$\delta\nu = \delta\left\{M[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\mathfrak{M}\, dv\, ds\right\}. \tag{1}$$

Cette formule conduit à un résultat fondamental. Considérons un élément conducteur de résistance R, placé en présence d'un aimant. Dans le temps dt, l'induction exercée par l'aimant sur l'élément ds déplace une quantité d'électricité

$$\delta Q = \frac{\sum \delta\nu}{R} = \frac{1}{R}\,\delta\left\{ds \sum M[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\mathfrak{M}\, dv\right\}.$$

Supposons qu'entre les instants t_0 et t_1 la résistance de l'élément

conducteur ne varie pas; l'induction de l'aimant y déplacera pendant ce temps une quantité d'électricité

$$Q = \frac{1}{R}\left\{ ds \sum M[r, (r, ds), (r, dl), e]\, \mathfrak{M}\, dv \right\}_{t=t_0}^{t=t_1}.$$

Ainsi, *dans un élément conducteur de résistance invariable, l'induction d'un système magnétique déplace une quantité d'électricité qui dépend seulement de l'état initial et de l'état final du système formé par l'aimant et l'élément conducteur.*

La position relative des deux éléments ds et dl est connue sans ambiguïté lorsqu'on se donne les variables r, (r, ds), (r, dl), e. D'ailleurs, la position des deux éléments est connue sans ambiguïté lorsqu'on se donne, par rapport à un système d'axes rectangulaires, les paramètres

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & z, \\ \dfrac{dx}{ds}, & \dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dz}{ds}, \\ \xi, & \eta, & \zeta, \\ \dfrac{d\xi}{dl}, & \dfrac{d\eta}{dl}, & \dfrac{d\zeta}{dl}. \end{array}$$

Les variables r, (r, ds), (r, dl), e sont donc des fonctions uniformes de ces paramètres, et il en est de même de la quantité

$$M[r, (r, ds), (r, dl), e].$$

Nous allons montrer que cette quantité est fonction linéaire et homogène de

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

et qu'elle est aussi fonction linéaire et homogène de

$$\frac{d\xi}{dl}, \quad \frac{d\eta}{dl}, \quad \frac{d\zeta}{dl}.$$

Pour démontrer que la fonction M est linéaire et homogène par rapport à $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, exprimons qu'un élément magnétique dont la position demeure fixe, mais dont l'aimantation varie, engendre, dans un circuit fermé quelconque C, dont tous les points sont à listance finie, une force électromotrice intégrale d'induction qui a une valeur finie.

Cette proposition entraînera de suite celle-ci :

L'intégrale

$$\int_C M\, ds,$$

étendue à un circuit fermé quelconque, est finie.

Si l'on observe que la quantité M doit changer de signe sans changer de grandeur lorsqu'on renverse le sens de l'élément ds, et si l'on reproduit un raisonnement analogue à ceux que nous avons exposés au Livre XIII, Chapitre II, on arrive à la conclusion annoncée :

La quantité

$$M[r, (r, ds), (r, dl), e]$$

est fonction linéaire et homogène de

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Exprimons maintenant qu'un solénoïde magnétique fermé A qui éprouve une même variation de puissance dans toute sa longueur engendre une force électromotrice d'induction finie dans un élément conducteur quelconque, et nous arriverons à la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int_A M\, dl,$$

étendue à un circuit ermé quelconque, est finie.

Comme la quantité M doit changer de signe sans changer de grandeur lorsqu'on renverse le sens de l'élément dl, on voit que :

La quantité

$$M[r, (r, ds), (r, dl), e]$$

est fonction linéaire et homogène de

$$\frac{d\xi}{dl}, \quad \frac{d\eta}{dl}, \quad \frac{d\zeta}{dl}.$$



CHAPITRE II.

LOI DE L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CONDUCTEUR PARCOURU PAR UN COURANT UNIFORME.

Nous allons pousser plus loin la recherche de la loi de l'induction électromagnétique dans un cas particulier : nous supposerons qu'un système d'aimants soit placé en présence d'un conducteur fermé et forme avec lui un certain ensemble ; cet ensemble se modifie de telle manière, que l'induction de l'aimant sur le conducteur, jointe aux autres forces électromotrices que le conducteur renferme, engendre dans le conducteur un courant uniforme [1].

Soient dv, dv', dv'', ... les divers éléments de volume du système magnétique. Soit ds un élément du conducteur. Soit $\mathrm{R}\,ds$ la résistance de cet élément. Soit $\mathcal{E}\,ds$ l'ensemble des autres forces électromotrices agissant dans cet élément. Soit enfin j l'intensité, à l'instant t, du courant qui traverse l'induit. Nous aurons

$$\begin{aligned}\mathrm{R}j\,ds\,dt = \delta(\mathrm{M}\,\mathfrak{M}\,dv\,ds) + \delta(\mathrm{M}'\,\mathfrak{M}'\,dv'\,ds)\\ + \delta(\mathrm{M}''\,\mathfrak{M}''\,dv''\,ds) + \ldots + \mathcal{E}\,ds\,dt.\end{aligned}$$

Par hypothèse, le courant induit est uniforme ; j a donc la même valeur pour tous les éléments ds. Si donc nous ajoutons membre à membre toutes les égalités analogues à la précédente, en remarquant que

$$\rho = \int \mathrm{R}\,ds$$

[1] Il faut bien remarquer que cette hypothèse n'implique aucune restriction au sujet de la forme du système composé par l'aimant et le conducteur, ni au sujet des variations qui surviennent dans les diverses parties de ce système ; car on peut toujours imaginer que, dans l'induit, des forces électromotrices, étrangères à l'induction développée par l'aimant, assurent l'uniformité du courant.

est la résistance du conducteur fermé, nous trouverons

$$\rho j\,dt = \delta\left(\mathfrak{M}\,dv\int \mathrm{M}\,ds\right) + \delta\left(\mathfrak{M}'\,dv'\int \mathrm{M}'\,ds\right)$$
$$+ \delta\left(\mathfrak{M}''\,dv''\int \mathrm{M}''\,ds\right) + \ldots + dt\int \mathcal{E}\,ds.$$

Cette égalité nous montre que, dans les circonstances où nous nous sommes placé, il nous suffit, pour déterminer l'intensité du courant induit par l'aimant, de connaître l'expression des quantités

$$\int \mathrm{M}\,ds, \quad \int \mathrm{M}'\,ds, \quad \int \mathrm{M}''\,ds, \quad \ldots,$$

les intégrales s'étendant toutes au conducteur fermé.

Nous allons montrer que ces intégrales peuvent être déterminées en faisant usage de l'hypothèse suivante :

Lorsqu'un élément magnétique variable est placé en présence d'un conducteur fermé et que ces deux corps se déplacent l'un par rapport à l'autre de manière que le conducteur induit soit traversé par un courant uniforme, l'action électromotrice produite par l'élément magnétique peut être remplacée par des actions électromotrices émanant de ses deux pôles.

Avant de faire usage de cette hypothèse, nous allons en préciser le sens.

Reprenons l'expression du potentiel magnétique mutuel de deux aimants.

Soient $dv = dx\,dy\,dz$ et $dv' = dx'\,dy'\,dz'$ deux éléments magnétiques appartenant respectivement à deux aimants situés à distance finie l'un de l'autre. Soient

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation en un point de l'élément dv;

$\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ les composantes de l'aimantation en un point de l'élément dv';

r la distance d'un point de l'élément dv à un point de l'élément dv'.

Les actions mutuelles des deux aimants A et B admettent un

potentiel (t. II, p. 45), qui est la somme de tous les termes tels que

$$\left(\mathcal{A}\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x'}+\mathcal{A}\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y'}+\mathcal{A}\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z'}\right.$$
$$+\mathcal{B}\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x'}+\mathcal{B}\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial y'}+\mathcal{B}\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z'}$$
$$\left.+\mathcal{C}\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x'}+\mathcal{C}\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y'}+\mathcal{C}\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z'}\right)dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz',$$

obtenus en combinant chacun des éléments $dx\,dy\,dz$ du corps A avec chacun des éléments $dx'\,dy'\,dz'$ du corps B.

Supposons qu'à l'intérieur de l'élément $dx\,dy\,dz$ on prenne deux points M, M_1, tels que la droite MM_1 soit parallèle à la direction de l'aimantation en un point de l'élément $dx\,dy\,dz$ et ait le même sens. Soit dl la longueur infiniment petite, mais arbitraire, qui sépare ces deux points. Posons

$$\mu=\frac{\mathfrak{M}\,dx\,dy\,dz}{dl},$$

$\mathfrak{M}$ étant l'intensité d'aimantation en un point de l'élément et μ une quantité infiniment petite, du même ordre que le produit de deux des dimensions de l'élément. Affectons le point M du coefficient $-\mu$ et le point M_1 du coefficient μ, ce que nous exprimerons en disant que nous plaçons au point M une quantité μ de *fluide magnétique boréal,* et au point M_1 une quantité μ de *fluide magnétique austral.* Opérons de même sur l'élément $dx'\,dy'\,dz'$. Supposons enfin que deux quantités de fluide magnétique, marquées en grandeur et en signe par μ et μ', se repoussent avec une force

$$\frac{\mu\mu'}{r^2},$$

et nous verrons aisément que les actions mutuelles des deux aimants admettront le même potentiel que celui dont nous venons de rappeler la forme.

Si, pour abréger, nous convenons d'appeler *pôles magnétiques* de l'élément dv les deux masses μ et $-\mu$, disposées comme nous

venons de l'indiquer, nous pourrons dire que l'action mutuelle de deux aimants équivaut à l'action mutuelle des pôles de leurs divers éléments.

L'ensemble d'une masse magnétique μ placée au point M et d'un élément de courant $AB = ds$ est défini par :

1° La masse μ ;

2° La longueur ds de l'élément AB ;

3° L'intensité J du courant qui le traverse ;

4° La longueur r de la droite AM ;

5° L'angle (r, ds) des deux demi-droites AM, AB ; ce dernier est lui-même complètement défini par son cosinus.

Parmi ces paramètres, les quatre derniers seuls sont variables.

Imaginons que les divers éléments magnétiques qui composent un certain aimant aient été remplacés par leurs pôles. Soient M, M_1, M', M'_1, ... ces pôles, nécessairement en nombre pair. Supposons cet aimant placé en présence d'un élément de courant ds. Il y induit, à l'instant t, une force électromotrice $\mathfrak{E}$. Si l'on peut écrire

$$\mathfrak{E}\,dt = \delta\varpi + \delta\varpi_1 + \delta\varpi' + \delta\varpi'_1 + \ldots,$$

$\delta\varpi_k$ dépendant seulement des paramètres qui définissent le système formé par le pôle M_k et l'élément de courants ds et des variations de ces paramètres dans le temps dt, nous dirons que *l'action électromotrice de l'aimant est équivalente à l'ensemble des actions électromotrices émanées de ses divers pôles.*

Mais, pour le moment du moins, nous ne voulons point faire une hypothèse aussi générale. *Nous voulons supposer seulement que l'hypothèse précédente conduit à des résultats exacts dans le cas particulier où le courant induit est supposé fermé et uniforme ;* nous voulons supposer, en d'autres termes, non pas l'exactitude de l'égalité précédente, mais seulement l'exactitude de l'égalité

$$dt \sum \mathfrak{E} = \sum (\delta\varpi + \delta\varpi_1 + \delta\varpi' + \delta\varpi'_1 + \ldots), \tag{1}$$

les signes $\sum$ indiquant des sommations qui s'étendent à un courant fermé et uniforme.

Pour discuter les conséquences de cette hypothèse, il nous faut d'abord préciser la forme que peut présenter une quantité telle

que $\delta\varpi$. Nous y parviendrons en suivant une voie entièrement analogue à celle qui nous a servi au Chapitre précédent pour déterminer la forme de $\delta\nu$.

1° En raisonnant exactement comme nous l'avons fait pour $\delta\nu$ au Chapitre précédent, nous prouverons que $\delta\varpi$ est une fonction linéaire et homogène de δJ, $\delta\, ds$, δr, $\delta \cos(r, ds)$.

2° Comme pour $\delta\nu$, nous prouverons que $\delta\varpi$ est indépendant de J et de δJ.

3° Comme pour $\delta\nu$, nous prouverons que le coefficient de $\delta\, ds$ ne dépend pas de ds, tandis que le reste de $\delta\varpi$ est proportionnel à ds.

4° De ce fait que deux masses magnétiques μ et μ' accolées l'une à l'autre au point M doivent agir sur l'élément ds comme une masse magnétique unique $(\mu + \mu')$ placée au point M, on déduit aisément que $\delta\varpi$ doit être proportionnel à μ.

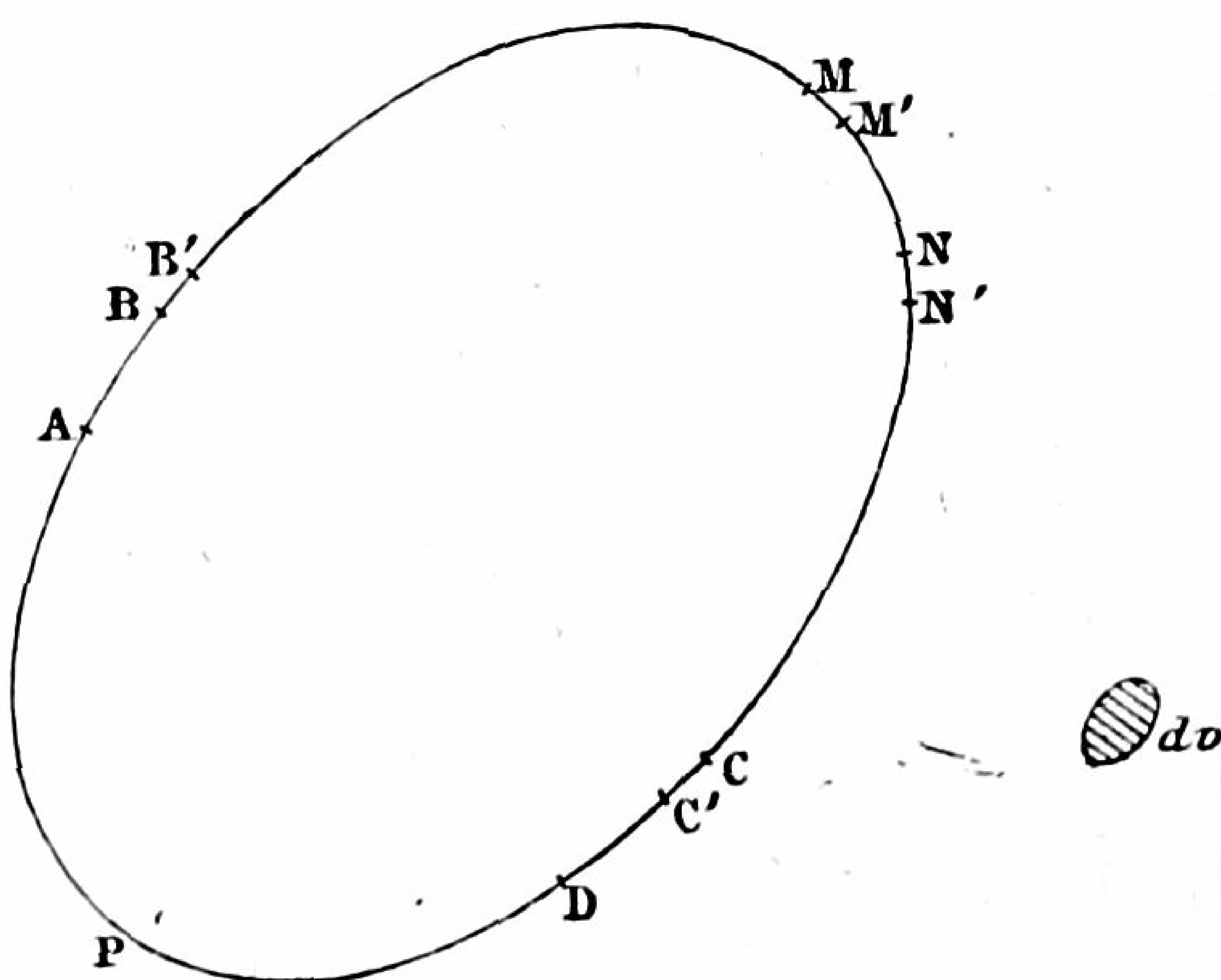
On a donc

$$\delta\varpi = \mu[\sigma\, \delta\, ds + \rho\, ds\, \delta r + \theta\, ds\, \delta \cos(r, ds)],$$

σ, ρ, θ étant des fonctions de r et de $\cos(r, ds)$.

5° Prenons maintenant (*fig.* 60) un conducteur fermé, inva-

Fig. 60.



riable de forme et de position, placé en présence d'un élément magnétique invariable de position, de forme et d'aimantation.

Au lieu de supposer ce conducteur immobile, nous pouvons toujours, par la pensée, lui appliquer la modification suivante :

L'élément $AB = ds_0$ s'allonge de $\delta\, ds$, de manière à venir en AB';

L'élément CD $= ds_1$ se raccourcit de $\delta\, ds$, de manière à venir en C'D;

Tout élément MN, situé entre B et C, se déplace d'une longueur $\delta\, ds$ dans sa propre direction, de manière à venir en M'N';

Tout élément de l'arc DPA demeure invariable.

Nous avons vu que, dans une semblable transformation, on devait avoir

$$\sum \mathfrak{E} = 0.$$

Soient M et M' les deux pôles de l'élément magnétique.

D'après l'égalité (1), l'égalité précédente deviendra

$$\sum \delta\varpi + \sum \delta\varpi' = 0.$$

Au point M se trouve une masse magnétique $-\mu$. Il est alors aisé de voir que l'on aura

$$\sum \delta\varpi = -\mu \left\{ \sigma_0 - \sigma_1 + \int_0^1 \left[\rho \frac{\partial r}{\partial s} + \theta \frac{\partial \cos(r, ds)}{\partial s} \right] ds \right\} \delta\, ds.$$

Au point M' se trouve une masse magnétique μ. On a donc

$$\sum \delta\varpi' = \mu \left\{ \sigma'_0 - \sigma'_1 + \int_0^1 \left[\rho' \frac{\partial r'}{\partial s} + \theta' \frac{\partial \cos(r', ds)}{\partial s} \right] ds \right\} \delta\, ds.$$

On doit donc avoir

$$\sigma'_0 - \sigma'_1 + \int_0^1 \left[\rho' \frac{\partial r'}{\partial s} + \theta' \frac{\partial \cos(r', ds)}{\partial s} \right] ds$$
$$- \left\{ \sigma_0 - \sigma_1 + \int_0^1 \left[\rho \frac{\partial r}{\partial s} + \theta \frac{\partial \cos(r, ds)}{\partial s} \right] ds \right\} = 0.$$

Soit dl la direction MM'. Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial l} \left\{ \sigma_0 - \sigma_1 + \int_0^1 \left[\rho \frac{\partial r}{\partial s} + \theta \frac{\partial \cos(r, ds)}{\partial s} \right] ds \right\} = 0.$$

La direction dl étant une direction quelconque de l'espace, on voit que la quantité

$$\sigma_0 - \sigma_1 + \int_0^1 \left[\rho \frac{\partial r}{\partial s} + \theta \frac{\partial \cos(r, ds)}{\partial s} \right] ds$$

doit avoir une valeur indépendante de la position du point M dans

l'espace. Comme elle s'annule évidemment lorsque le point M est à l'infini, on voit que l'on a

$$\sigma_0 - \sigma_1 + \int_0^1 \left[\rho \frac{\partial r}{\partial s} + \theta \frac{\partial \cos(r, ds)}{\partial s}\right] ds = 0,$$

ce qui donne

$$\rho = \frac{\partial \sigma}{\partial r},$$

$$\theta = \frac{\partial \sigma}{\partial \cos(r, ds)}$$

et permet d'écrire

$$\delta\varpi = \mu\delta \left\{ \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds \right\}.$$

Cette forme de $\delta\varpi$ étant trouvée, voyons ce que va nous donner l'égalité (1), en supposant que l'aimant soit réduit à un seul élément magnétique dv ayant pour pôles les points M et M'.

Dans ce cas,

$$\sum(\delta\varpi + \delta\varpi' + \ldots)$$

se réduit à

$$\sum \delta\varpi + \sum \delta\varpi'.$$

Or on a

$$\sum \delta\varpi = -\mu\delta \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds,$$

$$\sum \delta\varpi' = \mu\delta \int \sigma[r', \cos(r', ds)]\, ds,$$

les intégrations s'étendant au conducteur fermé. D'ailleurs

$$\int \sigma[r' \cos(r', ds)]\, ds = \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds + dl \frac{\partial}{\partial l} \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds.$$

On a donc

$$\sum \delta\varpi + \sum \delta\varpi' = \mu\delta \left\{ dl \frac{\partial}{\partial l} \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds \right\}.$$

Si l'on remarque que

$$\mu\, dl = \mathfrak{M}\, dv$$

et que, les masses μ étant supposées invariables,

$$\mu\, \delta dl = \delta(\mathfrak{M}\, dv),$$

on voit que l'égalité précédente devient

$$\sum \delta\varpi + \sum \delta\varpi' = \delta \left\{ \mathfrak{M}\, dv \frac{\partial}{\partial l} \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds \right\}.$$

Ceci transforme l'égalité (1), en vertu de l'égalité (1) du Chapitre précédent, en

$$\delta \left\{ \mathfrak{M}\, dv \int \mathrm{M}[r, (r, ds), (r, dl), e]\, ds \right\} = \delta \left\{ \mathfrak{M}\, dv \frac{\partial}{\partial l} \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds \right\}.$$

Supposons, en particulier, que $\mathfrak{M}\, dv$ demeure invariable, et nous obtiendrons l'égalité

$$(2) \qquad \delta \int \mathrm{M}[r, (r, ds), (r, dl), e]\, ds = \delta \frac{\partial}{\partial l} \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds.$$

La quantité

$$\int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds$$

peut n'être pas une fonction uniforme de la position du point M. Mais la valeur que prend la quantité

$$\delta \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds,$$

lorsqu'on déplace et déforme la courbe fermée à laquelle appartient l'élément ds sans déplacer le point M, est une fonction uniforme des coordonnées du point M, car elle représente le produit par dt de la somme des forces électromotrices induites dans la courbe fermée par une masse magnétique égale à l'unité placée en M.

Soit dl un élément d'une courbe fermée *invariable* de forme et de position, tandis que ds est un élément d'une courbe fermée variable. Nous pourrons écrire

$$\delta \left\{ \int\!\!\int \mathrm{M}[r, (r, ds), (r, dl), e] \right\} ds\, dl$$
$$= \int \left\{ \delta \int \mathrm{M}[r, (r, ds), (r, dl), e]\, ds \right\} dl.$$

D'après l'égalité (2), le second membre peut s'écrire

$$\int \delta \left\{ \frac{\partial}{\partial l} \int \sigma[r, \cos(r, ds)]\, ds \right\} dl,$$

ou bien encore

$$\int \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \delta \int \sigma[r, \cos(r, ds)] \, ds \right\} dl.$$

Mais

$$\delta \int \sigma[r, \cos(r, ds)] \, ds$$

étant, comme nous venons de le voir, une fonction uniforme de la position du point M sur la courbe fermée à laquelle appartient l'élément dl, on a

$$\int \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \delta \int \sigma[r, \cos(r, ds)] \, ds \right\} dl = 0.$$

Nous arrivons donc au résultat suivant :

Si dl désigne un élément d'une courbe fermée quelconque, mais invariable, et ds un élément d'une courbe fermée quelconque, susceptible de toutes les variations qui n'exigent pas la rupture de la première courbe fermée, on a

$$\delta \int \int \mathrm{M}[r, (r, ds), (r, dl), e] \, ds \, dl = 0, \tag{3}$$

les intégrations s'étendant aux deux courbes fermées.

Nous avons vu, au Chapitre précédent, que la fonction

$$\mathrm{M}[r, (r, ds), (r, dl), e]$$

était une fonction uniforme des variables x, y, z, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et qu'elle était linéaire et homogène par rapport aux trois dernières. Nous pouvons donc poser

$$\int \mathrm{M}[r, (r, ds), (r, dl), e] \, dl = \mathrm{U}\frac{dx}{ds} + \mathrm{V}\frac{dy}{ds} + \mathrm{W}\frac{dz}{ds},$$

les trois fonctions U, V, W étant des fonctions uniformes de x, y, z, et ne dépendant pas de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

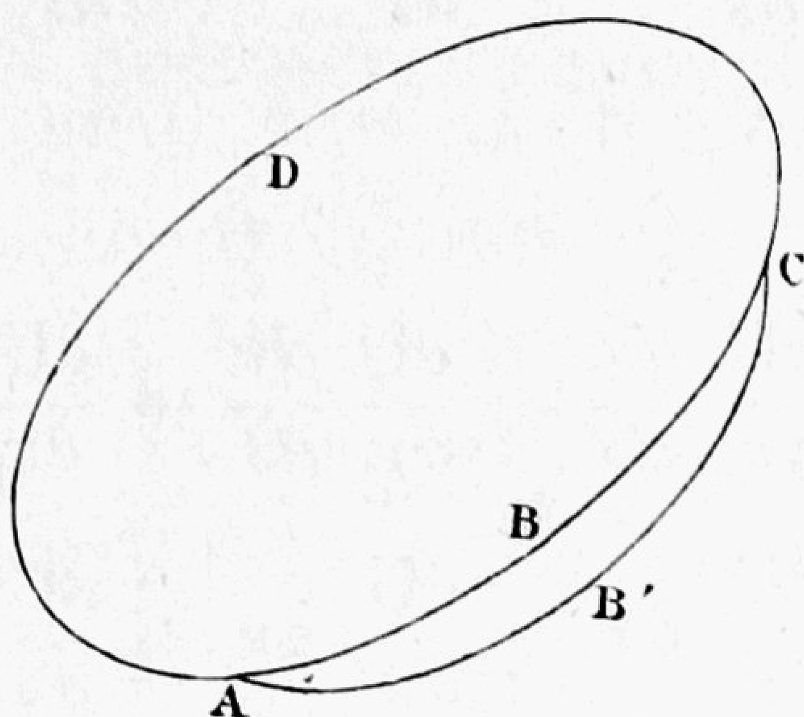
La condition (3) prendra alors la forme suivante :

Si la ligne fermée s se déforme d'une manière quelconque sans venir couper la ligne l, on aura

$$\delta \int \left(\mathrm{U}\frac{dx}{ds} + \mathrm{V}\frac{dy}{ds} + \mathrm{W}\frac{dz}{ds} \right) ds = 0.$$

Sur la courbe s (*fig.* 61), prenons deux points quelconques, A, C, et déformons l'arc ABC de manière à l'amener dans la position voisine AB′C sans rencontrer la courbe l.

Fig. 61.



Nous aurons à exprimer que l'on a

$$\delta \int_A^C \left(U \frac{dx}{ds} + V \frac{dy}{ds} + W \frac{dz}{ds} \right) ds = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \delta \int_A^C \left(U \frac{dx}{ds} + V \frac{dy}{ds} + W \frac{dz}{ds} \right) ds \\ = \int_A^C \left(\frac{dx}{ds} \delta U + \frac{dy}{ds} \delta V + \frac{dz}{ds} \delta W \right) ds \\ + \int_A^C (U \,\delta\, dx + V \,\delta\, dy + W \,\delta\, dz)\end{aligned}$$

Mais nous avons

$$\begin{aligned} \int_A^C (U \,\delta\, dx + V \,\delta\, dy + W \,\delta\, dz) \\ = \int_A^C \left(U \frac{d}{ds} \delta x + V \frac{d}{ds} \delta y + W \frac{d}{ds} \delta z \right) ds \\ = (U \,\delta x + V \,\delta y + W \,\delta z)_A^C \\ - \int_A^C \left(\delta x \frac{dU}{ds} + \delta y \frac{dV}{ds} + \delta z \frac{dW}{ds} \right) ds.\end{aligned}$$

Nous avons d'ailleurs, au point A comme au point C,

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0.$$

Notre condition devient donc

$$\int_A^C \left(\frac{dx}{ds}\,\delta U + \frac{dy}{ds}\,\delta V + \frac{dz}{ds}\,\delta W\right) ds$$

$$-\int_A^C \left(\delta x\,\frac{dU}{ds} + \delta y\,\frac{dV}{ds} + \delta z\,\frac{dW}{ds}\right) ds = 0.$$

Mais nous avons aussi

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\delta z,$$

et deux autres égalités analogues pour chacune des fonctions V et W. Si nous tenons compte de ces relations, nous trouvons aisément que l'égalité précédente devient

$$\int_A^C \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{dz}{ds} - \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{dy}{ds}\right]\delta x\, ds$$

$$+\int_A^C \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{dz}{ds}\right]\delta y\, ds$$

$$+\int_A^C \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{dx}{ds}\right]\delta z\, ds = 0.$$

Les trois quantités δx, δy, δz sont trois fonctions arbitraires de s. Elles sont assujetties seulement aux conditions suivantes :

1° Pour les points A et C, on a

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0;$$

2° Dans le déplacement qui a pour composantes δx, δy, δz, l'élément ds ne rencontre pas la courbe l.

L'égalité précédente ne saurait donc avoir lieu si l'on n'avait, en chaque point qui n'appartient pas à la courbe l,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{dz}{ds} - \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{dy}{ds} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{dx}{ds} = 0.$$

Les quantités entre parenthèses ne dépendent pas de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.
Dès lors, si nous faisons

$$\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \frac{dy}{ds} = 0, \qquad \frac{dz}{ds} = 1,$$

nous obtenons les deux premières égalités

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

La troisième s'établit d'une manière analogue.

Ainsi l'on a

$$ds \int M[r, (r, ds), (r, dl), e]\, dl = U\, dx + V\, dy + W\, dz,$$

U, V, W étant dans tout l'espace, sauf aux points infiniment voisins de la courbe l, des fonctions finies, continues et uniformes de x, y, z, qui vérifient les égalités (4). Nous savons alors, d'après une proposition indiquée dans l'Introduction (p. 65), que l'on a

$$\int M[r, (r, ds), (r, dl), e]\, dl = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \int \Delta\, dl + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

$\mathfrak{H}$ étant une constante, Δ étant défini par l'égalité

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} \dfrac{x-\xi}{r} & \dfrac{y-\eta}{r} & \dfrac{z-\zeta}{r} \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ \dfrac{d\xi}{dl} & \dfrac{d\eta}{dl} & \dfrac{d\zeta}{dl} \end{vmatrix},$$

et $\mathfrak{P}$ étant une fonction finie, continue et uniforme des coordonnées d'un point de l'élément ds.

Posons

$$M[r, (r, ds), (r, dl), e] = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \Delta + \varphi,$$

et voyons ce que nous savons de la fonction φ.

1° La fonction φ, comme les deux fonctions M et Δ, est une fonction uniforme des quantités

$$r, \quad (r, ds), \quad (r, dl), \quad e;$$

il en résulte qu'elle est aussi fonction uniforme de

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & z, \\ \xi, & \eta, & \zeta, \\ \dfrac{dx}{ds}, & \dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dz}{ds}, \\ \dfrac{d\xi}{dl}, & \dfrac{d\eta}{dl}, & \dfrac{d\zeta}{dl}, \end{array}$$

2° La fonction φ, comme les deux fonctions M et Δ, est une fonction linéaire et homogène de

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

et aussi une fonction linéaire et homogène de

$$\frac{d\xi}{dl}, \quad \frac{d\eta}{dl}, \quad \frac{d\zeta}{dl}.$$

3° On a

$$\int \varphi\, dl = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

l'intégrale s'étendant à un circuit fermé quelconque; en d'autres termes, l'intégrale

$$\int\int \varphi\, dl\, ds,$$

étendue à deux circuits fermés quelconques, est égale à o.

Pour achever de déterminer la forme de la fonction φ, il nous est nécessaire de faire usage de l'hypothèse suivante :

La fonction ne dépend de la position relative des deux éléments ds et dl que par les paramètres

$$r, \ (r, ds), \ (r, dl), \ (ds, dl);$$

elle en est une fonction uniforme.

Nous avons fait une hypothèse analogue (*voir* p. 71) sur les fonctions semblables à M ou à φ que nous avons eu à considérer

en Électrodynamique. En Électromagnétisme, nous n'avons pas fait une semblable hypothèse sur la fonction M. Il est aisé de voir que cette hypothèse ne saurait être exacte à la fois pour la fonction M et pour la fonction φ. En effet, si elle est exacte pour la fonction φ, on a

$$M = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\Delta + \varphi[r, \cos(r, ds), \cos(r, dl), \cos(ds, dl)].$$

On a d'ailleurs [Introduction, Chap. III, égalité (8)],

$$\Delta = -\frac{\sin(r, ds)\sin(r, dl)\sin e}{r^2},$$

et aussi [Introduction, Chap. I, égalité (8)],

$$\cos(ds, dl) = \cos(r, ds)\cos(r, dl) + \sin(r, ds)\sin(r, dl)\cos\varepsilon.$$

Mais

$$\sin e = \sqrt{1 - \cos^2\varepsilon}.$$

On voit donc que M ne peut être fonction uniforme de r, (r, ds), (r, dl), (ds, dl).

Une fois que l'hypothèse précédente est admise pour la fonction φ, la détermination de cette fonction s'achève par le raisonnement qui nous a servi à démontrer le théorème de M. H. von Helmholtz (Livre XIV, Chap. IX, § 5). Si nous désignons par $F(r)$ une fonction uniforme de la variable r, nous aurons

$$\varphi = \frac{\partial^2 F(r)}{\partial s\, \partial l}$$

et

$$M = \frac{\mathfrak{H}\Delta}{4\pi} + \frac{\partial^2 F(r)}{\partial s\, \partial l}.$$

Lorsque nous aurons à calculer

$$\int M\, ds$$

pour un conducteur fermé, le terme

$$\int \frac{\partial^2 F(r)}{\partial s\, \partial l}\, ds$$

donnera un résultat égal à o. On peut donc supprimer ce terme,

écrire

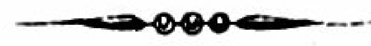
$$M = \frac{\mathfrak{H}\Delta}{4\pi}$$

et énoncer le résultat suivant :

Lorsque l'on veut avoir la somme des forces électromotrices $\sum \mathfrak{E}$ *induites par un élément magnétique dans un conducteur fermé, ce qui suffit à la détermination du courant induit dans le cas où l'on est assuré qu'il est uniforme, il suffit d'écrire l'égalité*

$$(6) \qquad dt \sum \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \delta\left(\mathfrak{M}\, dv \int \Delta\, ds\right).$$

Nous allons faire usage de cette égalité au Chapitre suivant.



CHAPITRE III.

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LES COURANTS FERMÉS ET UNIFORMES (suite). — INDUCTION PAR LA TERRE.

§ 1. — Théorèmes généraux.

Nous venons de voir que, si l'on désignait par $\mathcal{E}$ la force électromotrice d'induction engendrée par un élément magnétique de moment magnétique $\mathfrak{M}\, dv$, situé au point (ξ, η, ζ), on avait

$$(1) \qquad \mathcal{E}\, dt = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \delta \left(\mathfrak{M}\, dv \int \Delta\, ds \right),$$

$\mathfrak{H}$ étant une constante et Δ étant défini par l'égalité

$$(2) \qquad \Delta = \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} x-\xi & y-\eta & z-\zeta \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ \dfrac{d\xi}{dl} & \dfrac{d\eta}{dl} & \dfrac{d\zeta}{dl} \end{vmatrix}.$$

On peut donner à cette égalité (1) plusieurs formes qui nous seront utiles par la suite.

Soient A, B, C les composantes de la directrice d'Ampère pour le conducteur considéré au point (ξ, η, ζ). Nous aurons [Livre XIV, Chap. XI, égalité (2)]

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \int \frac{1}{r^3} \left[(y-\eta) \frac{dz}{ds} - (z-\zeta) \frac{dy}{ds} \right] ds, \\ B &= \int \frac{1}{r^3} \left[(z-\zeta) \frac{dx}{ds} - (x-\xi) \frac{dz}{ds} \right] ds, \\ C &= \int \frac{1}{r^3} \left[(x-\xi) \frac{dy}{ds} - (y-\eta) \frac{dx}{ds} \right] ds, \end{aligned} \right.$$

et l'égalité (2) donnera aisément

$$\int \Delta\, ds = A \frac{d\xi}{dl} + B \frac{d\eta}{dl} + C \frac{d\zeta}{dl}.$$

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation au point (ξ, η, ζ) de l'élément dv. On aura

$$\mathcal{A} = \mathfrak{M}\frac{d\xi}{dl}, \qquad \mathcal{B} = \mathfrak{M}\frac{d\eta}{dl}, \qquad \mathcal{C} = \mathfrak{M}\frac{d\xi}{dl},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathfrak{M}\,dv\int\Delta\,ds = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}(A\mathcal{A} + B\mathcal{B} + C\mathcal{C})\,dv, \tag{4}$$

en sorte que l'égalité (1) peut s'écrire

$$\mathcal{E}\,dt = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\delta[(\mathcal{A}A + \mathcal{B}B + \mathcal{C}C)\,dv]. \tag{5}$$

Par le conducteur que parcourt le courant, faisons passer une aire à deux côtés; soit $d\Omega'$ un élément de cette aire; soit N la normale à la face positive de l'élément $d\Omega$. Nous aurons (Introduction, Chap. III),

$$\int\Delta\,ds = \frac{\partial}{\partial l}\mathbf{S}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N}\,d\Omega'.$$

Nous pourrons donc écrire

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathfrak{M}\,dv\int\Delta\,ds = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathbf{S}\frac{\partial}{\partial N}\left(\mathfrak{M}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial l}\,dv\right)d\Omega'.$$

Supposons que $\mathcal{V}$ soit la fonction potentielle magnétique de l'élément dv au point où se trouve l'élément $d\Omega$, et l'égalité précédente nous donnera

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathfrak{M}\,dv\int\Delta\,ds = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathbf{S}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N}\,d\Omega'. \tag{6}$$

Cette expression s'étend immédiatement au cas où l'on considère non plus seulement un élément magnétique, mais un aimant tout entier. Dans ce cas, on a

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\sum\mathfrak{M}\,dv\int\Delta\,ds = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathbf{S}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N}\,d\Omega', \tag{6 bis}$$

$\mathcal{V}$ désignant la fonction potentielle de l'aimant tout entier.

La force électromotrice d'induction engendrée par un aimant

dans un circuit fermé a pour valeur

$$(7) \qquad \mathcal{E}\, dt = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \delta \int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N}\, d\Omega'.$$

Cette expression de la force électromotrice d'induction va mettre en évidence un fait important.

Imaginons qu'autour de l'axe dl de l'élément magnétique dv nous tracions un petit cercle d'aire Ω dont le plan soit normal à dl, et dont dl forme la normale positive. Faisons parcourir ce cercle par un courant d'intensité telle que

$$\mathfrak{M}\, dv = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J\, \Omega.$$

L'élément magnétique dv pourra alors être regardé comme un feuillet magnétique élémentaire équivalent, au sens que nous avons donné à ce mot en Électrodynamique, au petit courant. $\mathcal{V}$ pourra, comme nous l'avons fait en Électrodynamique, être nommé la *fonction potentielle* de ce petit courant.

Ce petit courant engendre, dans le conducteur fermé que nous considérons, une force électromotrice d'induction $\mathcal{E}'$, et l'on a [Livre XIII, Chap. VI, égalité (9)]

$$(8) \qquad \mathcal{E}'\, dt = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \delta \int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N}\, d\Omega.$$

En comparant les égalités (7) et (8), on trouve

$$(9) \qquad \mathcal{E} = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}} \mathcal{E}';$$

d'où le théorème suivant :

Pour déterminer la force électromotrice d'induction qu'un élément magnétique dv engendre dans un circuit fermé C, on remplace l'élément dv par le petit courant C' qui lui est équivalent au sens électrodynamique du mot. On détermine la force électromotrice engendrée par ce petit circuit dans le circuit C, et l'on multiplie cette dernière par la quantité

$$\frac{-\sqrt{2}}{4\pi} \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}.$$

Les deux forces électromotrices en question sont de même sens

ou de sens contraire, selon que la constante $\mathfrak{H}$ *est négative ou positive.*

Ce théorème ramène l'étude de l'Induction électromagnétique à l'étude de l'Induction électrodynamique, et, par conséquent, nous dispense de plus longs développements. Nous nous contenterons d'indiquer une dernière forme de la loi de l'Induction électromagnétique, forme qui s'applique seulement au cas où l'aimant inducteur est invariable de forme, de position et d'aimantation.

Si l'élément $\mathfrak{M}\, dv$ est invariable de forme, de position et d'aimantation, on pourra supposer que le courant équivalent C′ est invariable de forme, de position et d'intensité. Dès lors, si $d\mathfrak{T}$ est le travail effectué pendant le temps dt par les actions du courant C′ sur le conducteur C traversé par un courant égal à l'unité, nous aurons

$$\mathcal{E}'\, dt = -\, d\mathfrak{T}'.$$

Or, d'après les formules (5 *bis*) (Livre XIV, Chap. XI), le courant C′ exerce sur chaque élément ds du courant C une force dont les composantes sont

$$X = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} J\Omega \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

$$Y = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} J\Omega \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dx}{ds}\right) ds,$$

$$Z = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} J\Omega \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right) ds.$$

On a donc

$$\mathcal{E}'\, dt + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J\Omega \frac{\partial}{\partial l}\int\left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dx}{ds}\right)\delta y + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right)\delta z\right] ds,$$

δx, δy, δz étant les composantes du déplacement d'un point de

l'élément ds. On déduit de là

$$\mathcal{E}\, dt = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\, \mathfrak{M}\, dv\, \frac{\partial}{\partial l} \int \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dz}{ds} \right) \delta x + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dz}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dx}{ds} \right) \delta y + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) \delta z \right] ds,$$

ou bien encore

$$\mathcal{E}\, dt = -\, d\mathfrak{T}, \tag{10}$$

$d\mathfrak{T}$ désignant le travail accompli dans le déplacement du circuit C, en supposant chacun des éléments du circuit C soumis à une force ayant pour composantes

$$\text{(11)} \quad \begin{cases} X = \dfrac{\mathfrak{H}}{4\pi}\, \mathfrak{M}\, dv\, \dfrac{\partial}{\partial l} \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \dfrac{dy}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \dfrac{dz}{ds} \right) ds, \\[2ex] Y = \dfrac{\mathfrak{H}}{4\pi}\, \mathfrak{M}\, dv\, \dfrac{\partial}{\partial l} \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \dfrac{dz}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \dfrac{dx}{ds} \right) ds, \\[2ex] Z = \dfrac{\mathfrak{H}}{4\pi}\, \mathfrak{M}\, dv\, \dfrac{\partial}{\partial l} \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \dfrac{dx}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \dfrac{dy}{ds} \right) ds. \end{cases}$$

On peut remplacer l'action de l'élément $\mathfrak{M}\, dv$ par l'action de deux masses : l'une de fluide austral, l'autre de fluide boréal, ayant pour commune valeur μ, et situées à une distance dl l'une de l'autre, sur la direction de l'axe magnétique.

Les forces précédentes se trouveront alors remplacées par des forces exercées par chaque masse magnétique $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ sur chaque élément $ds(x, y, z)$ du conducteur C, forces dont chacune aura pour composantes

$$\text{(12)} \quad \begin{cases} X = \dfrac{\mathfrak{H}}{4\pi}\, \mu\, \dfrac{1}{r^3} \left[(y - \eta) \dfrac{dz}{ds} - (z - \zeta) \dfrac{dy}{ds} \right] ds, \\[2ex] Y = \dfrac{\mathfrak{H}}{4\pi}\, \mu\, \dfrac{1}{r^3} \left[(z - \zeta) \dfrac{dx}{ds} - (x - \xi) \dfrac{dz}{ds} \right] ds, \\[2ex] Z = \dfrac{\mathfrak{H}}{4\pi}\, \mu\, \dfrac{1}{r^3} \left[(x - \xi) \dfrac{dy}{ds} - (y - \eta) \dfrac{dx}{ds} \right] ds. \end{cases}$$

Si l'on compare ces égalités (12) à celles qui donnent les composantes de l'action exercée par un pôle de solénoïde, de puissance μ, sur l'élément ds parcouru par un courant égal à l'unité, on voit que les premières sont égales respectivement aux produits des dernières par

$$-\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}.$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Pour déterminer la force électromotrice d'induction engendrée par un aimant immobile de forme, de position et d'aimantation sur un conducteur fermé qui se déforme et se déplace, on imagine que chaque masse magnétique μ *de l'aimant exerce sur chaque élément* ds *du conducteur une force ayant pour grandeur*

$$F = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu\frac{\sin(r, ds)}{r^2}ds, \tag{13}$$

et dirigée comme l'action d'un pôle de solénoïde sur un élément de courant; on calcule le travail produit par ces forces dans le déplacement élémentaire du conducteur; on divise ce travail par la durée du déplacement, et l'on change le signe du quotient.

Nous avons déjà eu occasion de faire usage des diverses propositions indiquées dans ce paragraphe, en examinant les diverses méthodes fondées sur l'Induction pour l'étude de la distribution du magnétisme (Livre VII, Chap. IV, § 3).

Il s'agissait alors de phénomènes d'induction par déplacement de l'induit. Nous aurons occasion, dans le présent Livre (Chap. VII) d'étudier un exemple d'induction par variation d'aimantation. Nous allons indiquer une dernière application de la formule (7), en étudiant un phénomène découvert par Faraday [1] et dont Weber [2] a fait un magnifique usage; nous voulons parler de l'induction engendrée par la Terre dans un conducteur mobile.

---

[1] FARADAY, *Experimental Researches in Electricity*, 2e série, § 171 à § 180; 1832.

[2] W. WEBER, *Ueber die Anwendung der magnetischen Induction zur Messung der Inclination mit dem Magnetometer* (Göttingen, *Abhandlungen*, t. V, p. 3; 1851).

§ 2. — Induction par la Terre.

Cherchons la force électromotrice d'induction engendrée par la Terre dans un conducteur plan.

Si nous désignons par $\mathfrak{V}$ la fonction potentielle magnétique de l'action terrestre, par $d\Omega$ un élément du plan du cadre, par N la normale positive au plan du cadre, cette force électromotrice est donnée par la formule

$$\mathcal{E}\, dt = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\, \delta \,\mathbf{S}\, \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N}\, d\Omega. \tag{7}$$

Or on a

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \cos(N, y) + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \cos(N, z).$$

Si F est la force magnétique terrestre,

$$F \cos(F, x) = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x},$$

$$F \cos(F, y) = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y},$$

$$F \cos(F, z) = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}.$$

On a donc, en désignant par Ω l'aire du cadre,

$$\mathcal{E}\, dt = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} F \Omega \delta \cos(F, N),$$

ou bien, en désignant par R la résistance du cadre, et par dQ la quantité d'électricité que l'induction transporte dans le cadre pendant le temps dt

$$dQ = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \frac{F\Omega}{R} \delta \cos(F, N). \tag{14}$$

Soit i l'inclinaison magnétique; nous aurons

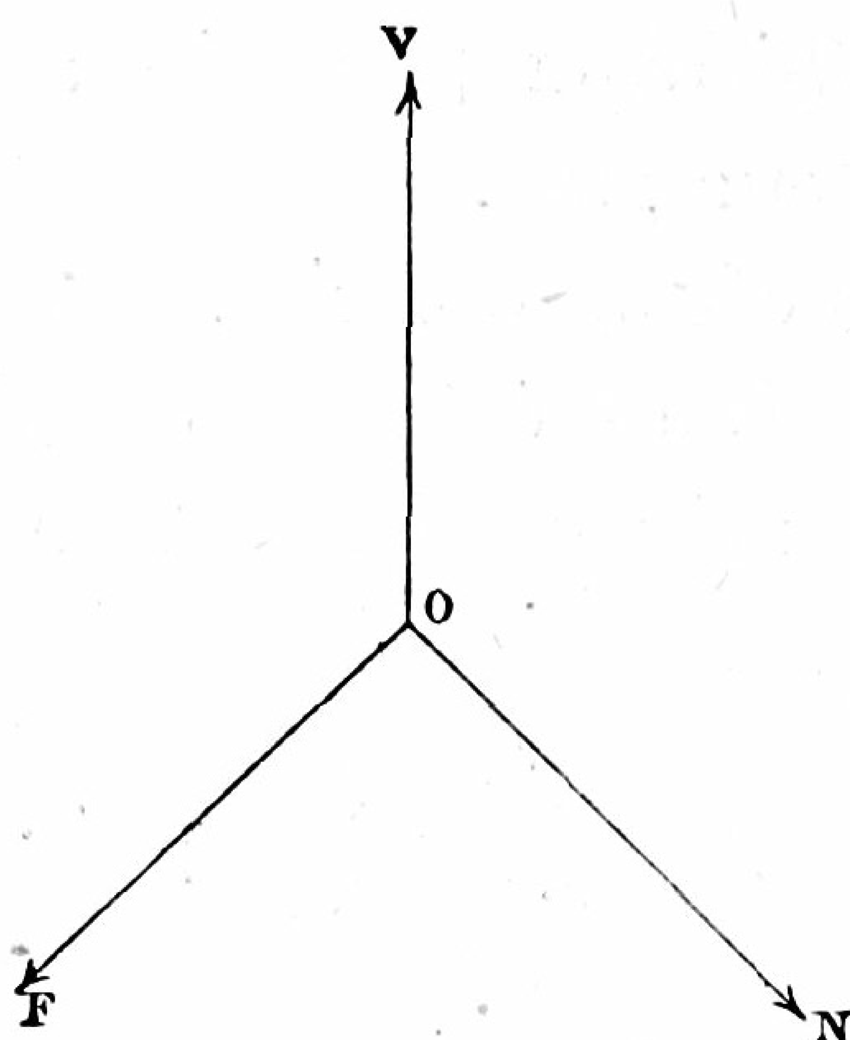
$$H = F \cos i,$$

H étant la composante horizontale de l'action magnétique terrestre.

Soient V la verticale dirigée vers le haut (*fig.* 61), θ l'angle, inférieur à π, du demi-plan vertical passant par N et limité au

cadre, avec le demi-plan formé par la partie nord VOF du méridien magnétique.

Fig. 62.



Dans le trièdre OVNF, nous aurons

$$\cos(F,V) = -\sin i, \qquad \sin(F,V) = \cos i,$$
$$\cos NV = \cos\theta$$

et, par conséquent,

$$\cos(F,N) = -\sin i \cos(N,V) + \cos i \sin(N,V)\cos\theta.$$

L'égalité (14) peut donc encore s'écrire

$$(15) \qquad dQ = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{H\Omega}{R}[\delta\sin(N,V)\cos\theta - \tang i\,\delta\cos(N,V)].$$

Faisons quelques applications des formules (14) et (15) au cas où le cadre tourne autour d'un axe situé dans son plan.

Supposons tout d'abord que *l'axe coïncide en direction avec l'action magnétique terrestre;* nous aurons constamment

$$\cos(F,N) = 0,$$
$$\delta\cos(F,N) = 0.$$

La formule (14) nous montre alors qu'aucune induction ne se produira dans le cadre.

Supposons, en second lieu, que *l'axe de rotation soit vertical;* nous aurons constamment

$$\sin(N,V) = 1, \qquad \delta\sin(N,V) = 0,$$
$$\cos(N,V) = 0, \qquad \delta\cos(N,V) = 0.$$

La formule (15) nous donnera

$$dQ = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{H\Omega}{R}\delta\cos\theta.$$

Supposons que le plan du cadre soit d'abord perpendiculaire au plan du méridien magnétique, l'action magnétique terrestre étant dirigée du côté positif. La valeur initiale de θ sera o. Faisons tourner le cadre d'un angle droit. La valeur finale de θ sera $\frac{\pi}{2}$.

L'induction mettra donc en mouvement une quantité totale d'électricité

$$Q_1 = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{H\Omega}{R}. \tag{16}$$

Supposons que *l'axe de rotation soit horizontal et perpendiculaire au plan du méridien magnétique;* on a alors constamment

$$\cos\theta = 1, \qquad \delta\cos\theta = 0.$$

Supposons que le plan du cadre soit d'abord vertical, la normale à la face positive étant dirigée comme l'aiguille de déclinaison; nous aurons

$$\cos(N, V) = \cos i, \qquad \sin(N, V) = \sin i.$$

Faisons tourner le cadre d'un angle droit, de manière que la normale à la face positive se dirige vers le zénith; nous aurons

$$\cos(N, V) = 1, \qquad \sin(N, V) = 0.$$

Durant ce mouvement du cadre, l'induction aura déplacé une quantité d'électricité

$$Q_2 = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{H\Omega}{R}\operatorname{tang} i. \tag{17}$$

Supposons enfin que *l'axe de rotation soit horizontal et situé dans le plan du méridien magnétique;* on a alors constamment

$$\cos\theta = 0, \qquad \delta\cos\theta = 0.$$

Supposons le plan du cadre d'abord vertical. La valeur initiale de cos(N, V) est o. Nous faisons tourner le cadre d'un angle droit, de manière que la normale à la face positive se dirige vers le zénith.

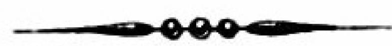
La valeur finale de cos(N, V) est 1. L'induction met donc en mouvement une quantité d'électricité

$$Q_3 = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \frac{H\Omega}{R} \operatorname{tang} i. \tag{18}$$

Nous remarquerons que

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_3}{Q_1} = \operatorname{tang} i. \tag{19}$$

L'emploi du galvanomètre balistique permet de déterminer les rapports $\frac{Q_2}{Q_1}$ ou $\frac{Q_3}{Q_1}$; d'où une méthode très précise pour déterminer l'inclinaison magnétique.



CHAPITRE IV.

ÉNERGIE INTERNE D'UN SYSTEME QUI RENFERME DES COURANTS UNIFORMES ET DES AIMANTS. — EXTENSION DE LA LOI DE JOULE.

§ 1. — Énergie interne d'un système qui renferme des courants uniformes et des aimants.

Considérons un système qui admet un potentiel thermodynamique $\mathcal{F}$. Supposons les paramètres qui définissent l'état du système choisis de telle sorte que, lorsque la température T varie seule, les forces extérieures n'effectuent aucun travail. Soit E l'équivalent mécanique de la chaleur. L'énergie interne U de ce système est donnée par la relation [Livre IV, Chap. I, égalité (10)]

$$EU = \mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}. \tag{1}$$

Nous avons trouvé [Livre IX, Chap. I, § 2] l'expression du potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des aimants et des charges électriques immobiles, mais pas de courants. Cette expression est la suivante

$$\mathcal{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + \mathfrak{J} + W + \sum \Theta q + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M})\, dv. \tag{2}$$

Dans cette expression,

Υ et Σ sont l'énergie interne et l'entropie du système ramené à l'état neutre électrique et à l'état neutre magnétique;

$\mathfrak{J}$ est le potentiel magnétique;

W est le potentiel électrostatique;

q est la charge électrique en un point de l'élément de volume dv;

$\mathfrak{M}$ est l'intensité d'aimantation au même point;

Θ est une quantité qui dépend de la nature de la matière autour de ce point et de la température;

$\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ est une fonction de $\mathfrak{M}$ qui dépend aussi de la nature de la matière au point auquel elle se rapporte et de la température.

L'énergie interne du système en question a une valeur U, qui, d'après l'égalité (1), est donnée par la relation

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{EU} &= \mathrm{E}\Upsilon + \mathcal{J} + \mathrm{W} + \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q \\ &+ \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}}\right] dv. \end{aligned} \right.$$

L'expression, donnée par cette égalité (3), de l'énergie interne d'un système qui ne renferme pas de courants ne peut évidemment pas être prise comme expression de l'énergie interne d'un système qui renferme des courants. Toutefois, nous conserverons cette hypothèse, déjà faite au Livre XIV, Chapitre I, pour les systèmes qui ne renferment pas d'aimants : *La variation d'énergie interne d'un système qui renferme des courants est égale à la variation de la quantité* U *calculée par la formule précédente, toutes les fois que les conducteurs traversés par les courants demeurent immobiles et que le flux électrique qui traverse chaque élément de ce conducteur demeure invariable de grandeur et de direction;* hypothèse à laquelle nous ajouterons maintenant la restriction suivante : *Les aimants du système doivent demeurer invariables de forme et de position, et l'intensité d'aimantation en chacun de leurs points doit demeurer invariable de grandeur et de direction.*

L'énergie interne d'un système renfermant des courants est donnée par l'égalité suivante

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{EU} &= \mathrm{E}\Upsilon + \mathcal{J} + \mathrm{W} + \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q \\ &+ \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}}\right] dv + \mathrm{EU}', \end{aligned} \right.$$

la quantité U' devenant égale à o lorsque les intensités de tous les courants tombent à o.

L'hypothèse que nous venons d'indiquer permettra, en reproduisant un raisonnement déjà employé au Livre XIV, Chapitre I, de démontrer la proposition suivante :

La quantité U' *dépend uniquement de la forme et de la po-*

sition des conducteurs qui constituent le système; des intensités des courants qui les traversent; de la forme et de la position des aimants; de la grandeur et de la direction de l'aimantation en chaque point.

Cette proposition démontrée, nous ferons sur la quantité U' l'hypothèse suivante :

La quantité EU' *est de la forme*

$$EU' = \sum \Phi(ds, ds') + \sum \Psi(ds, dv), \tag{5}$$

ds et ds' étant deux quelconques des éléments des conducteurs qui composent le système; Φ *une quantité qui dépend de la position mutuelle des deux éléments ds et ds', des intensités* J *et* J' *des courants qui circulent dans ces éléments, et le premier signe* $\sum$ *indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes que l'on peut former avec les éléments des divers conducteurs du système pris deux à deux;*

dv étant un élément de volume d'un aimant; Ψ *une quantité qui dépend de la forme et de la position mutuelle des deux éléments ds, dv; de l'intensité* J *du courant qui traverse l'élément ds; de l'intensité d'aimantation en un point de l'élément dv; de la direction de cette aimantation; et le second signe* $\sum$ *indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons que l'on peut former en prenant un élément conducteur et un élément magnétique.*

La forme de la quantité Φ a été déterminée au Livre XIV, Chapitres I, II. Nous avons vu que l'on avait

$$\Phi(ds, ds') = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right] JJ'\,ds\,ds'. \tag{6}$$

Il nous reste à déterminer la forme de la quantité $\Psi(ds, dv)$.

Par des raisonnements analogues à ceux que nous avons employés au Chapitre I du présent Livre, on prouvera aisément que l'on a

$$\Psi(ds, dv) = \psi[r, (r, ds), (r, dl), e]\, J\, ds\, \mathfrak{M}\, dv, \tag{7}$$

dl étant la direction de l'axe magnétique de l'élément dv et $\mathfrak{M}$ l'intensité d'aimantation de cet élément.

Nous ferons ensuite l'hypothèse que, *dans le calcul de l'énergie interne d'un système qui renferme seulement des courants fermés et uniformes, un élément magnétique équivaut à deux masses magnétiques situées en ses deux pôles,* le sens précis de cette hypothèse étant indiqué par ce qui a été dit au Chapitre II.

Des hypothèses et des raisonnements analogues à ceux qui ont été employés au Chapitre II nous donneront alors le résultat suivant

$$\psi[r, (r, ds), (r, dl), e] = \frac{\mathfrak{H}'}{4\pi}\Delta + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial s\, \partial l}, \tag{8}$$

$\mathfrak{H}'$ étant une constante, et $f(r)$ une fonction uniforme et continue de la variable r.

Ce résultat achève de déterminer la forme de l'énergie interne d'un système qui renferme des courants fermés et uniformes. Dans ce cas, en effet, on peut écrire, d'après l'égalité (8),

$$\sum \Psi(ds, dv) = \frac{\mathfrak{H}'}{4\pi} \sum \mathfrak{M}\, dv\, \mathrm{J} \int_{\mathrm{C}} \Delta\, ds. \tag{9}$$

Le signe $\sum$ qui figure au second membre de cette égalité indique une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes que l'on peut former en prenant un élément magnétique dv avec un conducteur fermé C.

L'ensemble des égalités (4), (5), (6) et (9) nous donne le résultat que nous voulions obtenir, à savoir l'expression de l'énergie interne d'un système qui renferme des aimants et des courants linéaires fermés et uniformes. Cette énergie U est donnée par l'égalité suivante

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{EU} = {} & \mathrm{E}\Upsilon + \mathrm{W} + \mathfrak{T} + \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q \\ & + \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial\, \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}}\right] dv \\ & + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \sum \left(\frac{1-\lambda}{r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right) \mathrm{JJ}'\, ds\, ds' \\ & + \frac{\mathfrak{H}'}{4\pi} \sum \mathfrak{M}\, dv\, \mathrm{J} \int \Delta\, ds. \end{aligned} \right.$$

L'extension des divers signes de sommation que renferme cette formule a été précisée au cours du présent paragraphe.

§ 2. — Extension de la loi de Joule à un système qui renferme des aimants.

Nous avons vu que, dans un système qui ne renferme pas d'aimants, la quantité de chaleur dQ dégagée pendant le temps dt était donnée par l'égalité suivante

$$\text{(11)} \qquad E\,dQ = \sum \left(\mathcal{E} - T \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right) J\,dt,$$

$\mathcal{E}$ étant une des forces électromotrices que renferme le système et J l'intensité du courant dans l'élément, siège de cette force électromotrice. C'est à cette égalité que nous sommes convenus (Livre VI, Chap. II, § 1 et Livre XIV, Chap. II) de conserver le nom de *loi de Joule*.

Cette égalité (11) ne peut s'étendre d'une manière générale et sans modification aux systèmes qui renferment des aimants. Nous allons voir qu'en l'appliquant à de semblables systèmes on pourrait être conduit à des conséquences inacceptables.

Imaginons un système qui renferme seulement des aimants et point de conducteur parcouru par des courants. Les aimants de ce système sont immobiles, mais leur aimantation varie. L'égalité (11), appliquée à une modification infiniment petite de ce système donnerait

$$dQ = 0.$$

Mais, d'autre part, on a

$$dQ = -\delta U,$$

ce qui donne, d'après l'égalité (10),

$$\text{(12)} \qquad E\,dQ = -\delta\mathcal{Y} - \delta \int \left[\mathcal{F}(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T} \right] dv.$$

Or on peut s'assurer sur un exemple que la quantité dQ, définie par cette égalité (12), n'est pas égale à o en général.

Supposons, par exemple, le système formé de deux aimants, un aimant permanent 1 et un morceau de fer doux 2. Soient $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ les composantes de l'aimantation en un point (x_2, y_2, z_2) du mor-

ceau de fer doux; soit $\mathcal{V}_1$ la fonction potentielle magnétique de l'aimant permanent; soit $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle magnétique du morceau de fer doux. Nous aurons

$$\delta\mathcal{J} = \int \left\| \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2} \delta\mathcal{A}_2 \right\| dv_2,$$

$$\delta \int \left[\mathcal{F}(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T} \right] dv$$
$$= \int \left[\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, T)}{\partial \mathfrak{M}_2} - T \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, T)}{\partial \mathfrak{M}_2 \, \partial T} \right] \delta\mathfrak{M}_2 \, dv_2.$$

On a, d'ailleurs,

$$\delta\mathfrak{M}_2 = \frac{\mathcal{A}_2 \, \delta\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2 \, \delta\mathcal{B}_2 + \mathcal{C}_2 \, \delta\mathcal{C}_2}{\mathfrak{M}_2}.$$

D'autre part, les équations de l'équilibre magnétique sur le fer doux sont

$$\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, T)}{\partial \mathfrak{M}_2} \mathcal{A}_2 = -\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2},$$
$$\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, T)}{\partial \mathfrak{M}_2} \mathcal{B}_2 = -\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y_2},$$
$$\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, T)}{\partial \mathfrak{M}_2} \mathcal{C}_2 = -\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z_2}.$$

L'égalité (12) devient alors

$$(13) \qquad \mathrm{E}\, dQ = T \frac{\partial}{\partial T} \int \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, T)}{\partial \mathfrak{M}_2} \delta\mathfrak{M}_2 \, dv_2.$$

Sous cette forme, on voit que la quantité dQ n'est pas nulle en général, et, par conséquent, que l'égalité (1) ne peut s'étendre, sans restriction ni modification, aux systèmes qui renferment des aimants.

Nous ferons donc l'hypothèse suivante :

La loi de Joule s'applique à un système qui renferme à la fois des courants électriques et des aimants, pourvu que les aimants gardent tous une aimantation invariable.

Moyennant cette restriction, la loi de Joule ne donne plus lieu aux conséquences contradictoires dont il vient d'être question.

§ 3. — Détermination de la constante $\mathfrak{H}'$.

L'hypothèse que nous venons d'énoncer va nous servir à déterminer la valeur qu'il convient d'attribuer à la constante $\mathfrak{H}'$. Il nous suffira, pour déterminer cette valeur, d'appliquer la loi de Joule à l'exemple suivant :

Un élément magnétique $\mathfrak{M}\, dv$, invariable d'état, de position et d'aimantation, se trouve en présence d'un circuit C, invariable de forme et de position, parcouru par un courant uniforme d'intensité variable J.

La quantité de chaleur dQ que ce système dégage pendant le temps dt peut être calculée en partant de l'expression (10) de l'énergie interne du système. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\, dQ = &- \mathrm{E}\, \delta \Upsilon - \delta \mathrm{W} - \delta \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q \\ &+ p\mathrm{J}\frac{d\mathrm{J}}{dt}dt - \frac{\mathfrak{H}'}{4\pi}\mathfrak{M}\, dv\,\frac{d\mathrm{J}}{dt}dt\int \Delta\, dt, \end{aligned}$$

p étant le coefficient d'induction propre du circuit.

Le courant étant uniforme, la distribution électrique est invariable sur le système. D'ailleurs le système est immobile. On a donc

$$\delta \mathrm{W} = 0,$$
$$\delta q = 0.$$

Comme nous l'avons toujours fait en appliquant la loi de Joule, nous négligeons la quantité

$$\delta\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right).$$

Nous avons donc simplement

$$\mathrm{E}\, dQ = - \mathrm{E}\, \delta \Upsilon + p\mathrm{J}\frac{d\mathrm{J}}{dt}dt - \frac{\mathfrak{H}'}{4\pi}\mathfrak{M}\, dv\,\frac{d\mathrm{J}}{dt}dt\int \Delta\, ds. \tag{14}$$

Le circuit n'est le siège d'aucune force électromotrice d'induction électromagnétique; il est le siège d'une force électromotrice d'induction électrodynamique $\mathcal{E}'$ et d'une force électromotrice hydro-électrique $\mathcal{E}''$.

Si l'on observe que la force $\mathcal{E}'$ ne dépend pas de la température, on voit que l'on a

$$\mathcal{E} - T\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' - T\frac{\partial \mathcal{E}''}{\partial T}.$$

On a d'ailleurs

$$\mathcal{E}' = p\frac{dJ}{dt}.$$

Si l'on néglige $\delta\Theta$, on a

$$J\,dt\left(\mathcal{E}'' - T\frac{\partial \mathcal{E}''}{\partial T}\right) = -E\,\delta\Upsilon.$$

L'égalité (1) donne donc

$$E\,dQ = -E\,\delta\Upsilon + p\frac{dJ}{dt}J\,dt. \tag{15}$$

Si l'on compare les égalités (14) et (15), on trouve

$$\mathfrak{H}' = 0.$$

Cette valeur de la constante $\mathfrak{H}'$, reportée dans l'égalité (10), donne à celle-ci la forme

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} EU = \; & E\Upsilon + W + \mathfrak{F} + \sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q \\ & + \int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T) - T\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right]dv \\ & + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)JJ'\,ds\,ds'. \end{aligned}\right.$$

L'énergie interne d'un système renfermant des courants fermés et uniformes et des aimants ne contient aucun terme dépendant de la situation relative des courants et des aimants; ce qu'on peut énoncer, si l'on veut, de la manière suivante : *Il n'y a pas, dans l'expression de l'énergie interne d'un système qui renferme des courants électriques et des aimants, de terme électromagnétique.*

A l'époque (année scolaire 1889-1890) où nous enseignions cette proposition paradoxale à la Faculté des Sciences de Lille, M. E. Vaschy [1] la publiait de son côté dans son important *Traité d'Électricité et de Magnétisme.*

---

[1] E. Vaschy, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 318 (Paris, 1890).

§ 4. — Comment l'on doit, en Électromagnétisme, définir les corps magnétiques parfaitement doux.

En étudiant l'aimantation par influence (Livre IX, Chap. I et II), nous avons supposé que les corps étudiés faisaient partie d'un système admettant un potentiel thermodynamique interne et nous avons défini les *corps magnétiques parfaitement doux* comme portant à chaque instant une distribution magnétique qui rendît minimum le potentiel thermodynamique interne.

Nous avons vu (Livre XIV, Chap. IV) que la notion de potentiel thermodynamique interne ne saurait s'étendre à un système qui renferme des courants. Nous ne saurions donc, non plus, regarder la définition que nous venons de rappeler comme susceptible de marquer ce qu'il faut entendre par corps magnétique parfaitement doux dans un système qui renferme à la fois des aimants et des courants.

Revenons aux systèmes qui ne renferment pas de courants.

Imaginons qu'un semblable système devienne immobile et que l'aimantation des corps parfaitement doux qu'il renferme subisse seule une variation infiniment petite, tandis que l'aimantation des autres corps demeure invariable. Nous avons vu, au § 2, que, dans ces conditions, le système dégageait une quantité de chaleur dQ donnée par l'égalité

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\int \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\,dv.$$

Cette égalité exprime une propriété générale des corps parfaitement doux, découlant immédiatement de leur définition.

Inversement, cette propriété peut être prise comme une définition nouvelle des corps parfaitement doux dans un système qui ne renferme aucun courant. Nous pouvons dire qu'*un corps magnétique, faisant partie d'un système qui ne renferme aucun courant, est un corps parfaitement doux si toute variation d'aimantation de ce corps engendre dans le système un dégagement de chaleur donné par l'égalité* (13). Nous allons montrer que cette nouvelle définition, que nous savons être une conséquence de la première, entraîne à son tour la première comme conséquence, en sorte qu'elle lui est équivalente.

En effet, si, dans un système qui ne renferme aucun courant, l'aimantation subit une variation quelconque sur un corps quelconque 2, le système est le siège d'un dégagement de chaleur dQ, qui peut se calculer en partant de l'égalité (3), et dont la valeur est donnée par l'égalité

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,dQ = \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\int \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2}\,\delta\mathfrak{M}_2\,dv_2 \\
-\int \Bigg\{ & \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2} + \frac{\mathcal{A}_2}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2}\right]\delta\mathcal{A}_2 \\
& + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y_2} + \frac{\mathcal{B}_2}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2}\right]\delta\mathcal{B}_2 \\
& + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z_2} + \frac{\mathcal{C}_2}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2}\right]\delta\mathcal{C}_2\Bigg\}\,dv_2.
\end{aligned}
$$

Cette égalité ne peut être compatible avec l'égalité (13), quels que soient $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$, que si l'on a, en tout point du corps 2,

$$
(17)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial \mathcal{F}_3(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2}\mathcal{A}_2 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2}, \\
\frac{1}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2}\mathcal{B}_2 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y_2}, \\
\frac{1}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2}\mathcal{C}_2 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Or, ces égalités sont précisément celles qui assurent le minimum du potentiel thermodynamique interne.

Nous sommes donc en possession de deux définitions du mot *corps parfaitement doux*, qui sont équivalentes pour des systèmes qui ne renferment pas de courant. Mais la seconde a sur la première un grand avantage : elle peut s'étendre aux systèmes qui renferment à la fois des courants et des aimants.

On peut toujours, sans hypothèse, écrire la quantité de chaleur que dégage une modification infiniment petite dans un système qui renferme à la fois des courants électriques et des aimants sous la forme

$$
(18)\qquad \mathrm{E}\,dQ = \sum\left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right)\mathrm{J}\,dt + \mathrm{E}\,dQ',
$$

dQ' étant une certaine quantité de chaleur.

Nous avons, au § 2, fait l'*hypothèse* que la quantité dQ' était

égale à o lorsque tous les corps magnétiques du système gardaient une aimantation invariable.

Nous allons maintenant admettre la *définition* suivante :

Nous dirons que les corps sur lesquels l'aimantation a varié, dans un système renfermant des aimants et des courants, sont des corps parfaitement doux, si la quantité de chaleur $d\mathrm{Q}'$ *est donnée par la formule*

$$\mathrm{E}\, d\mathrm{Q}' = \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\int \frac{\partial\, \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}}\, dv. \tag{19}$$

Appliquée aux systèmes qui ne renferment pas de courant, cette définition coïncide avec la seconde des définitions équivalentes que l'on peut, au sein de pareils systèmes, donner des corps magnétiques parfaitement doux.



CHAPITRE V.

CHALEUR DE DÉSAIMANTATION.

L'expression, obtenue au Chapitre IV, de l'énergie interne d'un système qui renferme des aimants et des courants fermés et uniformes nous permet de donner l'explication théorique d'une expérience que plusieurs physiciens ont répétée.

Voici en quoi consiste cette expérience :

Un courant d'une intensité donnée J traverse une bobine qui est placée dans un calorimètre. Après qu'elle y a séjourné un temps court t, on ouvre le circuit.

Le courant s'évanouit. Le calorimètre accuse un dégagement de chaleur qui a pour valeur

$$RJ^2 t + Q,$$

R étant la résistance de la spirale.

On recommence la même expérience, la spirale contenant un morceau de fer doux. On observe un dégagement de chaleur

$$RJ^2 t + Q'.$$

Quel est le sens que l'on doit attribuer à la différence

$$\mathcal{Q} = Q' - Q$$

de ces deux dégagements de chaleur?

Dans chacune de ces deux circonstances, le dégagement de chaleur est la variation changée de signe de l'énergie interne. On trouve donc aisément que l'on a

$$E\mathcal{Q} = -\frac{p}{2} J^2,$$

p étant le coefficient d'induction propre du circuit, et

$$\mathrm{EQ}' = -\frac{p}{2}\mathrm{J}^2 + \mathfrak{Y} + \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathrm{T}} \right] dv,$$

les deux derniers termes se rapportant à l'aimantation prise par le fer doux à l'intérieur de la bobine. On a donc

$$\mathrm{E}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Y} + \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathrm{T}} \right] dv. \tag{1}$$

Le potentiel magnétique $\mathfrak{Y}$ de l'aimant est une quantité essentiellement positive. Il en est de même de la quantité $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$. La quantité $\mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathrm{T}}$ est, pour le fer doux, assez petite par rapport à la précédente. *La quantité $\mathfrak{Q}$ est donc positive.*

Il est extrêmement intéressant d'obtenir une vérification expérimentale précise de la formule (1); en effet, on vérifiera ainsi, d'une manière presque immédiate, que la constante $\mathfrak{H}'$ est égale à 0, et que l'expression de l'énergie interne d'un système de courants et d'aimants ne renferme pas de terme électromagnétique.

Supposons la bobine assez longue; nous verrons au Chapitre VII que le champ électrodynamique, à l'intérieur de cette bobine et à une distance suffisante de ses extrémités, peut être regardé comme sensiblement uniforme; la direction de ce champ est la direction de l'axe de la bobine. Soit $\mathcal{V}$ la fonction potentielle des courants qui forment cette bobine. Nous verrons au Chapitre suivant qu'un morceau de fer doux, placé dans ce champ, s'aimante comme dans un champ magnétique dont la fonction potentielle aurait pour valeur en chaque point

$$-\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\mathcal{V}.$$

Supposons que le fer doux ait la forme d'un ellipsoïde dont l'un des axes, pris pour axe des x, soit dirigé comme le champ.

D'après les lois connues de l'aimantation (Livre IX, Chap. IV), cet ellipsoïde s'aimante uniformément dans la direction même du champ. Soit $\mathfrak{M}$ son intensité d'aimantation; posons

$$\mathrm{F}(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{d\mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{d(\mathfrak{M})}},$$

et nous aurons, comme composantes de son aimantation [*loc. cit.*, égalité (5)],

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\,\dfrac{F(\mathcal{M})}{1+2\lambda F(\mathcal{M})}\,\dfrac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = 0, \qquad \mathcal{C} = 0, \end{cases}$$

λ étant une constante qui dépend de la forme de l'ellipsoïde.

D'ailleurs, si nous désignons par $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de cet ellipsoïde, nous aurons

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)dv,$$

ou bien, en remarquant que les lois de l'aimantation donnent

$$\mathcal{A} = -F(\mathcal{M})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}\right),$$

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2}\int\frac{\mathcal{A}^2}{F(\mathcal{M})}\,dv + \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{8\pi\mathfrak{A}}\int\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}\,dv.$$

Les égalités (2), qui donnent $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, permettent de transformer cette égalité en

$$\mathcal{T} = \frac{2\lambda F(\mathcal{M})}{F(\mathcal{M})}\,\mathcal{M}^2\int dv.$$

Si nous désignons par a, b, c les trois demi-axes de notre ellipsoïde, nous trouverons

$$\int dv = \frac{4}{3}\pi abc$$

et

$$(3)\qquad \mathcal{T} = \frac{8}{3}\pi abc\lambda\mathcal{M}^2.$$

On a aussi

$$(4)\qquad \int\left[\mathcal{F}(\mathcal{M}) - T\frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M})}{\partial T}\right]dv = \frac{4}{3}\pi abc\left[\mathcal{F}(\mathcal{M}) - T\frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M})}{\partial T}\right].$$

En vertu de ces égalités (3) et (4), l'égalité (1) devient

$$(5)\qquad E\mathfrak{Q} = \frac{4}{3}\pi abc\left[2\lambda\mathcal{M}^2 + \mathcal{F}(\mathcal{M}) - T\frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M})}{\partial T}\right].$$

Supposons que, conformément à la théorie de Poisson, on remplace la fonction magnétisante $F(\mathcal{M})$ par un coefficient d'aiman-

tation k indépendant de l'intensité d'aimantation. On aura alors [Livre IX, Chap. II, égalité (27)]

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2k},$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial T} = -\frac{\mathfrak{M}^2}{2k^2}\frac{dk}{dT},$$

et l'égalité (5) deviendra

$$E\mathfrak{Q} = \frac{2}{3}\pi abc\left(4\lambda + \frac{k}{1} - \frac{k^2}{1}\frac{dk}{dT}\right)\mathfrak{M}^2.$$

Mais, si l'on désigne par M le moment magnétique de l'ellipsoïde, on a

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi abc},$$

et l'égalité précédente devient

$$(6) \qquad E\mathfrak{Q} = \left(\frac{1 + 4\lambda k}{k} - \frac{1}{k^2}\frac{dk}{dT}\right)\frac{M^2}{\frac{8}{3}\pi abc}.$$

Le coefficient λ dépend de la forme de l'ellipsoïde; si, laissant fixes les deux demi-axes b et c, on fait croître au delà de toute limite le demi-axe a, ce coefficient λ tend vers o. Or, l'ellipsoïde tend en même temps vers la forme d'un cylindre elliptique indéfini.

Si l'on assimile un cylindre elliptique très long à un ellipsoïde très allongé, on voit que, pour un cylindre elliptique de longueur L, de section ω, on devra prendre

$$a = \frac{L}{2}, \qquad \omega = \pi bc,$$

et l'égalité (6) deviendra

$$(7) \qquad E\mathfrak{Q} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\frac{dk}{dT}\right)\frac{M^2}{\frac{4}{3}\pi\omega L}.$$

La quantité de chaleur $\mathfrak{Q}$ *est proportionnelle au carré du moment magnétique de l'aiguille et en raison inverse de son volume.*

Cette loi a été vérifiée expérimentalement par M. Joule [1], par M. Edlund [2] et surtout par Cazin [3]. Voici les nombres obtenus par Cazin en opérant sur trois aiguilles de même substance, de même section, mais de longueur différente, et aimantées différemment. D'après la théorie précédente, le quotient

$$\frac{M^2}{\mathcal{Q}L}$$

devrait avoir la même valeur pour toutes ces aiguilles :

L.	M.	$\mathcal{Q}$.	$\frac{M^2}{\mathcal{Q}}$.	$\frac{M^2}{\mathcal{Q}L}$.
3,2	74,9	0,068	82700	25800
	40,2	0,020	80700	25300
3,4	121,0	0,138	106000	31200*
	65,1	0,046	92000	26900
2,4	50,6	0,0415	»	25700

Sauf pour l'observation que nous avons marquée d'un *, l'écart maximum entre deux valeurs trouvées pour $\frac{M^2}{\mathcal{Q}L}$, n'atteint pas la quinzième partie de l'une de ces valeurs, concordance que l'on doit regarder comme satisfaisante, dans ces expériences qui offrent une foule de causes d'erreur. Quant à l'anomalie présentée par l'observation marquée d'un *, elle s'explique aisément; cette observation se rapporte à un cas où l'aiguille était aimantée d'une manière particulièrement intense; pour une semblable aimantation, l'approximation obtenue en remplaçant la fonction magnétisante $F(\mathcal{M})$, par un coefficient d'aimantation constant, est insuffisante.

---

(1) JOULE, *On the calorific effects of magneto-electricity and on the mechanical value of heat* [*Philosophical Magazine*, t. XXIII, pp. 263, 347, 435 (1843)].

(2) EDLUND, *Undersökning om galvaniska induktionsströmars Värmentveckling och dennas förhållande till det dervid förbrukade mekaniska Arbetet* [Stockholm, *Ofversigt*, t. XXI, p. 79; 1864. — *Poggendorff's Annalen*, t. CXXIII, p. 205 (1864)].

(3) CAZIN, *Mémoire sur les effets thermiques du magnétisme* [*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. VI, p. 493 (1875)].

CHAPITRE VI.

AIMANTATION PAR LES COURANTS.

Suivons les conséquences de la définition électromagnétique des corps parfaitement doux donnée au Chapitre IV. Nous allons voir qu'il est facile d'en déduire les lois de la distribution magnétique sur ces corps.

Considérons un système que, pour fixer les idées, nous supposerons formé d'un aimant permanent 1, d'un morceau de fer doux 2 et d'un conducteur fermé et immobile C, traversé par un courant uniforme et constant d'intensité J. Supposons que l'aimantation du morceau de fer doux subisse une certaine variation et exprimons que le système dégage une quantité de chaleur dQ donnée par l'égalité

$$\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = \sum\left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right)\mathrm{J}\,dt + \mathrm{T}\int \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2\,\partial \mathrm{T}}\,\delta\mathfrak{M}_2\,dv.$$

Le premier membre a pour valeur

$$-\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U}.$$

Négligeons, comme nous sommes convenus de le faire, la quantité $\sum q\,\delta\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)$; remarquons que l'uniformité du courant exige que l'on ait, en tout point,

$$\delta q = 0, \qquad \text{et aussi} \qquad \delta \mathrm{W} = 0;$$

nommons $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ les fonctions potentielles magnétiques des

corps 1 et 2; nous aurons [Chap. IV, égalité (16)]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} = \mathrm{E}\,\delta\Upsilon - \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\int \frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}_2}\,\delta\mathfrak{M}_2\,dv \\
+\int\Bigg\{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}_2}\frac{\mathcal{A}_2}{\mathfrak{M}_2}\right]\delta\mathcal{A}_2 \\
+ \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2} + \frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}_2}\frac{\mathcal{B}_2}{\mathfrak{M}_2}\right]\delta\mathcal{B}_2 \\
+ \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2} + \frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}_2}\frac{\mathcal{C}_2}{\mathfrak{M}_2}\right]\delta\mathcal{C}_2\Bigg\}\,dv.
\end{aligned}
$$

D'autre part, le circuit est le siège de deux forces électromotrices :

1° Une force électromotrice hydro-électrique e, dont la valeur est telle que

$$e\mathrm{J}\,dt = -\mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma);$$

2° Une force électromotrice d'induction électromagnétique; celle-ci a une valeur e' telle que

$$e'\mathrm{J}\,dt = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathrm{J}\,\delta\sum \mathfrak{M}\,dv\int \Delta\,\delta s.$$

Si A, B, C sont les composantes de la directrice du courant en un point de l'élément dv, cette dernière égalité peut s'écrire [Chap. III, égalité (5)],

$$e'\mathrm{J}\,dt = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathrm{J}\sum(\mathrm{A}\,\delta\mathcal{A}_2 + \mathrm{B}\,\delta\mathcal{B}_2 + \mathrm{C}\,\delta\mathcal{C}_2)\,dv_2.$$

D'autre part, si φ désigne la fonction potentielle magnétique d'un feuillet quelconque équivalent *au point de vue de l'Électrodynamique* à notre courant fermé, ou, en d'autres termes, la fonction potentielle de notre courant, nous aurons [Liv. XIV, Chap. XI, égalités (4)],

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{AJ} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{BJ} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{CJ} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Nous aurons donc

$$e'\mathrm{J}\,dt = -\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\mathcal{A}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta\mathcal{B}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta\mathcal{C}_2\right)dv_2,$$

et, par conséquent,

$$\left(\mathcal{E} - T\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right) J\, dt = \left(e + e' - T\frac{\partial e}{\partial T}\right) J\, dt$$

$$= -E\,\delta\Upsilon - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}} \int \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2}\,\delta\mathcal{A}_2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2}\,\delta\mathcal{B}_2 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2}\,\delta\mathcal{C}_2\right) dv_2.$$

Si donc nous posons

$$\frac{1}{F_2(\mathfrak{M}_2)} = \frac{1}{\mathfrak{M}_2}\,\frac{d\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2}, \tag{2}$$

l'égalité (1) deviendra

$$\int \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2} + \frac{\mathcal{A}_2}{F_2(\mathfrak{M}_2)}\right] \delta\mathcal{A}_2\, dv_2$$
$$+ \int \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y_2} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2} + \frac{\mathcal{B}_2}{F_2(\mathfrak{M}_2)}\right] \delta\mathcal{B}_2\, dv_2$$
$$+ \int \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z_2} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2} + \frac{\mathcal{C}_2}{F_2(\mathfrak{M}_2)}\right] \delta\mathcal{C}_2\, dv_2 = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient les quantités $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$, ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= -F_2(\mathfrak{M}_2)\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2}\right],\\
\mathcal{B}_2 &= -F_2(\mathfrak{M}_2)\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y_2} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2}\right],\\
\mathcal{C}_2 &= -F_2(\mathfrak{M}_2)\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z_2} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2}\right].
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ces équations donnent les lois de l'aimantation du fer doux par les courants.

Si on les compare aux égalités (17) du Chapitre précédent qui donnent les lois de l'aimantation par les aimants, on voit sans peine qu'elles se peuvent interpréter de la manière suivante :

Considérons le feuillet magnétique qui est équivalent, au point de vue de l'Électrodynamique, au courant fermé et uniforme que l'on considère. Multiplions les composantes de l'aimantation en chaque point de ce feuillet par

$$-\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}.$$

Nous obtiendrons un nouveau feuillet magnétique. Le courant en question influera sur l'aimantation d'un morceau de fer doux de la même manière que ce dernier feuillet.

Cet énoncé suppose que, par le courant, on puisse faire passer un feuillet magnétique ne rencontrant pas l'aimant, mais les égalités (3), que cet énoncé traduit moyennant cette restriction, demeurent vraies sans restriction. *Toutefois, il est entendu que le courant et l'aimant n'ont aucun point commun.*

Si la forme et l'intensité du courant sont données, les trois dérivées partielles de sa fonction potentielle sont données ; le problème de l'aimantation d'un morceau de fer doux par des courants *de forme donnée et d'intensité donnée* est donc purement et simplement ramené au problème de l'aimantation par des aimants permanents ; on peut transporter à celui-là toutes les propriétés démontrées pour celui-ci. En particulier, on pourra énoncer la proposition suivante :

Sur un corps magnétique parfaitement doux et placé en présence de courants fermés et uniformes d'intensité donnée, l'aimantation prend une distribution parfaitement déterminée, et cette distribution est stable.

Dans le cas, au contraire, où l'intensité des courants est susceptible de varier, l'aimantation du fer doux devient l'objet d'une théorie nouvelle. C'est à cette théorie qu'appartient la question suivante :

Un certain nombre de conducteurs fermés sont mis en présence d'un morceau de fer doux. Les conducteurs ne renferment aucune force électromotrice étrangère à l'induction. Initialement, les conducteurs ne sont traversés par aucun courant et le corps parfaitement doux, en vertu des égalités (3), n'est pas aimanté. Un tel état est-il stable ? En d'autres termes, peut-il arriver que des courants prennent naissance dans les conducteurs d'un semblable système et que le corps magnétique s'aimante, le système demeurant d'ailleurs immobile ?

Supposons qu'au bout du temps t, les conducteurs $C_1, C_2, \ldots, C_n$ soient traversés par des courants d'intensité $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Quelle est, à l'instant t, la force électromotrice qui agit dans le conducteur C_1 ?

Cette force est la somme de deux autres : l'une, e_1, est due à l'induction électromagnétique ; l'autre, e'_1, est due à l'induction électrodynamique.

Nous avons

$$e'_1 = \frac{d}{dt}(p_1 J_1 + P_{12} J_2 + \ldots + P_{1n} J_n),$$

p_1 étant le coefficient d'induction propre du circuit C_1, et P_{1i} le coefficient d'induction mutuelle du circuit C_1 et du circuit i. Ces coefficients sont indépendants du temps.

D'autre part, nous avons

$$e_1 = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{M}\, dv \int_{C_1} \Delta\, ds,$$

$\int_{C_1} \Delta\, ds$ étant indépendant du temps.

Si R_1 désigne la résistance du circuit C_1, nous aurons

$$R_1 J_1 = e_1 + e'_1.$$

Nous aurons donc, pour tout le système,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^t (R_1 J_1^2 + R_2 J_2^2 + \ldots + R_n J_n^2)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left(p_1 J_1^2 + p_2 J_2^2 + \ldots + p_n J_n^2 + 2 \sum P_{ij} J_i J_j\right) \\ &+ \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \int \mathfrak{M}\, dv \left(J_1 \int_{C_1} \Delta\, ds + J_2 \int_{C_2} \Delta\, ds + \ldots + J_n \int_{C_n} \Delta\, ds\right). \end{aligned} \right.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \mathfrak{M}\, dv \left(J_1 \int_{C_1} \Delta\, ds + J_2 \int_{C_2} \Delta\, ds + \ldots + J_n \int_{C_n} \Delta\, ds\right) \\ &= -\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}} \Bigg[\mathcal{A}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x}\right) \\ &\qquad + \mathcal{B}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial y}\right) \\ &\qquad + \mathcal{C}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial z}\right)\Bigg] dv, \end{aligned}$$

$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n$ désignant les fonctions potentielles des feuillets équivalents, au point de vue de l'Électrodynamique, aux courants $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Nous aurons, en vertu des équations (3),

$$\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial\mathcal{V}_n}{\partial x}\right)=\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}+\frac{\mathcal{A}}{F(\mathcal{M})},$$

$$\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial\mathcal{V}_n}{\partial y}\right)=\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}+\frac{\mathcal{B}}{F(\mathcal{M})},$$

$$\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial\mathcal{V}_n}{\partial z}\right)=\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}+\frac{\mathcal{C}}{F(\mathcal{M})}.$$

Nous aurons donc

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathcal{M}\,dv\left(J_1\int_{C_1}\Delta\,ds+J_2\int_{C_2}\Delta\,ds+\ldots+J_n\int_{C_n}\Delta\,ds\right)$$
$$=-\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)dv-\frac{\mathcal{A}_2^2+\mathcal{B}_2^2+\mathcal{C}_2^2}{F(\mathcal{M})}\,dv.$$

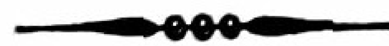
Désignons par $\mathfrak{J}$ le potentiel magnétique du morceau de fer doux. Nous avons

$$\mathfrak{J}=\frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)dv$$

et, par conséquent,

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^t(R_1J_1^2+R_2J_2^2+\ldots+R_nJ_n^2)\,dt\\&\quad=\frac{1}{2}\left(p_1J_1^2+p_2J_2^2+\ldots+p_nJ_n^2+\sum P_{ij}J_iJ_j\right)\\&\qquad-2\mathfrak{J}-\int\frac{\mathcal{M}_2^2}{F(\mathcal{M}_2)}\,dv.\end{aligned}\right.$$

Chacun des termes du second membre est négatif, tandis que le premier membre est nécessairement positif. On voit donc que cette égalité (5) est impossible ; les conducteurs ne peuvent être traversés par aucun courant uniforme, et les corps magnétiques ne s'aimantent pas.



CHAPITRE VII.

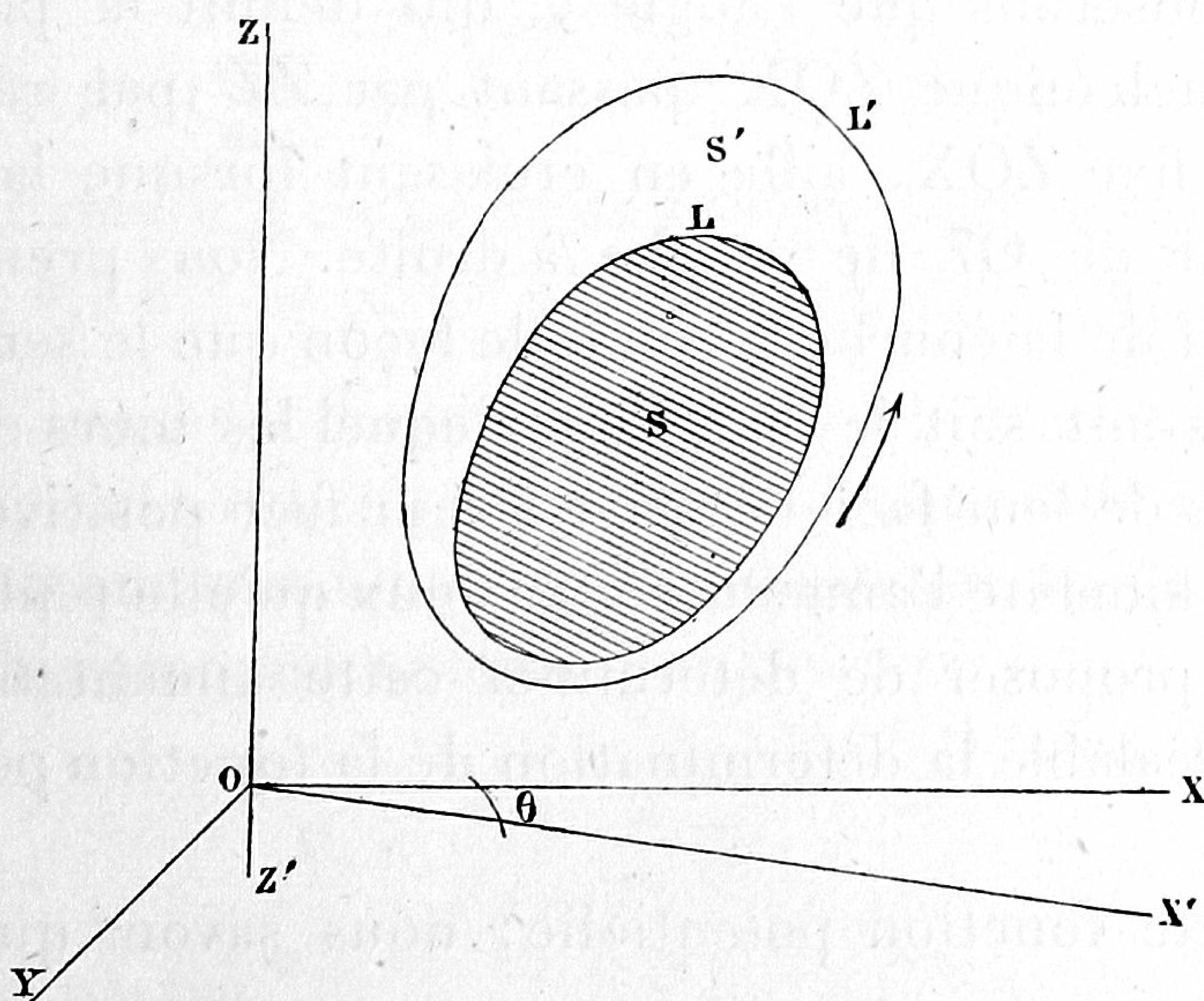
DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS D'AIMANTATION. MÉTHODE DE G. KIRCHHOFF.

§ 1. — Champ électrodynamique d'une bobine annulaire.

G. Kirchhoff (1) a traité en détail un problème où il est fait appel à la fois à la théorie de l'aimantation par les courants et aux lois de l'induction par variation d'aimantation; nous allons étudier ici ce problème qui présente, en outre, l'intérêt de fournir l'une des meilleures méthodes pour la détermination expérimentale du coefficient d'aimantation d'un morceau de fer doux.

Par un axe ZZ' (*fig.* 63) faisons passer un plan; dans ce plan,

Fig. 63.



traçons une courbe L ne rencontrant pas l'axe et entourant une

(1) G. Kirchhoff, *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen: Ergänzungsband*, t. V; 1870. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 223).

aire S. Si le plan tourne autour de l'axe ZZ', la courbe L, jouant le rôle de méridienne, engendrera un anneau. Nous supposerons cet anneau formé d'un fer doux homogène.

Dans le plan primitivement considéré, traçons une seconde courbe fermée L', entourant la courbe L et ne rencontrant pas l'axe; soit S' l'aire qu'elle enferme.

Par l'axe ZZ' faisons passer n' plans, dont chacun forme avec ceux qui l'avoisinent un même angle

$$\Delta\theta' = \frac{2\pi}{n'}. \tag{1}$$

Nous supposerons le nombre n' de ces plans très grand, et, par conséquent, l'angle $\Delta\theta'$ très petit.

Lorsque le plan mobile considéré vient, dans son mouvement, coïncider successivement avec chacun de ces plans, la courbe L' vient occuper des positions L'_1, L'_2, ..., L'_n. Supposons chacune de ces positions réalisée matériellement par un fil conducteur; nous obtiendrons une bobine annulaire de n' tours de fil.

Nous supposerons ces tours de fil tous parcourus par un même courant uniforme d'intensité J'; le sens dans lequel ce courant est compté positivement sera défini de la manière suivante :

Nous supposerons que l'angle θ, qui définit la position d'un demi-plan quelconque ZOX' passant par ZZ' par rapport à un certain plan fixe ZOX, aille en croissant lorsque la droite OX' tourne autour de OZ de gauche à droite. Nous prendrons alors le sens positif de la courbe L' de telle façon que le sens où l'angle θ va en croissant soit le sens dans lequel les tours de la bobine sont traversés de leur face négative à leur face positive.

La bobine aimante l'anneau de fer doux qu'elle renferme; nous allons nous proposer de déterminer cette aimantation, ce qui exigera au préalable la détermination de la fonction potentielle de la bobine.

Soit $\mathcal{V}$ cette fonction potentielle; nous savons que $\mathcal{V}$ ne sera pas une fonction uniforme des coordonnées, mais que $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$ seront des fonctions uniformes des coordonnées ; nous allons chercher à déterminer ces fonctions.

Aux coordonnées cartésiennes x, y de la projection d'un point

sur le plan XOY, nous substituerons les coordonnées polaires ρ, θ du même point. Nous aurons

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Au lieu de déterminer $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}, \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}, \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}$, nous déterminerons $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\rho}, \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\theta}, \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}$, les dernières quantités étant liées aux premières par lesé galités

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\sin\theta, \\ \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\theta} = -\rho\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\sin\theta - \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\cos\theta\right), \\ \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Considérons le tour de fil L'_1 ; soit dS'_1 un élément de l'aire qu'il embrasse; soit N'_1 la normale à la face positive de cette aire. Ce tour de fil L'_1 aura, en un point (ρ, θ, z), une fonction potentielle électrodynamique qui a pour valeur

$$U_1 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \mathbf{S}_{S'_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N'_1} dS'_1,$$

r étant la distance d'un point de l'élément dS'_1 au point (ρ, θ, z).

Soit $(\rho'_1, \theta'_1, z'_1)$ un point de l'élément dS'_1. Nous aurons

$$dN'_1 = \rho'_1\, d\theta'_1.$$

Si l'on remarque que θ'_1 a la même valeur pour tous les points de la surface S'_1, on pourra écrire

$$U_1 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \frac{\partial}{\partial\theta'_1} \mathbf{S}_{S'_1} \frac{1}{r} \frac{dS'_1}{\rho'_1},$$

ou bien, en posant

$$(4) \qquad V_1 = \mathbf{S}_{S_1} \frac{1}{r} \frac{dS'_1}{\rho'_1},$$

$$U_1 = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \frac{\partial V_1}{\partial\theta'_1}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial U_1}{\partial \rho} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \frac{\partial^2 V_1}{\partial \rho\, \partial \theta'_1},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \theta} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta\, \partial \theta'_1},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \frac{\partial^2 V_1}{\partial z\, \partial \theta'_1}.$$

On a d'ailleurs

$$\mathcal{V} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$

et, par conséquent,

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \left(\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial \rho\, \partial \theta'_1} + \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial \rho\, \partial \theta'_2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V_n}{\partial \rho\, \partial \theta'_n} \right), \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \left(\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial \theta\, \partial \theta'_1} + \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial \theta\, \partial \theta'_2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V_n}{\partial \theta\, \partial \theta'_n} \right), \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J' \left(\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial z\, \partial \theta'_1} + \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial z\, \partial \theta'_2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V_n}{\partial z\, \partial \theta'_n} \right). \end{cases}$$

Si l'on prend la courbe L' dans une position quelconque définie par l'angle θ', et si, pour cette courbe, on forme la fonction V définie par l'égalité (4), cette fonction coïncidera successivement avec $V_1, V_2, \ldots, V_n$ quand la courbe L' viendra occuper les positions $L'_1, L'_2, \ldots, L'_n$.

En vertu de l'égalité (1), la première des égalités (5) peut s'écrire

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{n' J'}{2\pi} \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial \rho\, \partial \theta'_1} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial \rho\, \partial \theta'_2} + \ldots + \frac{\partial^2 V_n}{\partial \rho\, \partial \theta'_n} \right) \Delta\theta'.$$

Si l'angle $\Delta\theta'$ est très petit, cette égalité peut se transformer en la première des égalités

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{n' J'}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \theta'}\, d\theta', \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{n' J'}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta\, \partial \theta'}\, d\theta', \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{n' J'}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial \theta'}\, d\theta'; \end{cases}$$

les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

D'après l'égalité (4), la fonction V est la fonction potentielle

ordinaire d'une couche superficielle distribuée sur la surface S' et ayant pour densité en chaque point la quantité $\frac{1}{\rho'}$. Les dérivées partielles de cette fonction potentielle peuvent subir une discontinuité si le point (ρ, θ, z) vient à traverser la surface S', ou, ce qui revient au même, si la surface S', en se déplaçant, vient à se faire traverser par le point (ρ, θ, z). Cette remarque est fondamentale pour la transformation que nous allons faire subir aux égalités (6).

Avant de faire cette transformation, nous distinguerons le cas où le point (ρ, θ, z) est extérieur à la bobine annulaire du cas où il est intérieur à cette bobine.

1° *Le point* (ρ, θ, z) *est extérieur à la bobine annulaire.* Lorsque θ' varie de 0 à 2π, la courbe L' décrit la bobine annulaire; le point (ρ, θ, z) ne heurte à aucun moment la surface S'; les dérivées $\frac{\partial V}{\partial \rho}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ varient d'une manière continue avec la position de la courbe S', et les égalités (6) donnent

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Une bobine annulaire à tours serrés n'exerce aucune action sur les points qui lui sont extérieurs.

2° *Le point* (ρ, θ, z) *est intérieur à la bobine annulaire.* Dans ce cas, lorsque θ' varie de 0 à 2π, la surface S' rencontre le point (ρ, θ, z) et se fait traverser par lui de la face positive à la face négative.

Un peu avant cette rencontre, le point (ρ, θ, z) est situé du côté positif de la surface S'; de plus, un accroissement $d\theta$ de l'angle θ augmente de $\rho\, d\theta$ sa distance normale à la surface S'. On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial V}{\partial N},$$

N étant la normale à la face positive de la surface S.

Un peu après la rencontre, le point (ρ, θ, z) est situé du côté négatif de la surface S'; de plus, un accroissement $d\theta$ de l'angle θ diminue de $\rho\, d\theta$ sa distance normale à la surface S'. On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial V}{\partial N'},$$

N' étant la normale à la face négative de la surface S'. Lors donc que θ' augmente de o à 2π, il y a un moment où $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ subit l'accroissement brusque

$$-\rho\left(\frac{\partial V}{\partial N}+\frac{\partial V}{\partial N'}\right).$$

La fonction V est la fonction potentielle ordinaire d'une distribution superficielle répandue sur la surface S'. Si l'on désigne par σ la densité de cette distribution, on aura

$$\frac{\partial V}{\partial N}+\frac{\partial V}{\partial N'}=-4\pi\sigma.$$

Ici, $\sigma=\frac{1}{\rho'}$ ou, ce qui revient au même, $\sigma=\frac{1}{\rho}$. La variation brusque que subit $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ à un instant compris entre l'instant où θ' part de o et l'instant où θ' prend la valeur 2π a donc pour valeur 4π. On verrait sans peine que $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial V}{\partial z}$ ne subissent aucune discontinuité.

Les égalités (6) donnent alors

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho}=0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta}=-\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,2n'J', \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}=0. \end{cases}$$

A l'intérieur d'une bobine à tours serrés, l'action électrodynamique est, en chaque point, normale au plan méridien de ce point; elle est dirigée de manière à former avec l'axe des z un couple à rotation négative (moyennant les conventions arrêtées pour le sens du courant); *elle a pour grandeur*

$$(9)\qquad F=\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\frac{2n'J'}{\rho},$$

ρ étant la distance du point à l'axe.

Considérons un cercle ayant ZZ' pour axe et passant par le point (ρ, θ, ψ). Soit Δ l'arc très petit de ce cercle compris entre les plans de deux tours successifs de la bobine. On aura

$$n'\Delta=2\pi\rho,$$

en sorte que l'égalité (9) pourra s'écrire

$$F = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{4\pi}{\Delta} J'. \tag{10}$$

Cette nouvelle expression de la force F est rendue intéressante par la conséquence suivante :

Imaginons que la distance de l'axe ZZ' à la bobine augmente de plus en plus, sans que la surface S' change, non plus que Δ. A la limite, nous aurons une bobine cylindrique illimitée, dont S' sera la section et dont les tours plans, très serrés, seront à une distance Δ les uns des autres. On voit donc qu'à l'intérieur d'une semblable bobine, le champ électrodynamique est uniforme, dirigé comme les génératrices de la bobine, et ayant une intensité définie par l'égalité (10).

Cette conclusion, exacte pour une bobine illimitée, est vraie approximativement pour une bobine cylindrique limitée très longue, pourvu que l'on ne considère pas les points trop voisins des extrémités. Nous avons fait usage de ce résultat au Chapitre V.

§ 2. — Aimantation du noyau de fer doux.

Cherchons maintenant l'aimantation prise par l'anneau de fer doux qui se trouve placé dans l'âme de la bobine annulaire.

D'après les égalités (3) du Chapitre précédent, les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation sont données par les relations

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= -F(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}\right), \\ \mathcal{B} &= -F(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial y}\right), \\ \mathcal{C} &= -F(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z}\right), \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$F(\mathfrak{M})$ étant la fonction magnétisante et $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de l'anneau.

Considérons la tangente au parallèle qui passe par le point (ρ, θ, z) de l'aimant, cette tangente étant menée dans le sens où θ va en croissant; considérons aussi celui des rayons de ce parallèle qui se dirige du centre vers le point (ρ, θ, z). Soit $\mathfrak{T}$ la compo-

sante, suivant la première droite, de l'aimantation au point (ρ, θ, z); soit $\mathfrak{R}$ la composante de l'aimantation suivant la seconde droite. Au lieu de déterminer, en chaque point de l'aimant, les quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, nous pouvons déterminer les quantités $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}$. Nous aurons évidemment

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \mathfrak{R}\cos\theta - \mathfrak{E}\sin\theta, \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{R}\sin\theta + \mathfrak{E}\cos\theta. \end{cases}$$

Ces égalités, comparées aux égalités (11), aux égalités (3), et aux égalités analogues à (3) que l'on peut écrire pour la fonction $\mathfrak{V}$, donnent

$$\mathfrak{R} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\rho} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{\partial\Upsilon}{\partial\rho}\right),$$

$$\mathfrak{E} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\theta} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Upsilon}{\partial\theta}\right),$$

$$\mathfrak{C} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{\partial\Upsilon}{\partial z}\right);$$

ou bien, en vertu des égalités (8),

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\rho}, \\ \mathfrak{E} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\theta} + \dfrac{\mathfrak{H}}{2\pi}\dfrac{n'\mathrm{J}'}{\rho}\right), \\ \mathfrak{C} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Nous savons que ces équations ne peuvent être vérifiées de plus d'une manière. Or nous allons démontrer qu'elles sont vérifiées si l'on pose

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = 0, \\ \mathfrak{E} = -\dfrac{\mathfrak{H}}{2\pi}\mathrm{F}(\mathfrak{M})\dfrac{n'\mathrm{J}'}{\rho}, \qquad \mathfrak{M} = |\mathfrak{E}|, \\ \mathfrak{C} = 0. \end{cases}$$

en sorte que nous serons assurés d'avoir ainsi obtenu l'aimantation de notre anneau de fer doux.

Supposons, en effet, l'aimantation donnée par les égalités (14). Considérons un élément $d\mathrm{S}'$ de la courbe S'. Cet élément, tournant autour de l'axe ZZ', engendre un tore infiniment délié. Si l'aimantation est donnée par les égalités (14), ce tore est un solénoïde magnétique fermé dont la fonction potentielle magnétique

est égale à o en tout point; il en est de même de la fonction potentielle magnétique de l'anneau de fer doux, qui est la somme des fonctions potentielles magnétiques de ces tores élémentaires.

Ainsi, si l'aimantation est donnée par les égalités (14), on a

$$\mathcal{V} = 0,$$

et les égalités (13) sont vérifiées. Les égalités (14) nous font donc connaître les lois très simples suivant lesquelles s'aimante le tore de fer doux. *L'aimantation est, en chaque point, tangente au parallèle qui passe par ce point; elle est inversement proportionnelle à la distance de ce point à l'axe.*

§ 3. — Induction produite dans une bobine extérieure.

Le noyau de fer doux et la bobine B′ que nous venons d'étudier sont placés tous deux dans l'âme d'une seconde bobine annulaire B″; cette seconde bobine annulaire est formée de n'' tours équidistants; chacun de ces tours est formé par une ligne plane L″ entourant une aire S″.

Cette bobine est en relation avec un galvanomètre balistique; R est la résistance totale du circuit.

Examinons le phénomène d'induction suivant :

Au début de l'expérience, la première bobine B′ est parcourue par un courant d'intensité J; le fer doux est aimanté; aucun courant ne parcourt la seconde bobine B″.

On ouvre la première bobine; au bout d'un temps très court, aucun courant ne traverse plus cette bobine B′ non plus que la seconde bobine B″. Le fer doux est désaimanté.

Entre ces deux époques, la bobine B″ a été parcourue par un courant d'induction qui a mis en mouvement une quantité d'électricité Q. On peut calculer cette quantité.

A un instant où le fer doux a une aimantation donnée, remplaçons chaque élément magnétique par le petit courant C auquel il est équivalent. Soit B le système de courants ainsi défini.

Soient $P(t)$, $P'(t)$, $P''(t)$ les potentiels électrodynamiques des systèmes B, B′, B″, tels qu'ils sont à l'instant t, sur le circuit B″ parcouru par un courant égal à l'unité.

A l'instant t, la force électromotrice d'induction dans la bo-

bine B″ est

$$\mathcal{E} = \frac{d\,\mathrm{P}''(t)}{dt} + \frac{d\,\mathrm{P}'(t)}{dt} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{d\mathrm{P}}{dt}.$$

Dans le temps dt, le système B″ est traversé par une quantité d'électricité dQ qui a pour valeur

$$d\mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left[\frac{d\,\mathrm{P}''(t)}{dt} + \frac{d\,\mathrm{P}'(t)}{dt} - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\frac{d\,\mathrm{P}(t)}{dt}\right]dt.$$

La quantité Q que nous voulons calculer a donc pour valeur

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{R}}\Big[\mathrm{P}''(t_1) + \mathrm{P}'(t_1) - \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\mathrm{P}(t_1) - \mathrm{P}''(t_0) - \mathrm{P}'(t_0) + \frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\mathrm{P}(t_0)\Big].$$

Au début de l'expérience, la bobine B″ n'est traversée par aucun courant. On a donc

$$\mathrm{P}''(t_0) = 0.$$

A la fin de l'expérience, les bobines B′, B″ ne sont traversées par aucun courant; il en est de même du système B, puisque l'aimant est désaimanté. On a donc

$$\mathrm{P}''(t_1) = 0, \qquad \mathrm{P}'(t_1) = 0, \qquad \mathrm{P}(t_1) = 0$$

et, par conséquent,

$$(15) \qquad \mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left[\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\mathrm{P}(t_0) - \mathrm{P}'(t_0)\right].$$

Déterminons donc $\mathrm{P}(t_0)$ et $\mathrm{P}'(t_0)$.

Soit $\mathfrak{P}$ la fonction potentielle de la bobine B″ parcourue par un courant égal à l'unité; en reproduisant la démonstration qui a donné les égalités (8), nous trouverons que l'on a, en tout point intérieur à la bobine B″,

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\rho} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\theta} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,2n'', \\[2mm] \dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Considérons le petit circuit C équivalent à un élément magnétique $\mathfrak{M}\,dv$ de l'aimant. Soient ω son aire, n la normale à sa face

positive et j l'intensité du courant qui le parcourt à l'instant t. Le potentiel électrodynamique de ce petit courant sur la bobine B″ parcourue par un courant égal à l'unité sera, à l'instant t,

$$p(t) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n} j\omega,$$

ou bien, comme $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} j\omega$ est précisément égal à $\mathfrak{M}\, dv$, que la normale n coïncide avec la direction de l'aimantation,

$$p(t) = -\left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right) dv.$$

On a donc

$$P(t) = -\int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right) dv,$$

l'intégration s'étendant à tout l'aimant.

A l'instant t_0, l'aimantation est donnée par les formules (14). On voit sans peine que

$$\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \mathfrak{T} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \theta}.$$

On peut d'ailleurs écrire

$$dv = \rho\, dS\, d\theta.$$

On a donc

$$P(t_0) = -\int_0^{2\pi} \mathbf{S}_S\, \mathfrak{T} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \theta}\, dS\, d\theta.$$

Si l'on fait usage des égalités (14) et (16) et si l'on effectue l'intégration par rapport à θ, on trouve

$$P(t_0) = -\sqrt{2}\, \mathfrak{H} \mathfrak{A}\, n' n'' J' \mathbf{S}_S \frac{F(\mathfrak{M})\, dS}{\rho} \tag{17}$$

avec

$$\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M})} = \left| \frac{\mathfrak{H}}{2\pi} \frac{n' J'}{\rho} \right|. \tag{18}$$

Calculons maintenant $P'(t_0)$.

Le potentiel électrodynamique de l'un des tours de la bobine L′, soit le tour L'_1, sur la bobine B″ sera

$$p'_1(t_0) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathbf{S}_{S'} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N} J'\, dS'.$$

Mais

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \theta},$$

ou bien, d'après les égalités (16),

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} 2 n'' \frac{1}{\rho}.$$

On a donc

$$p'_1(t_0) = \mathfrak{A}^2 n'' J' \int_{S'} \frac{dS'}{\rho}.$$

Les quantités $p'_2(t_0)$, ..., $p'_{n'}(t_0)$ ont la même valeur. Leur somme a donc pour valeur

$$P'(t_0) = \mathfrak{A}^2 n' n'' J' \int_{S'} \frac{dS'}{\rho}. \tag{19}$$

Reportons dans l'égalité (15) les résultats des égalités (17) et (19), et nous aurons

$$Q = \mathfrak{A}^2 \frac{n' n'' J'}{R} \left[\int_{S'} \frac{dS'}{\rho} + \left(\frac{\mathfrak{H} \sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{A}} \right)^2 \int_S \frac{4\pi F(\mathfrak{M}) dS}{\rho} \right], \tag{20}$$

$\mathfrak{M}$ étant défini par l'égalité (18).

Cette formule (20) prend une forme plus simple *si l'on suppose la bobine* B' *exactement appliquée sur l'anneau de fer doux*. Les deux surfaces S et S' sont alors identiques et l'on a

$$Q = \mathfrak{A}^2 \frac{n' n'' J'}{R} \int_S \left[1 + 4\pi \left(\frac{\mathfrak{H} \sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{A}} \right)^2 F(\mathfrak{M}) \right] \frac{dS}{\rho}. \tag{21}$$

Dans les limites où la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$ peut être remplacée par un coefficient d'aimantation constant k, cette égalité devient

$$Q = \mathfrak{A}^2 \frac{n' n'' J'}{R} \left[1 + 4\pi \left(\frac{\mathfrak{H} \sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{A}} \right)^2 k \right] \int_{S'} \frac{dS}{\rho}. \tag{22}$$

Nous verrons bientôt (Chap. XII) que

$$\frac{\mathfrak{H} \sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{A}} = -1.$$

L'égalité précédente deviendra alors

$$Q = \mathfrak{A}^2 \frac{n' n'' J'}{R} (1 + 4\pi k) \int_S \frac{dS}{\rho}. \tag{23}$$

La boussole des tangentes, employée comme galvanomètre balistique, permet, comme nous le verrons bientôt, de déterminer $\frac{Q}{\mathfrak{A}^2}$. Nous obtenons donc un moyen de déterminer expérimentalement $(1 + 4\pi k)$.

Si l'on veut tenir compte de la variation de la fonction magnétisante avec l'aimantation, on pourra, en vertu de l'égalité (18), écrire l'égalité (21)

$$Q = \mathfrak{A}^2 \frac{n' n'' J'}{R} \mathbf{S}_S \left\{ 1 - 4\pi \left(\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}} \right)^2 \lambda \left[\left(\frac{\mathfrak{H}}{2\pi} \frac{n' J'}{\rho} \right)^2 \right] \right\} \frac{dS}{\rho},$$

λ étant la fonction, liée à $F(\mathfrak{M})$, qui sert à réduire à un problème d'équations aux dérivées partielles le problème de l'aimantation par influence (*voir* Livre IX, Chap. II).

Si l'anneau de fer doux aimanté est un anneau de très petite section et de très grand rayon, ρ aura sensiblement, pour tous les points de cet anneau, une même valeur r, et l'égalité précédente deviendra

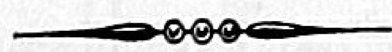
$$(24) \qquad Q = \mathfrak{A}^2 \frac{n' n'' J'}{R} \left\{ 1 - 4\pi \left(\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}} \right)^2 \lambda \left[\left(\frac{\mathfrak{H}}{2\pi} \frac{n' J'}{r} \right)^2 \right] \right\} \frac{S}{r}$$

ou bien, en faisant

$$\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}} = -1,$$

$$(25) \qquad Q = \mathfrak{A}^2 \frac{n' n'' J'}{R} \left[1 - 4\pi\lambda \left(2\mathfrak{A}^2 \frac{n'^2 J'^2}{r^2} \right) \right] \frac{S}{r}.$$

Cette formule permet, par une série d'expériences effectuées avec des valeurs différentes de l'intensité J', de déterminer la fonction λ et, partant, la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$.



CHAPITRE VIII.

FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ENTRE AIMANTS ET COURANTS UNIFORMES.

§ 1. — Loi fondamentale des forces électromagnétiques.

Considérons un système que, pour simplifier les écritures, nous supposerons formé d'un seul élément magnétique dv et d'un seul conducteur fermé C traversé par un courant d'intensité J.

Ce système est soumis à l'action de certaines forces extérieures.

Supposons qu'il subisse un certain déplacement pendant lequel l'aimantation de l'élément magnétique et l'intensité du courant demeurent l'une et l'autre invariables. Pendant ce déplacement, les forces extérieures effectuent un travail $d\mathfrak{T}_e$; la force vive du système s'accroît de $\delta \sum \frac{mv^2}{2}$; le système dégage une quantité de chaleur dQ, et l'on a

$$\mathrm{E}\, dQ + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\mathrm{E}\, \delta\mathrm{U} + d\mathfrak{T}_e.$$

D'autre part, si $d\mathfrak{T}_i$ désigne le travail des forces intérieures, on a

$$\delta \sum \frac{mv^2}{2} = d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_i.$$

Enfin, dans les conditions actuelles, la loi de Joule est applicable au système, et l'on a

$$\mathrm{E}\, \delta Q = \left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\, dt.$$

On a donc finalement

$$d\mathfrak{T}_i = -\mathrm{E}\, \delta\mathrm{U} - \left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathrm{T}}\right) \mathrm{J}\, dt. \tag{1}$$

Proposons-nous de calculer les quantités qui figurent au second membre de cette égalité.

D'après l'égalité (16) du Chapitre IV, si nous désignons par p le coefficient d'induction propre du circuit, nous aurons

$$\text{(2)} \qquad \text{E}\,\delta\text{U} = \text{E}\,\delta\Upsilon + \delta\text{W} + \delta\sum\left(\Theta - \text{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\right)q + \frac{\text{J}^2}{2}\frac{dp}{dt}dt.$$

Les courants étant uniformes, on a, en tout point, $\delta q = 0$. Nous sommes convenus de négliger $\delta\left(\Theta - \text{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\right)$. Nous avons donc

$$\delta\sum\left(\Theta - \text{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\right)q = 0.$$

Étant donnée une quantité quelconque A, nous désignerons par δA la variation totale de cette quantité; par ΔA la partie de cette variation qui dépend seulement du changement de forme et de position du système; par DA la partie de cette variation qui dépend seulement du changement d'état; en sorte que nous aurons, en général,

$$\delta\text{A} = \Delta\text{A} + \text{DA}.$$

Les courants étant uniformes, nous aurons

$$\text{DW} = 0, \qquad \delta\text{W} = \Delta\text{W},$$

en sorte que l'égalité (2) deviendra

$$\text{(3)} \qquad \text{E}\,d\text{U} = \text{E}\,\delta\Upsilon + \frac{\text{J}^2}{2}\frac{dp}{dt}dt.$$

Soit e la force électromotrice hydro-électrique qui agit dans le circuit; nous aurons

$$e\,\text{J}\,dt = -\,\text{E}\,\text{D}(\Upsilon - \text{T}\Sigma).$$

Soit e' la force électromotrice d'induction; nous aurons

$$e'\,\text{J}\,dt = \text{J}^2\frac{dp}{dt}dt + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathfrak{M}\,dv\,\text{J}\,dt\frac{d}{dt}\int\Delta\,ds.$$

Nous aurons donc

$$\text{(4)} \qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\mathcal{E} - \text{T}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\text{T}}\right)\text{J}\,dt = \left(e' + e - \text{T}\frac{\partial e}{\partial\text{T}}\right)\text{J}\,dt\\ &\quad = -\,\text{E}\,\text{D}\Upsilon + \text{J}^2\frac{dp}{dt}dt + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathfrak{M}\,dv\,\text{J}\,dt\int\Delta\,ds.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (3) et (4), reportées dans l'égalité (1), donnent l'égalité suivante :

$$(5) \qquad d\mathfrak{T}_i = -\mathrm{E}\,\Delta\Upsilon - \Delta\mathrm{W} - \frac{\mathrm{J}^2}{2}\frac{dp}{dt}dt - \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\,\mathfrak{M}\,dv\,\mathrm{J}\,dt\frac{d}{dt}\int \Delta\,ds.$$

Interprétons cette égalité (5) :

— $\mathrm{E}\,\Delta\Upsilon$ représente le travail des forces intérieures qui agissent dans le système à l'état neutre ;

— $\Delta\mathrm{W}$ représente le travail des forces électrostatiques données par la loi de Coulomb ;

— $\frac{\mathrm{J}^2}{2}\frac{dp}{dt}dt$ représente le travail des actions électrodynamiques ;

L'égalité (5) nous montre donc que, dans un système formé par un élément magnétique et un courant fermé et uniforme, pour avoir le système complet des forces intérieures, il nous faut adjoindre aux forces que nous font déjà connaître les autres parties de la Physique des forces dont le travail élémentaire a pour expression

$$d\mathfrak{T} = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\,\mathfrak{M}\,dv\,\mathrm{J}\,dt\frac{d}{dt}\int \Delta\,ds.$$

Ce résultat a été obtenu en considérant seulement un élément magnétique et un courant fermé et uniforme. On aurait pu soumettre à un raisonnement analogue un système formé d'un nombre quelconque d'aimants et d'un nombre quelconque de courants fermés et uniformes, et l'on serait arrivé sans peine au résultat suivant :

Dans un système formé d'aimants et de courants fermés et uniformes s'exercent, outre les forces connues par les autres parties de la Physique, des forces électromagnétiques dont le travail élémentaire, dans un déplacement quelconque du système, a pour expression

$$(6) \qquad d\mathfrak{T} = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\,\mathbf{S}\,\mathfrak{M}\,dv\,\mathrm{J}\,\delta\int \Delta\,ds,$$

la signe $\mathbf{S}$ *indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons que l'on peut former en prenant un élément magnétique et un courant fermé.*

On peut encore dire que *ces forces électromagnétiques ont pour potentiel la quantité*

$$(7) \qquad \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \mathbf{S}\, \mathfrak{M}\, dv\, \mathrm{J} \int \Delta\, ds,$$

à la condition de prendre seulement, dans la variation de cette quantité, les termes qui ne dépendent ni des changements d'intensité des courants, ni de changement de grandeur de l'aimantation, ni de ses changements d'orientation par rapport à des axes invariablement liés à l'élément magnétique.

Revenons à l'expression, donnée par l'égalité (16) du Chapitre IV, de l'énergie interne d'un système qui renferme des aimants et des courants fermés et uniformes

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{EU} &= \mathrm{E}\Upsilon + \mathrm{W} + \mathfrak{T} + \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q \\ &+ \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}} \right] dv \\ &+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \sum \left(\frac{1-\lambda}{2r} \cos\theta \cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r} \cos\omega \right) \mathrm{J}\,\mathrm{J}'\, ds\, ds'. \end{aligned} \right.$$

Nous observons que, parmi les termes qui forment le second membre, le potentiel électrostatique et le potentiel magnétique figurent avec leur signe; le potentiel électrodynamique figure, mais précédé du signe —; quant au potentiel électromagnétique, il ne se trouve pas parmi ces termes.

Ce résultat paradoxal s'explique comme les paradoxes du même genre, qui ont été étudiés au Livre XIV, Chapitre IV. Il ne doit donc pas nous surprendre. Il doit seulement servir à nous rappeler de quelles précautions doivent toujours être entourées les applications de la Thermodynamique aux systèmes qui renferment des courants électriques. Il montre, avec évidence, combien les simples raisonnements par analogie seraient dangereux en pareil cas.

§ 2. — Relations entre les forces électromagnétiques et l'induction électromagnétique.

La loi des forces électromagnétiques présente, avec la loi de l'induction électromagnétique, des relations analogues à celles que

la loi des forces électrodynamiques présente avec la loi de l'induction électrodynamique, relations qui ont été étudiées au Livre XIV, Chapitre VI.

1° Considérons un système formé d'un aimant et d'un seul circuit fermé. Supposons l'aimant invariable de forme, de position, d'aimantation; le circuit induit, au contraire, déformable et mobile.

L'aimant y engendrera une force électromotrice d'induction électromagnétique qui aura pour valeur

$$\mathcal{E} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \mathbf{S} \mathfrak{M}\, dv \frac{d}{dt} \int \Delta\, ds.$$

Soit R la résistance du circuit. Si la force électromotrice en question y agissait seule, elle y engendrerait un courant ayant pour intensité

$$J = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \frac{1}{R} \mathbf{S} \mathfrak{M}\, dv \frac{d}{dt} \int \Delta\, ds.$$

Sur ce courant, l'aimant exercerait certaines forces électromagnétiques dont le travail, dans le déplacement considéré de l'induit, aurait pour valeur

$$d\mathfrak{T} = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} J\, dt\, \mathbf{S} \mathfrak{M}\, dv \frac{d}{dt} \int \Delta\, ds,$$

ou, en remplaçant S par sa valeur,

$$d\mathfrak{T} = -\frac{\mathfrak{H}^2}{16\pi^2} \frac{1}{R} \left(\mathbf{S} \mathfrak{M}\, dv \frac{d}{dt} \int \Delta\, ds \right)^2 dt.$$

Ce travail est certainement négatif.

Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

Si l'on déforme et déplace un conducteur fermé en présence d'un aimant invariable de forme, de position et d'aimantation, cet aimant y engendre une force électromotrice d'induction; si cette force agissait seule dans le conducteur considéré, elle y donnerait naissance à un certain courant. Dans le déplacement considéré, les actions de l'aimant sur ce courant effectueraient un travail négatif. En d'autres termes, elles gêneraient le déplacement. C'est l'extension de la loi de Lenz à l'induction électromagnétique.

L'égalité

$$\mathcal{E} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \mathbf{S}\, \mathfrak{M}\, dv \frac{d}{dt} \int \Delta\, ds$$

peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour calculer la force électromotrice qu'un aimant invariable de forme, de position et d'aimantation induit dans un conducteur fermé mobile, supposez ce conducteur parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité; calculez le travail produit, pendant un déplacement élémentaire du conducteur, par les actions de l'aimant sur ce courant; divisez-le par la durée du déplacement élémentaire, et changez le signe du quotient. C'est l'extension de la loi de Neumann à l'induction électromagnétique.

§ 3. — Relations entre les forces électromagnétiques et les forces électrodynamiques.

Les forces électromagnétiques qui s'exercent entre des aimants et des courants fermés et uniformes admettent pour potentiel la quantité

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \mathbf{S}\, \mathfrak{M}\, dv\, \mathrm{J} \int \Delta\, ds. \tag{7}$$

De là on déduit immédiatement une conséquence qui abrège singulièrement l'étude des actions électromagnétiques.

Entourons l'axe magnétique de l'élément dv d'un petit circuit, d'aire Ω', parcouru, dans le sens positif par rapport à cet axe magnétique, par un courant d'intensité J', telle que l'on ait

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathrm{J}'\Omega' = \mathfrak{M}\, dv.$$

Ce sera le courant élémentaire équivalent, au point de vue de l'Électrodynamique, à l'élément magnétique $\mathfrak{M}\, dv$.

Le potentiel électrodynamique de ce petit courant et du courant fermé considéré a pour valeur

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathrm{J}'\Omega'\mathrm{J} \int \Delta\, ds = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{M}\, dv\, \mathrm{J} \int \Delta\, ds.$$

Si l'on compare cette expression à l'expression (7), on arrive sans peine à la proposition suivante :

Pour obtenir les grandeurs géométriques qui représentent les actions mutuelles d'un courant fermé et d'un élément magnétique, il suffit de multiplier par

$$-\frac{\sqrt{2}\mathfrak{H}}{4\pi\mathfrak{A}}$$

les grandeurs géométriques qui représentent les actions mutuelles du courant fermé considéré et du courant équivalent, au point de vue de l'Électrodynamique, à l'élément magnétique.

Cette proposition ramène tous les problèmes relatifs aux actions électromagnétiques à des problèmes relatifs aux actions électrodynamiques, et par conséquent fournit la solution des premiers lorsque les derniers sont résolus.

§ 4. — **Remarques sur la généralité des lois de l'Électromagnétisme.**

Pour établir, au Chapitre VI, les lois de l'aimantation par les courants, nous avons supposé les aimants et les conducteurs maintenus immobiles ; pour étudier, au présent Chapitre, les lois des forces électromagnétiques, nous avons supposé les aimants doués d'un magnétisme invariable et les courants d'une intensité constante. Ce mode de démonstration fait naître dans l'esprit un doute qu'il importe d'éclaircir : les lois de l'aimantation par les courants ne seraient-elles pas autres dans un système animé de mouvements que dans un système immobile? Les actions électromagnétiques exercées entre un aimant dont l'aimantation varie et un courant dont l'intensité change ne seraient-elles pas autres que les actions électromagnétiques exercées entre un aimant permanent et un courant invariable?

Nous allons montrer que ce doute n'est pas fondé; que les restrictions apportées à nos démonstrations avaient pour but de faciliter les calculs, mais que les résultats obtenus sont indépendants de ces restrictions.

Considérons un système renfermant des courants, des aimants

permanents 1, des corps parfaitement doux 2. L'énergie interne de ce système est donnée par l'égalité (8). La quantité de chaleur dégagée par ce système pendant le temps dt est donnée par l'égalité

$$\mathrm{E}\,dQ = -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + d\mathfrak{T}_e - \delta \sum \frac{mv^2}{2},$$

ou bien, en négligeant, suivant l'usage établi dans les questions de ce genre, le terme

$$\sum q\,\delta\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right),$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\,dQ = -\mathrm{E}\,\delta\Upsilon - \delta\mathrm{W} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)\mathrm{JJ}'ds\,ds' \\ &\quad - \delta\mathfrak{F} - \delta\int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}\right]dv + d\mathfrak{T}_e - \delta\sum\frac{mv^2}{2}. \end{aligned}\right.$$

En second lieu, l'aimantation variant seulement sur les corps parfaitement doux, on doit avoir

$$(10)\quad \mathrm{E}\,dQ = \sum\left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathrm{T}}\right)\mathrm{J}\,dt + \mathrm{T}\,\delta\int\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}\,dv.$$

D'ailleurs, les lois de l'induction électromagnétique donnent

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left(\mathcal{E} - \mathrm{T}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathrm{T}}\right)\mathrm{J}\,dt \\ &\quad = -\mathrm{E}\,\mathrm{D}\Upsilon - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\mathrm{D}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)\mathrm{JJ}'ds\,ds' \\ &\qquad - \mathfrak{A}^2\,\Delta\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)\mathrm{JJ}'ds\,ds' \\ &\quad + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathrm{S}\,\mathfrak{M}\,dv\,\mathrm{J}\,\delta\int\Delta\,ds + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathrm{S}\,\delta\mathfrak{M}\,\mathrm{J}\int\Delta\,ds\,dv. \end{aligned}\right.$$

Enfin on a

$$(12)\quad d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_i - \delta\sum\frac{mv^2}{2} = 0.$$

Les égalités (9), (10), (11), (12) donnent

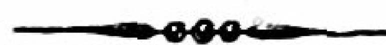
$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\,\Delta\Upsilon + \Delta\mathrm{W} + \Delta\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)\mathrm{JJ}'ds\,ds' \\ &\quad + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathrm{S}\,\mathfrak{M}\,dv\,\mathrm{J}\,\delta\int\Delta\,ds + d\mathfrak{T}_i \\ &\qquad + \mathrm{D}\mathfrak{F}\int\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\,dv + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathrm{S}\,\delta\mathfrak{M}\,dv\,\mathrm{J}\int\Delta\,ds = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette identité doit avoir lieu quelle que soit la modification subie par le système pendant le temps dt. Or, les termes des deux premières lignes dépendent seulement des variations des paramètres qui fixent la situation géométrique des diverses parties du système et les termes de la dernière ligne dépendent seulement des variations des autres paramètres. L'identité (13) se scinde donc en deux autres qui sont

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} & E\Delta\Upsilon + \Delta W + \Delta\mathcal{F} \\ & \qquad - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Delta\sum\left(\frac{1-\lambda}{2}\frac{}{r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right) JJ'ds\,ds' \\ & \qquad\qquad + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathbf{S}\,\mathfrak{M}\,dv\,J\,\delta\int\Delta\,ds + d\mathfrak{G}_i = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(15)\qquad D\mathcal{F} + \int\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial\mathfrak{M}}\delta\mathfrak{M}\,dv + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathbf{S}\,\delta\mathfrak{M}\,dv\,J\int\Delta\,ds = 0.$$

L'égalité (14) redonne les lois des forces électrodynamiques et électromagnétiques telles que nous les avons trouvées dans ce qui précède, et l'identité (15) redonne les lois de l'aimantation par les courants telles que nous les avons établies au Chapitre VI.



CHAPITRE IX.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES MACHINES DYNAMO-ÉLECTRIQUES.

Il n'entre nullement dans le plan de cet Ouvrage de traiter des machines fondées sur les lois de l'électrodynamique et de l'Électromagnétisme. La description de ces machines et des diverses particularités de leur fonctionnement ressortit à l'art de l'ingénieur. Les phénomènes dont les machines dynamo-électriques ou magnéto-électriques sont le siège sont en général trop compliqués pour pouvoir donner prise à une théorie rigoureuse; on doit se contenter, pour les étudier, de formules semi-théoriques et semi-empiriques.

Toutefois, le fonctionnement de ces machines, quelle qu'en soit la disposition particulière, est soumis à certaines lois générales et simples, et c'est à l'établissement de ces lois que sera consacré le présent Chapitre. Ces lois résultent immédiatement des principes établis dans les Chapitres précédents.

Nous donnerons le nom de *système dynamo-électrique* à un système formé de morceaux de fer doux et de conducteurs fermés susceptibles d'être parcourus par des courants uniformes.

Nous donnerons le nom de *système magnéto-électrique* à un système formé d'aimants permanents et de conducteurs fermés susceptibles d'être parcourus par des courants uniformes.

Enfin un *système mixte* sera un système renfermant à la fois des fers doux et des aimants permanents.

Pour de pareils systèmes, on peut écrire une égalité qui conduit à d'importantes conséquences.

Pendant le temps dt, la quantité de chaleur $d\mathfrak{Q}$ dégagée par le système doit être donnée par l'égalité (10) du Chapitre précédent,

et aussi par l'égalité (9) du même Chapitre. Posons

$$(1)\qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)JJ'\,ds\,ds'.$$

Ces égalités nous donneront

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum\left(\mathcal{E} - T\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial T}\right)J\,dt = &-E\,\delta\Upsilon - \delta W - \delta\mathfrak{J} - \delta\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\,dv \\ &+ \delta\Pi + d\mathfrak{T}_e - \delta\sum\frac{mv^2}{2}. \end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord que le système ne renferme pas de pile thermo-électrique ou hydro-électrique. Les forces électromotrices ne dépendront pas explicitement de la température. On aura, en outre, $E\,\delta\Upsilon = -d\tau$, $d\tau$ étant le travail des frottements intérieurs au système. D'ailleurs, si R est la résistance du segment de fil où agit la force électromotrice $\mathcal{E}$, on aura

$$\mathcal{E} = RJ.$$

L'égalité (2) deviendra donc, dans ce cas,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum RJ^2\,dt = &-\delta W - \delta\mathfrak{J} + \delta\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\,dv \\ &+ \delta\Pi + d\mathfrak{T}_e - \delta\sum\frac{mv^2}{2} - d\tau. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité (3) va nous permettre de démontrer certaines propositions intéressantes.

Imaginons un système formé seulement de fers doux et de conducteurs. A l'instant t_0, on suppose les fers doux désaimantés, les conducteurs privés de mouvement, le système à l'état neutre et immobile. Peut-il arriver qu'à l'instant t_1 les conducteurs soient parcourus par des courants, les fers doux aimantés, le système électrisé et en mouvement?

Pour répondre à cette question, intégrons les deux membres de l'égalité (3) entre t_0 et t_1, en remarquant que, à l'instant t_0, on a

$$W = 0,\qquad \mathfrak{J} = 0,\qquad \int\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\,dv = 0,\qquad \Pi = 0,\qquad \sum\frac{mv^2}{2} = 0.$$

Nous aurons

$$\sum\int_{t_0}^{t_1} RJ^2\,dt + \sum\frac{mv_1^2}{2} + \int d\tau = \int d\mathfrak{T}_e + \Pi - W - \mathfrak{J} - \int\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\,dv.$$

Le premier membre est essentiellement positif, à moins que tous les courants ne soient égaux à o, et que tous les conducteurs ne soient immobiles.

Si tous les courants ne sont pas égaux à o, Π est certainement négatif.

Si tous les conducteurs ne sont pas à l'état neutre, W est certainement positif.

Si tous les fers doux ne sont pas désaimantés, $\left[\mathcal{F} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})\, dv\right]$ est certainement positif.

Il n'y a donc que deux manières de satisfaire à l'équation précédente :

Ou bien tous les corps du système demeurent en repos, privés de courants, de charges électriques, d'aimantation.

Ou bien $\int d\mathfrak{E}_e$ est positif.

Ainsi, *si nous considérons un système dynamo-électrique ne renfermant pas de pile, qui soit primitivement immobile, à l'état neutre, désaimanté et privé de courants, il persistera indéfiniment dans cet état, à moins qu'on ne le mette en mouvement en lui appliquant des forces extérieures capables de produire un travail positif.*

Une machine dynamo-électrique ne s'amorce donc pas d'elle-même, mais seulement par le jeu d'un moteur étranger.

Concevons maintenant une machine dynamo-électrique, magnéto-électrique ou mixte, en mouvement et amorcée à l'instant t_0, et intégrons les deux membres de l'égalité (3) entre l'instant t_0 et un instant ultérieur t. Nous aurons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \int_{t_0}^{t} \mathrm{RJ}^2\, dt + \int_{t_0}^{t_1} d\tau \\ &\quad = -\left[\mathrm{W} + \mathcal{F} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})\, dv - \Pi + \sum \frac{mv^2}{2}\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} d\mathfrak{E}_e. \end{aligned}\right.$$

La quantité

$$-\left[\mathrm{W} + \mathcal{F} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})\, dv - \Pi + \sum \frac{mv^2}{2}\right]_{t_0}^{t_1}$$

ne peut surpasser la quantité positive

$$\left[W + \mathfrak{J} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\,dv - \Pi + \sum \frac{mv^2}{2}\right]_{t=t_0}.$$

C'est donc une quantité qui admet une limite supérieure.

Supposons qu'à partir de l'instant t_0 le moteur ait cessé de fournir du travail au système, on aura alors $\int_{t_0}^{t_1} d\mathfrak{T}_e = 0$. On voit donc que, quel que soit t_1, la quantité

$$\sum \int_{t_0}^{t_1} RJ^2\,dt + \int_{t_0}^{t_1} d\tau$$

ne peut surpasser une certaine limite, ce qui exige que toutes les intensités J tendent vers o lorsque t_1 croît au delà de toute limite et que la force vive du système tende aussi vers o. Ainsi, *une machine dynamo-électrique, ou magnéto-électrique, ou mixte, étant amorcée, si l'on cesse de lui fournir un travail extérieur positif, elle se désamorce.*

Imaginons un système dynamo-électrique, magnéto-électrique ou mixte, qui sert d'intermédiaire entre un moteur fournissant, dans le temps dt, un travail externe $d\mathfrak{I}$ et une machine-outil utilisant un travail $d\mathfrak{I}'$; désignons par $d\mathfrak{I}''$ le travail absorbé par les frottements contre les corps extérieurs au système.

Nous aurons

$$d\mathfrak{T}_e = d\mathfrak{I} - d\mathfrak{I}' - d\mathfrak{I}'',$$

et l'égalité (3), intégrée entre t_0 et t_1, donnera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\mathfrak{I}}{dt} - \frac{d\mathfrak{I}'}{dt} - \frac{d\mathfrak{I}''}{dt} - \frac{d\tau}{dt} - \frac{d}{dt}\sum \frac{mv^2}{2}\right) dt \\ &\quad = \sum \int_{t_0}^{t_1} RJ^2\,dt - \left[W + \mathfrak{J} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\,dv - \Pi\right]_{t_0}^{t_0}. \end{aligned}\right.$$

Si la machine ne se désamorce pas, le premier terme du second membre croît au delà de toute limite avec t_1 et le second demeure toujours supérieur à une certaine limite. Le premier membre doit donc croître au delà de toute limite avec t_1. Si la transmission, au lieu d'être électrique, était établie par un moyen mécanique, ce premier membre serait identiquement nul. Il y a là une différence considérable entre les transmissions électriques et les transmissions mécaniques.

Faisons une application particulière du théorème qui précède :

Imaginons un système dynamo-électrique, ou magnéto-électrique, ou mixte, qui, périodiquement, revienne au même état avec la même force vive. On peut se demander *a priori* si, pendant la durée θ d'une période, un semblable système mettra en mouvement, par induction, une quantité d'électricité différente de o; si les forces électrodynamiques ou électromagnétiques effectueront un travail différent de o. Il est aisé de voir qu'il en peut être ainsi, car la quantité d'électricité mise en mouvement, dans chaque élément conducteur, pendant un temps infiniment petit; le travail effectué par les forces électrodynamiques ou électromagnétiques, pendant un temps infiniment petit, se déduisent de la différentiation de fonctions uniformes et continues de l'état du système, mais elles n'en sont pas les différentielles *totales*. De fait, en étudiant l'induction unipolaire, nous n'avons vu qu'un système repassant périodiquement par la même forme pouvait mettre en mouvement, durant une période, une quantité d'électricité différente de o. Au Chapitre XI, l'étude des rotations électromagnétiques mettra le même fait en évidence pour les forces électrodynamiques ou électromagnétiques.

Considérons donc un système qui, au bout de chaque période de temps θ, repasse par le même état avec la même force vive. Si le système est formé d'une machine dynamo-électrique analogue à celles qu'emploie l'industrie, la période θ sera la durée d'un tour de bobine; s'il renferme deux semblables machines tournant avec des vitesses angulaires différentes, on pourra supposer ces deux vitesses commensurables et prendre pour θ un commun multiple des durées de révolution dans chacune des deux bobines.

Dans l'égalité (5), faisons

$$t_1 = t_0 + \theta.$$

Nous aurons alors

$$\left[\mathrm{W} + \mathfrak{J} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})\, dv - \Pi + \sum \frac{mv^2}{2}\right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

et l'égalité (5) deviendra

$$\int_{t_0}^{t_0+\theta} \left(\frac{d\mathfrak{J}}{dt} - \frac{d\mathfrak{J}'}{dt} - \frac{d\tau}{dt} - \frac{d\mathfrak{J}''}{dt}\right) dt = \sum \int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathrm{RJ}^2\, dt.$$

La quantité

$$\Theta = \frac{1}{\theta}\int_{t_t}^{t_0+\theta} \frac{d\mathfrak{F}}{dt}\,dt$$

est la valeur moyenne du travail moteur par unité de temps.

La quantité

$$\Theta' = \frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta} \frac{d\mathfrak{F}'}{dt}\,dt$$

est la valeur moyenne du travail transmis par unité de temps.

La quantité

$$\Theta'' = \frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta} \left(\frac{d\mathfrak{F}''}{dt}\,dt + \frac{d\tau}{dt}\,dt\right)$$

est la valeur moyenne du travail employé par les résistances passives.

Moyennant ces notations, on peut écrire

$$\Theta = \Theta' + \Theta'' + \frac{1}{\theta}\sum\int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathrm{RJ}^2\,dt. \tag{6}$$

Lorsqu'un système dynamo-électrique, ou magnéto-électrique, ou mixte, employé à transmettre le travail d'un moteur à une machine-outil, est en marche régulière, la quantité de travail qu'il emprunte au moteur est supérieure à la quantité de travail qu'il emploie à actionner l'outil et à vaincre les résistances passives. Ces quantités de travail sont égales, si la transmission s'effectue par des moyens mécaniques.

Le *rendement* de la machine est la quantité

$$\rho = \frac{\Theta'}{\Theta}.$$

D'après l'égalité (6), on a

$$\rho = 1 - \frac{\Theta'' + \frac{1}{\theta}\sum\int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathrm{RJ}^2\,dt}{\Theta}.$$

Lorsque la transmission s'effectue par des moyens mécaniques, on a

$$\rho = 1 - \frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Le rendement d'une transmission mécanique tend vers 1 lorsque

les frottements deviennent infiniment faibles. Dans les mêmes conditions, le rendement d'une transmission électrique tend vers la limite, inférieure à l'unité,

$$1 - \frac{\frac{1}{\theta}\sum\int_{t_0}^{t_0+\theta} RJ^2\,dt}{\Theta}.$$

Une transmission électrique est donc comparable, au point de vue du rendement, à une transmission mécanique dans laquelle les frottements absorberaient en moyenne, pendant l'unité de temps, un travail

$$\Theta'' + \frac{1}{\theta}\sum\int_{t_0}^{t_0+\theta} RJ^2\,dt.$$

Une transmission électrique serait donc moins avantageuse qu'une transmission mécanique, si les frottements de ces deux transmissions absorbaient en moyenne le même travail par unité de temps. Mais il se peut que, en substituant une transmission électrique à une transmission mécanique, on diminue le travail Θ'' absorbé par les frottements pendant l'unité de temps d'une quantité supérieure à

$$\frac{1}{\theta}\sum\int_{t_0}^{t_0+\theta} RJ^2\,dt.$$

La substitution de la première transmission à la seconde sera alors avantageuse.

La quantité

$$\sum\int_{t_0}^{t_0+\theta} RJ^2\,dt$$

a une signification simple. Nous avons vu, en effet, que l'on avait

$$\sum RJ^2\,dt = \sum\left(\mathcal{E} - T\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial T}\right)J\,dt.$$

D'ailleurs, la quantité de chaleur dégagée par le système dans le temps dt a pour valeur

$$dQ = \frac{1}{E}\sum\left(\mathcal{E} - T\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial T}\right)J\,dt + \frac{T}{E}\delta\int\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M}, T)}{dT}\,dv.$$

Si l'on observe que la quantité $\int\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\,dv$ reprend à l'in-

stant $(t_0 + \theta)$ la même valeur qu'à l'instant t_0, on voit que la quantité de chaleur Q dégagée par le système pendant la période θ sera donnée par l'égalité

$$Q = \frac{1}{E} \sum \int_{t_0}^{t_0+\theta} RJ^2 dt.$$

Étudions maintenant un système renfermant des forces électromotrices hydro-électriques. Si η désigne l'une de ces forces, le premier membre de l'égalité (1) aura pour valeur

$$\sum RJ^2 dt - T \sum \frac{\partial \eta}{\partial T} J\, dt.$$

On aura d'ailleurs

$$-E\, \delta \Upsilon = \sum \left(\eta - T \frac{\partial \eta}{\partial T}\right) J\, dt.$$

L'égalité (3) sera donc remplacée par la suivante

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum RJ^2 dt - \sum \eta J\, dt = &- \delta W - \delta \mathcal{F} - \delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\, dv \\ &+ \delta \Pi + d\mathfrak{T}_e - \delta \sum \frac{mv^2}{2} - d\tau. \end{aligned} \right.$$

Si les piles que renferme le système sont disposées de telle sorte que $\sum \eta J\, dt$ soit positif, on verra que le système pourra non seulement s'amorcer de lui-même, mais même s'amorcer en effectuant un certain travail.

En appliquant l'égalité précédente à un système qui repasse périodiquement par le même état électrodynamique et magnétique, on trouve

$$(8) \quad \sum \int_{t_0}^{t_0+\theta} RJ^2 dt - \int_{t_0}^{t_0+\theta} \frac{d\tau}{dt} dt = \sum \int_{t_0}^{t_0+\theta} \eta J\, dt + \int_{t_0}^{t_0+\theta} d\mathfrak{T}_e.$$

Dans ce cas, il n'est plus nécessaire de fournir au système plus de travail qu'il n'en peut rendre. Il peut, au contraire, rendre plus de travail qu'on ne lui en fournit. Le travail ainsi rendu est toujours inférieur à

$$\sum \int_{t_0}^{t_0+\theta} \eta J\, dt,$$

c'est-à-dire au travail non compensé engendré par les réactions

chimiques dont les piles sont le siège pendant le temps θ. Il ne peut atteindre cette limite sans que la machine se désamorce.

Il est facile de voir que la quantité de chaleur Q engendrée dans le système pendant le temps τ est donnée par l'égalité

$$EQ = \sum \int_{t_0}^{t_0+\theta} RJ^2\, dt - T \sum \int_{t_0}^{t_0+\theta} \frac{d\eta}{dT} J\, dt,$$

ce qui peut encore s'écrire

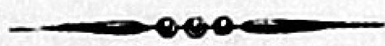
$$EQ = \int_{t_0}^{t_0+\theta} d\mathfrak{T}_e + \sum \int_{t_0}^{t_0+\theta} \left(\eta - T\frac{\partial\eta}{\partial T}\right) J\, dt.$$

Cette dernière expression montre que *la quantité de chaleur dégagée dans le système pendant un certain temps est la somme de la quantité de chaleur que dégagerait la réaction chimique produite dans les piles pendant le même temps et de la chaleur équivalente au travail produit par les forces extérieures.*

Ces deux égalités rendent compte des expériences faites par divers auteurs, et notamment par Favre [1], sur les phénomènes calorifiques qui se produisent dans un système composé d'une pile et d'un électromoteur.

---

[1] P.-A. Favre, *Recherches sur les courants hydro-électriques* (troisième Partie). *Relation entre la chaleur dépensée par un courant qui produit un travail mécanique et la chaleur engendrée par l'action chimique qui développe ce courant* (*Comptes rendus*, t. XLV, p. 56; 1857).



CHAPITRE X.

ACTION D'UN COURANT FERMÉ ET UNIFORME SUR UN AIMANT.

§ 1. — Action d'un courant fermé et uniforme sur un aimant. Expérience de Biot et Savart.

La proposition démontrée à la fin du § 3 du Chapitre VIII nous fournit immédiatement la loi de l'action exercée par un courant fermé et uniforme sur un aimant. Si l'on observe que le petit courant plan équivalent à un élément magnétique est assimilable à un solénoïde infiniment court dont les pôles coïncideraient avec les pôles de même nom de l'élément magnétique, et si l'on se reporte aux égalités (13) (Livre XIV, Chap. X), qui définissent l'action d'un courant fermé et uniforme sur un pôle de solénoïde, on arrive sans peine à la conséquence suivante :

Un courant fermé et uniforme d'intensité J *agit sur un aimant comme si chaque élément ds de courant, placé au point* (x, y, z), *exerçait sur chaque masse magnétique* μ, *placée au point* (ξ, η, ζ), *une force ayant pour composantes*

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu J \frac{1}{r^3}\left[(y-\eta)\frac{dz}{ds} - (z-\zeta)\frac{dy}{ds}\right] ds,\\
Y &= \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu J \frac{1}{r^3}\left[(z-\zeta)\frac{dx}{ds} - (x-\xi)\frac{dz}{ds}\right] ds,\\
Z &= \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu J \frac{1}{r^3}\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds} - (y-\eta)\frac{dx}{ds}\right] ds.
\end{aligned}\right.
$$

On peut, comme le voulait Biot, supposer cette force appliquée au point (ξ, η, ζ) *où se trouve la masse* μ, *ou bien, comme le voulait Ampère, au point* (x, y, z) *où se trouve l'élément ds, ce dernier point étant supposé invariablement lié à l'aimant.*

Cette loi est généralement connue sous le nom de *loi de Laplace*.

On sait qu'on peut encore l'énoncer de la façon suivante :

Un courant fermé et uniforme agit sur un aimant comme si chaque élément ds du courant exerçait sur chaque masse magnétique μ *une force normale à l'élément de courant, normale à la ligne de jonction de l'élément ds et de la masse* μ, *dirigée vers la gauche de l'observateur placé en l'élément de courant et regardant la masse* μ, *et ayant pour grandeur*

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu J \frac{\sin(r, ds)}{r^2} ds.$$

Le point d'application de cette force peut être pris coïncidant soit avec la masse μ, *soit avec l'élément ds.*

Les développements donnés au Livre XIV, Chapitre X, nous fournissent quelques conséquences de cette loi, qui sont susceptibles d'être vérifiées expérimentalement.

1° Un élément magnétique horizontal, mobile autour d'un axe vertical, soumis à l'action d'un courant rectiligne, indéfini, rencontrant l'axe, se mettra en croix avec le courant; le pôle austral sera à droite du courant si la constante $\mathfrak{H}$ est positive, et à gauche si la constante $\mathfrak{H}$ est négative.

On sait qu'en effet, dans ces conditions, une petite aiguille aimantée se met en croix avec le courant, et que son pôle austral se place *à gauche* du courant. C'est la célèbre expérience d'Œrstedt [1], faite en 1820, point de départ de toutes les recherches qui ont constitué l'Électrodynamique et l'Électromagnétisme. L'expérience d'Œrstedt est donc une première vérification expérimentale des lois précédentes et, de plus, elle établit ce fait capital :

La constante $\mathfrak{H}$ *est négative.*

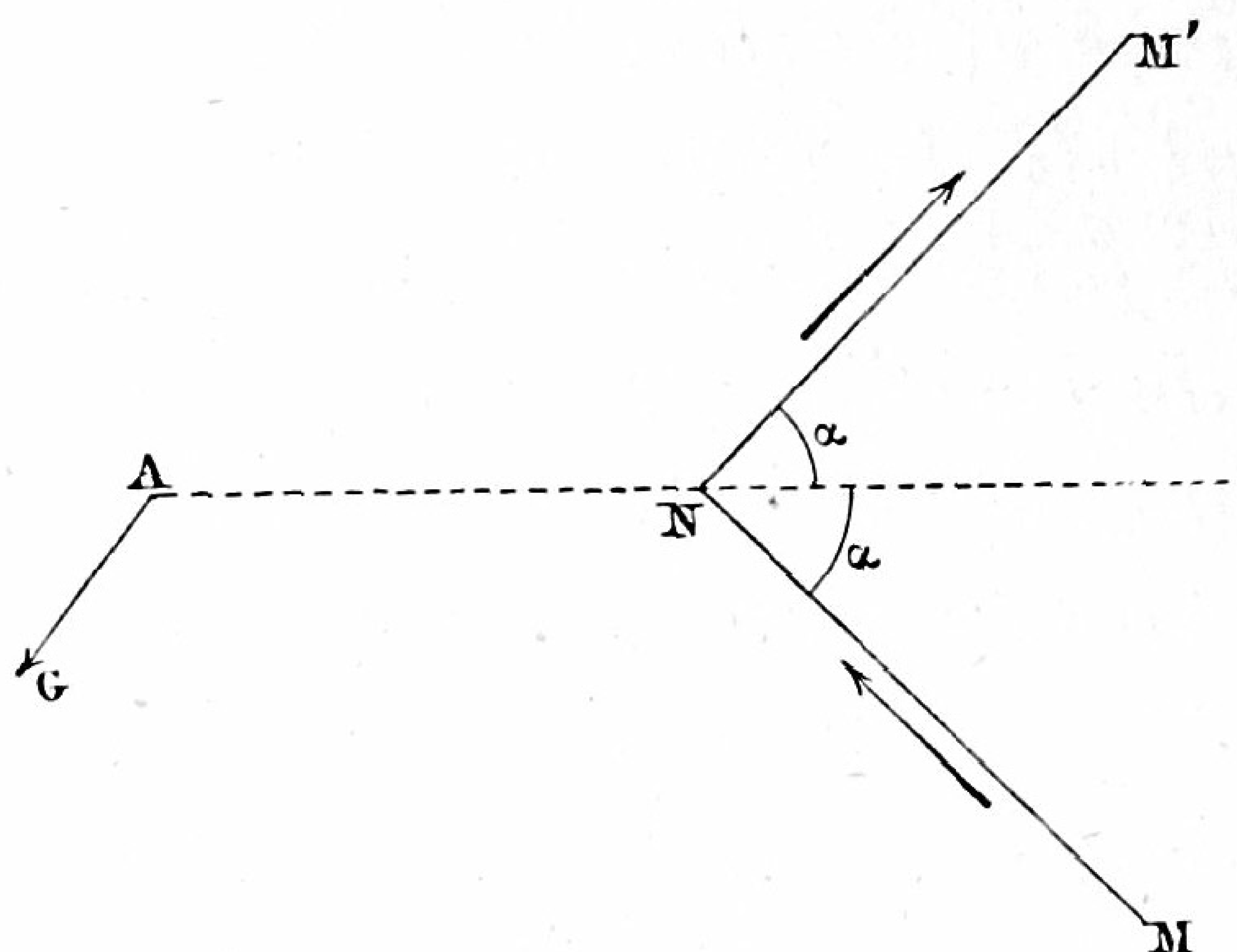
2° Imaginons un courant indéfini, situé dans un plan vertical, parcourant les deux côtés MN, NM′ (*fig.* 64) d'un angle 2α;

---

[1] ŒRSTEDT, *Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticum;* Hafniae, 1820 (*Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique,* t. II, p. 1).

sur le prolongement de la bissectrice se trouve un pôle austral d'aimant A; ρ est la distance AN.

Fig. 64.



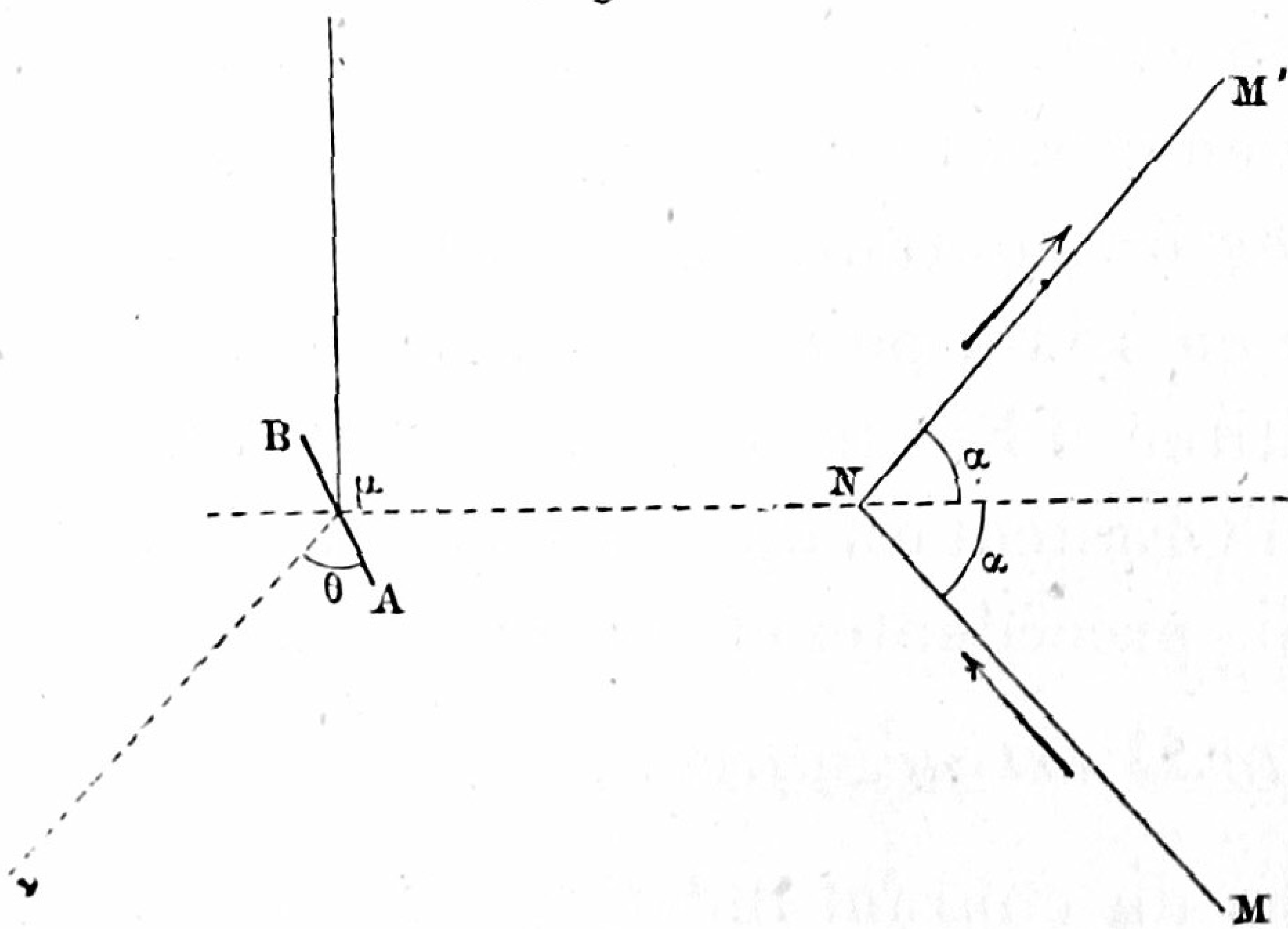
Le courant exerce sur le pôle d'aimant une force horizontale G, dirigée en avant du plan du courant et ayant pour grandeur

$$G = -\frac{\mathfrak{H}}{2\pi}\frac{\mu J}{\rho}\tang\frac{\alpha}{2}.$$

De ce résultat, on peut déduire une formule susceptible d'une vérification expérimentale.

Le plan du courant (*fig.* 65) est perpendiculaire à la méridienne magnétique $\mu\nu$ dirigée vers la gauche du courant.

Fig. 65.



En μ, sur le prolongement de la bissectrice de l'angle MNM', se trouve le point où un fil de cocon vient soutenir un petit aimant horizontal AB.

Le courant exerce aux pôles A et B des forces données par la

loi précédente. Ces forces tendent à orienter BA suivant $\mu\nu$. Le magnétisme terrestre exerce une action semblable. $\mu\nu$ est donc la position d'équilibre de BA.

Écartons BA de $\mu\nu$ d'un angle θ vers l'ouest. Un couple tendra à ramener BA suivant $\mu\nu$. Calculons le moment de ce couple.

L'action du courant fournit à ce moment un terme

$$-\frac{\mathfrak{H}}{2\pi}\frac{J}{\rho}\mu l \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\sin\theta,$$

l étant la distance des deux pôles. L'action du magnétisme terrestre fournit un terme

$$\mu l H \sin\theta,$$

H étant la composante horizontale de la force magnétique terrestre.

Si l'on désigne par M le moment magnétique μl de l'aimant, on voit que le couple à calculer aura pour moment

$$M\left(H - \frac{\mathfrak{H}}{2\pi}\frac{J}{\rho}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right)\sin\theta.$$

Après avoir écarté l'aimant de sa position d'équilibre, laissons-le osciller. Soit I son moment d'inertie par rapport au fil de suspension. Le nombre n d'oscillations par seconde aura pour valeur

$$n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{H - \frac{\mathfrak{H}}{2\pi} J \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\rho}}{I}}. \tag{2}$$

Sur le même aimant, faisons agir successivement, à des distances différentes, des conducteurs formant des angles différents, traversés par des courants d'intensité différente.

Soient n, n', n'', ... les nombres d'oscillations trouvés dans des expériences différentes. D'après la formule (2), nous aurons

$$\frac{n''^2 - n'^2}{n'^2 - n^2} = \frac{\frac{J''}{\rho''}\operatorname{tang}\frac{\alpha''}{2} - \frac{J'}{\rho'}\operatorname{tang}\frac{\alpha'}{2}}{\frac{J'}{\rho'}\operatorname{tang}\frac{\alpha'}{2} - \frac{J}{\rho}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}.$$

et, dans le cas particulier où les courants ont la même intensité,

$$(3)\qquad \frac{n''^2 - n'^2}{n'^2 - n^2} = \frac{\frac{1}{\rho''}\tan\frac{\alpha''}{2} - \frac{1}{\rho'}\tan\frac{\alpha'}{2}}{\frac{1}{\rho'}\tan\frac{\alpha'}{2} - \frac{1}{\rho}\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

Cette relation se prête aisément à des vérifications expérimentales.

Biot et Savart [1], en opérant sur un courant rectiligne, avaient d'abord vérifié l'égalité

$$\frac{n''^2 - n'^2}{n'^2 - n^2} = \frac{\frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho'}}{\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}}$$

et en avaient conclu que l'action d'un courant rectiligne sur un pôle d'aimant est en raison inverse de la distance du courant au pôle. Laplace [2] montra que cette loi s'accordait avec une action en raison inverse du carré de la distance exercée par chaque élément de courant sur un pôle d'aimant.

Plus tard, Biot et Savart [3], en étudiant l'action d'un courant angulaire, crurent déduire de leurs expériences la relation

$$\frac{n''^2 - n'^2}{n'^2 - n^2} = \frac{\frac{1}{\rho''}\sin\alpha'' - \frac{1}{\rho'}\sin\alpha'}{\frac{1}{\rho'}\sin\alpha' - \frac{1}{\rho}\sin\alpha}.$$

Mais Savary [4] montra que, dans les idées d'Ampère, cette rela-

---

(1) BIOT et SAVART, *Mémoire sur l'action d'un fil rectiligne sur un aimant*, lu à l'Académie des Sciences le 30 octobre 1820 et non publié (*voir* BIOT, *Précis élémentaire de Physique*, t. II, p. 704; 1823, et *Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique*, t. II, p. 80).

(2) Laplace n'a rien publié à ce sujet; nous ne connaissons sa participation à la découverte des lois de l'Électromagnétisme que par le témoignage de Biot.

(3) BIOT et SAVART, *Mémoire sur l'action d'un fil oblique sur un aimant*, communiqué à l'Académie le 18 décembre 1820 et non publié (*voir* BIOT, *Précis élémentaire de Physique*, t. II, p. 704; 1823, et *Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique*, t. II, p. 80).

(4) F. SAVARY, *Mémoire sur l'application du calcul aux phénomènes électrodynamiques* (*Journal de Physique*, t. XCVI, p. 1; février 1883. — *Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique*, t. II, p. 364).

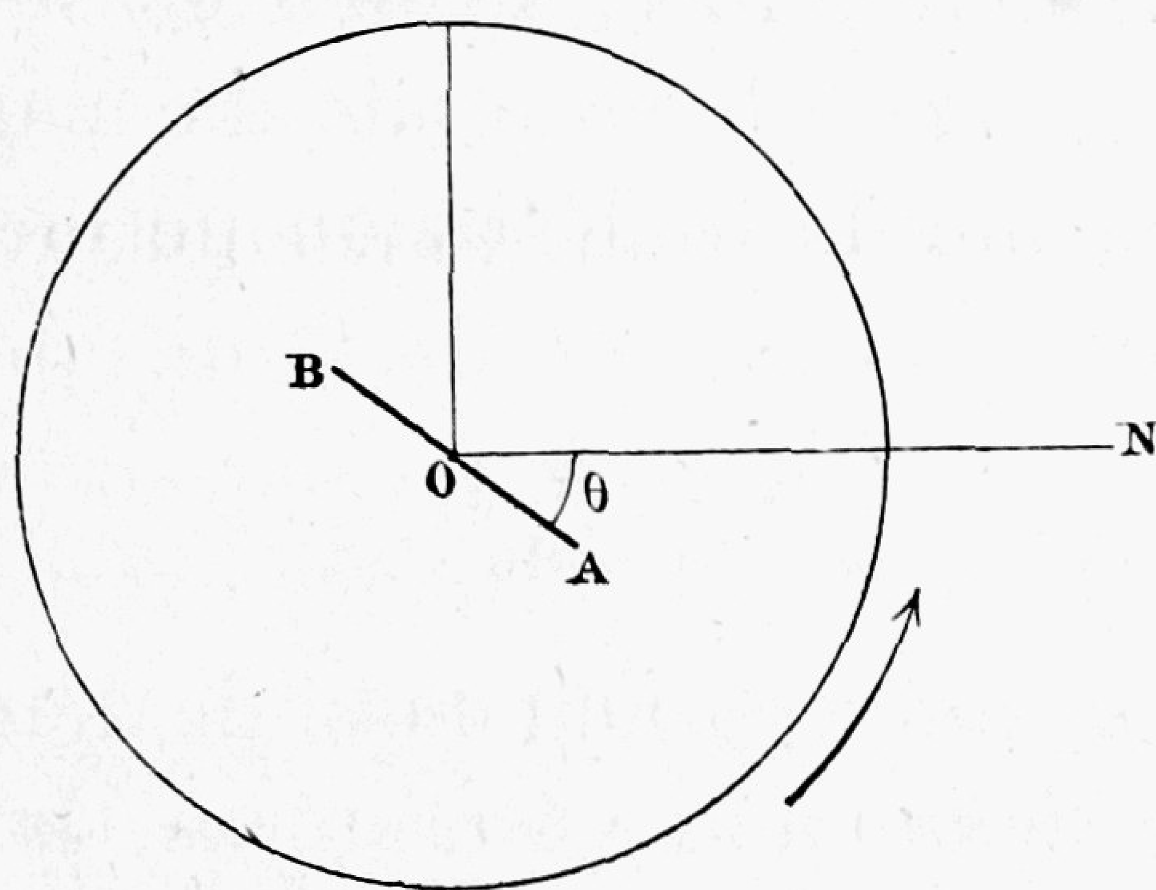
tion devait être remplacée par la relation (3), avec laquelle, d'ailleurs, s'accordèrent les expériences postérieures de Biot et Savart.

§ 2. — Application. — Boussole des tangentes.

Comme application des formules qui représentent l'action d'un courant sur un élément magnétique, nous indiquerons le principe fondamental de la boussole des tangentes.

Un cadre circulaire (*fig.* 66), placé dans le plan du méridien magnétique, est parcouru par un courant d'intensité J. Un très

Fig. 66.



petit aimant AB est suspendu au centre de ce cadre par un fil de cocon. Supposons l'aimant BA dévié d'un angle θ à l'est de la méridienne magnétique, que nous supposons en même temps être la gauche du courant. Déterminons le couple qui tend à faire croître cet angle θ.

Si M est le moment magnétique de l'aimant et H la composante horizontale du magnétisme terrestre, l'action du magnétisme terrestre fournit à ce couple un terme

$$-\mathrm{HM}\sin\theta.$$

Chaque élément ds du courant exerce sur la masse μ, concentrée au pôle A, une force normale au plan du cadre, dirigée vers la gauche et ayant pour valeur

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu\mathrm{J}\frac{\sin(r, ds)}{r^2}ds.$$

Ici r est sensiblement égal au rayon R du cadre et $\sin(r, ds)$ à

l'unité. Toutes ces forces, toutes les forces analogues agissant sur le pôle B, fournissent donc au couple un contingent

$$-\frac{\mathfrak{H}}{2}\frac{MJ}{R}\cos\theta.$$

Le couple cherché a pour valeur

$$-M\left(H\sin\theta + \frac{\mathfrak{H}}{2}\frac{J}{R}\cos\theta\right),$$

et la condition d'équilibre du système est exprimée par l'égalité

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}J = \frac{RH}{2\pi}\tang\theta.$$

Si l'on a eu soin de déterminer, au lieu où se fait l'observation, la valeur de la composante horizontale du magnétisme terrestre, la lecture de la tangente de la déviation permettra de déterminer la valeur du produit

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}J.$$

La boussole des tangentes permet aussi de déterminer, lorsqu'on l'emploie comme *galvanomètre balistique,* la quantité d'électricité que transporte un courant d'induction de très peu de durée.

Imaginons qu'à l'instant $t = 0$, le cadre ne soit traversé par aucun courant et que l'aiguille soit au repos suivant la méridienne magnétique. On lance dans le cadre un courant variable qui dure un temps extrêmement court, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \tau$. Pendant ce temps très court, θ ne varie qu'extrêmement peu. L'action du courant sur l'aimant est donc assimilable à une *percussion* dont le moment par rapport à l'axe de suspension est

$$-\frac{M\mathfrak{H}}{2R}\int_0^\tau J\,dt = -\frac{M\mathfrak{H}}{2R}Q,$$

Q étant la quantité d'électricité que l'on veut évaluer. Cette percussion donne à l'aiguille une vitesse angulaire initiale ω_0, telle que

$$I\omega_0 = -\frac{M\mathfrak{H}}{2R}Q,$$

I étant le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à l'axe de suspension.

A partir du temps τ l'aiguille n'est plus soumise qu'à l'action du magnétisme terrestre, dont le moment par rapport à l'axe de suspension est

$$-\text{MH}\sin\theta.$$

La vitesse angulaire changera donc de signe, en passant par o, au moment où θ prendra la valeur Θ définie par l'égalité

$$-\text{I}\omega_0^2 = 2\text{MH}\int_0^\Theta \sin\theta\, d\theta.$$

Ces égalités donnent

$$(4) \qquad -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\text{Q} = \frac{\text{R}}{\pi}\sin\frac{\Theta}{2}\sqrt{\frac{\text{H}}{\text{M}}\text{I}},$$

relation qui permet, ainsi que nous l'avions annoncé, de déterminer

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\text{Q}.$$

§ 3. — Action de la Terre sur un courant fermé.

Les résultats précédents ont été tirés immédiatement, au moyen de la règle établie au Chapitre VIII, des résultats obtenus dans l'étude de l'action des courants fermés les uns sur les autres.

Voici encore un résultat que nous tirerons presque sans intermédiaire de ceux que nous avons déjà établis.

Le potentiel mutuel d'un aimant et d'un courant fermé a pour valeur

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathbf{S}\,\mathfrak{M}\,dv\,\text{J}\int\Delta\, ds.$$

L'égalité (6) du Chapitre III nous permet de lui donner la forme

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\text{J}\,\mathbf{S}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\text{N}}\,d\Omega,$$

$\mathcal{V}$ étant la fonction potentielle de l'aimant et $d\Omega$ un élément d'une aire à deux côtés passant par le courant.

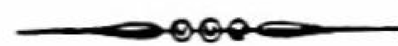
Si l'aimant considéré est la Terre, si le cadre est plan, si F est la force magnétique terrestre, cette quantité pourra s'écrire, comme nous l'avons vu au § 2 du Chapitre III,

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\text{F}\Omega\text{J}\cos(\text{F},\text{N}).$$

Ce potentiel est identique à celui de la Terre sur une aiguille aimantée ayant son axe magnétique dirigé suivant la normale positive au cadre et pour moment magnétique

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\Omega J.$$

Sous l'action de la Terre, la normale au cadre s'orientera comme cette aiguille, ainsi qu'Ampère l'a découvert.



CHAPITRE XI.

ACTION D'UN AIMANT SUR UN ÉLÉMENT DE COURANT UNIFORME. ROTATIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

L'action d'un aimant sur un élément de courant uniforme se définit exactement comme au Livre XIV, Chapitre VII, nous avons défini l'action d'un courant sur un élément de courant. *Les actions qu'un courant exerce sur un élément de conducteur* AB, *traversé par un courant uniforme d'intensité* J, *sont telles que, dans tout déplacement élémentaire qui amène l'élément en* A′B′, *elles effectuent un travail égal au potentiel électromagnétique de l'aimant sur le conducteur fermé* ABB′A′A *parcouru, dans le sens des lettres, par un courant d'intensité* J.

Cette définition permettrait de calculer les actions en question. Mais on peut se dispenser de ce calcul. Soit Π le potentiel électromagnétique de l'un des éléments de l'aimant sur le petit circuit considéré. Soit P le potentiel électrodynamique du courant équivalent à l'élément magnétique sur le même circuit. Nous savons que

$$\Pi = -\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}\,\mathrm{P}.$$

Or Π est le travail des actions exercées par l'élément magnétique sur l'élément AB lorsque celui-ci vient en A′B′; P est le travail des actions exercées par le courant équivalent à l'élément magnétique sur l'élément AB.

Les grandeurs géométriques qui représentent les premières actions s'obtiennent donc en multipliant par

$$-\frac{\mathfrak{H}\sqrt{2}}{4\pi\mathfrak{A}}$$

les grandeurs géométriques qui représentent les secondes.

Or ces dernières ont été étudiées au Livre XIV, Chapitre XI. Les résultats contenus dans ce Chapitre nous permettent d'énoncer la proposition suivante :

Un aimant agit sur un élément de conducteur ds, traversé par un courant uniforme d'intensité J, *comme si chaque masse magnétique* μ *de l'aimant engendrait une force appliquée au milieu de l'élément et ayant pour composantes*

$$(1)\quad \begin{cases} X = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu J \frac{1}{r^3}\left[(y-\eta)\frac{dz}{ds} - (z-\zeta)\frac{dy}{ds}\right] ds, \\ Y = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu J \frac{1}{r^3}\left[(z-\zeta)\frac{dx}{ds} - (x-\xi)\frac{dz}{ds}\right] ds, \\ Z = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu J \frac{1}{r^3}\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds} - (y-\eta)\frac{dx}{ds}\right] ds, \end{cases}$$

x, y, z *sont les coordonnées d'un point de l'élément* ds; *et* ξ, η, ζ, *les coordonnées de la masse* μ.

Nous n'examinerons qu'un problème relatif aux actions qu'un aimant exerce sur un segment de conducteur traversé par un courant uniforme : c'est le problème des *rotations électromagnétiques* [1].

Imaginons le dispositif suivant :

Deux cuvettes circulaires, G et G' (*fig.* 67), pleines de mercure, ont même axe et sont placées l'une au-dessus de l'autre. Un fil métallique MM', mobile, les relie l'une à l'autre. Un aimant AB est disposé suivant l'axe de l'instrument.

Un courant d'intensité J arrive dans la cuvette G, s'y divise en deux branches qui se rejoignent pour parcourir le fil MM'; il se sépare de nouveau en deux branches dans la cuvette G' et enfin retourne à la pile.

L'expérience montre que, dans certaines circonstances, le fil mobile MM' prend un mouvement de rotation autour de l'axe de l'appareil. Calculons le moment du couple qui tend à le faire tourner de gauche à droite.

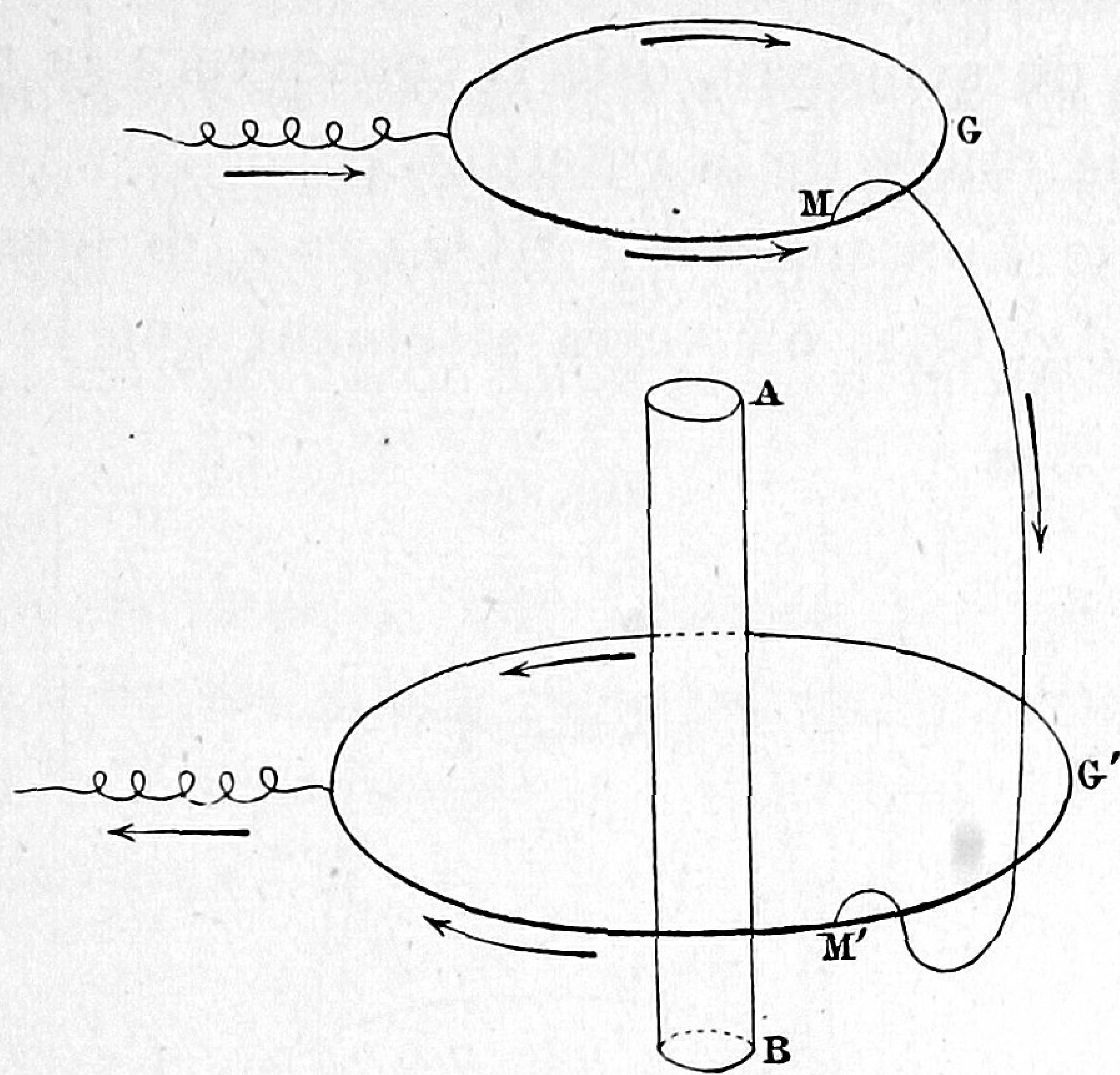
Supposons que le fil tourne, dans ce sens, d'un angle $MOM_1 = d\alpha$ (*fig.* 68), de manière à venir en $M_1M'_1$. Soit L le

---

(1) Les rotations électromagnétiques ont été découvertes par Faraday en 1822 (FARADAY, *Experimental Researches in Electricity*, t. II, p. 127).

moment du couple qui tend à le faire tourner. Le travail produit est L $d\alpha$.

Fig. 67.

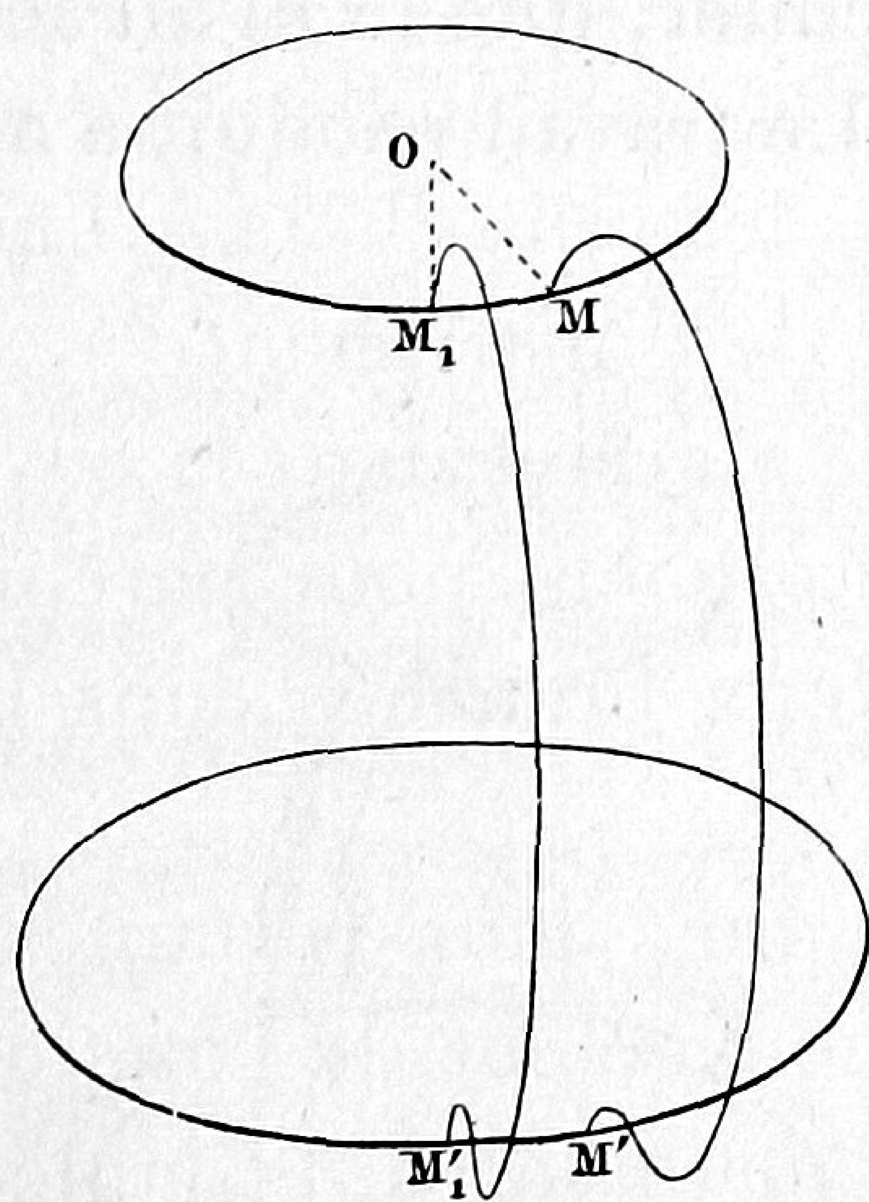


Ce travail est produit par les actions que subit le segment MM′. Celles-ci sont de deux sortes :

1° Les actions exercées par l'aimant AB;

2° Les actions exercées par le courant dont le segment MM′ fait partie.

Fig. 68.



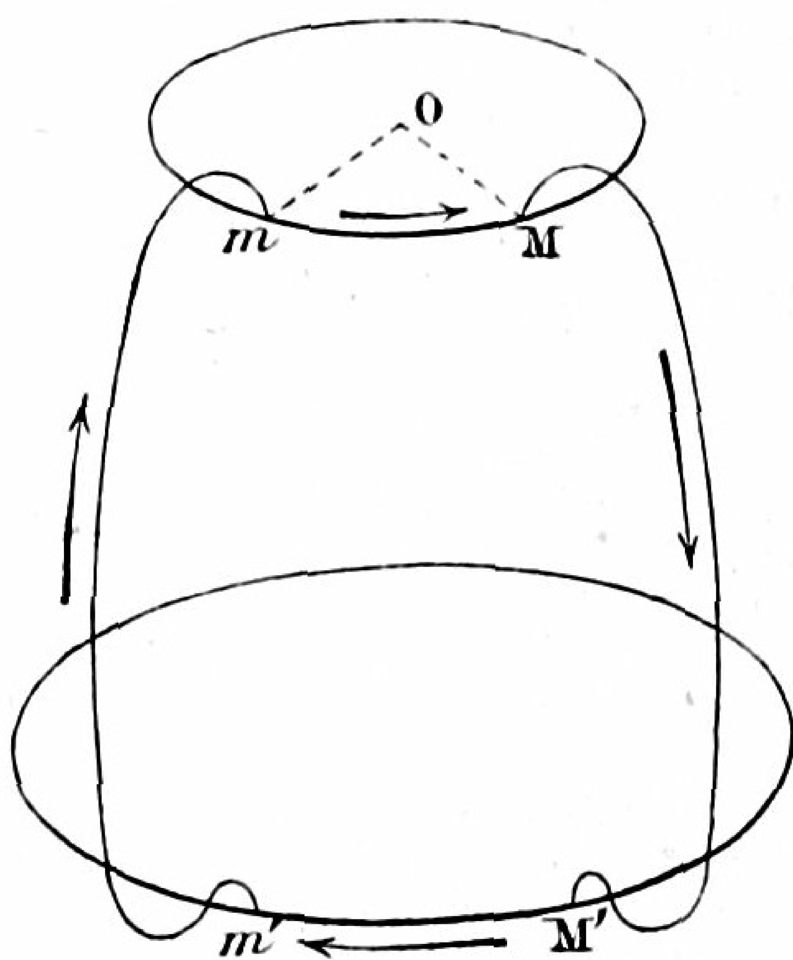
Les premières sont proportionnelles à l'intensité J du courant, les secondes au carré de cette intensité. Si l'intensité du courant est faible, les secondes pourront être négligées en comparaison des premières.

Dans ces conditions, il résulte sans peine de la définition posée

au commencement de ce Chapitre que $L\,d\alpha$ est égal au potentiel électromagnétique de l'aimant AB sur le circuit $MM'M'_1M_1M$, traversé, dans le sens des lettres, par un courant d'intensité J. On voit, par raison de symétrie, que L conservera la même grandeur pendant toute la durée de la rotation.

Si le fil tourne d'un angle fini $MOm = \alpha$, de manière à venir de MM' en mm' (*fig.* 69), on verra aisément que le travail produit

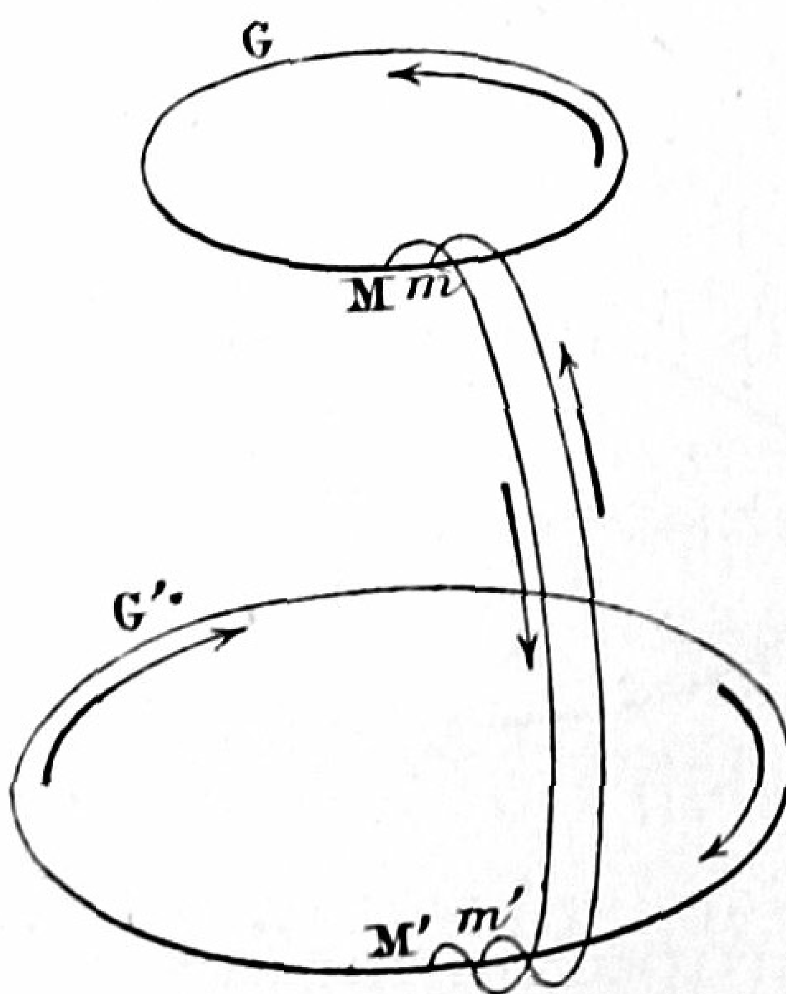
Fig. 69.



$L\alpha$ est égal au p[illegible]ntiel électromagnétique de l'aimant sur le circuit $MM'm'mM$ parcouru, dans le sens des lettres, par un courant d'intensité J.

Supposons, en particulier, que le fil ait accompli une révolution tout entière (*fig.* 70). Le travail produit a alors pour valeur $2\pi L$.

Fig. 70.



Il est toujours égal au potentiel de l'aimant sur le circuit $MM'G'm'mGM$.

Mais MM', mm' coïncident ici et sont parcourus par des cou-

rants égaux et de sens contraire. Le potentiel en question se réduit donc à la somme du potentiel de l'aimant sur le contour G parcouru *de droite à gauche* par un courant d'intensité J, et sur le contour G' parcouru *de gauche à droite* par le même courant.

Soient ds et ds' deux éléments des circuits G et G' parcourus de gauche à droite. Nous aurons

$$(2) \qquad 2\pi L = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} J \int \mathfrak{M}\, dv \left(\int_G \Delta\, ds - \int_{G'} \Delta\, ds' \right).$$

Supposons, en particulier, que l'aimant soit une aiguille très fine, assimilable à un solénoïde magnétique. Si μ désigne la masse magnétique que l'on peut imaginer à l'extrémité australe A de ce solénoïde, nous aurons

$$\mathfrak{M}\, dv = \mu\, dl$$

et

$$L = -\frac{\mathfrak{H}}{8\pi^2} J \int_B^A \mu \left(\int_G \Delta\, ds - \int_{G'} \Delta\, ds' \right) dl.$$

Soient $f(x, y, z)$, $f'(x, y, z)$ les fonctions non uniformes qui représentent l'angle sous lequel, d'un point donné, on voit le côté positif de surfaces passant par les contours G et G'. L'égalité précédente deviendra

$$L = -\frac{\mathfrak{H}}{8\pi^2} J \int_B^A \mu \left(\frac{\partial f}{\partial l} - \frac{\partial f'}{\partial l} \right) dl.$$

Nous supposerons le pôle austral du solénoïde dirigé vers le haut. S'il en était autrement, les effets que nous allons décrire seraient renversés. Puis, comme dans l'étude de l'Induction unipolaire (Livre XIII, Chap. IX), à laquelle nous renverrons pour le détail des calculs, nous distinguerons trois cas :

1° *Le solénoïde magnétique ne perce ni l'un, ni l'autre des plans des deux cercles* G *et* G'. Il est, par exemple, situé tout entier entre ces deux plans.

Soient Ψ et Ψ' les *valeurs absolues* des angles sous lesquels, d'un point du solénoïde magnétique, on voit les cercles G et G'. Il est facile de voir que, dans le cas actuel, on aura

$$L = -\frac{\mathfrak{H}}{8\pi^2} J \mu (\Psi_a + \Psi'_a - \Psi_b - \Psi'_b).$$

Si, comme il arrive souvent dans la pratique, les deux cuvettes

ont un très petit rayon, L sera négligeable et le fil ne tournera pas.

2° *Le solénoïde magnétique* AB *perce le plan d'un des deux cercles, par exemple du cercle inférieur.*

On aura

$$L = -\frac{\mathfrak{H}}{8\pi^2} J\mu(\Psi_a + \Psi'_a - \Psi_b + \Psi'_b + 4\pi).$$

Si les deux cuvettes sont très petites, cette valeur se réduit à

$$L = -\frac{\mathfrak{H}}{2\pi} J\mu.$$

Cette valeur est positive comme $(-\mathfrak{H})$. *Le fil tourne de gauche à droite.*

3° *Le solénoïde magnétique* AB *perce les plans des deux cercles.*

On aura alors

$$L = -\frac{\mathfrak{H}}{8\pi^2} J\mu(-\Psi_a - \Psi_b + \Psi'_a + \Psi'_b).$$

Si les deux cuvettes sont très petites, cette valeur est très petite et le fil ne tourne pas.

Si l'on maintenait constante l'intensité du courant qui parcourt le système, le couple qui tend à faire tourner le fil mobile aurait un moment sensiblement constant, et, par conséquent, en l'absence de frottements, le fil prendrait un mouvement de rotation uniformément accéléré.

Il n'en est plus de même si l'on entretient le courant au moyen d'une force électromotrice constante. Dans ces conditions, en effet, le mouvement du fil engendre, par un phénomène d'induction unipolaire électromagnétique, absolument analogue à l'induction unipolaire électrodynamique que nous avons étudiée au Chapitre IX du Livre XIII, un contre-courant dont il faut tenir compte.

Prenons, par exemple, le second cas.

A un moment où le courant qui parcourt le fil mobile a pour intensité J, le couple qui tend à le faire tourner de gauche à droite a pour moment

$$L = -\frac{\mathfrak{H}}{2\pi} J\mu.$$

La force électromotrice d'induction engendre un courant dirigé de M' vers M, et ayant pour intensité moyenne [Livre XIII, Chap. IX, égalité (17)],

$$\mathfrak{J} = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{\mu}{R}\omega,$$

ω étant la vitesse angulaire du fil, et R la résistance de l'appareil. Si E est la force électromotrice de la pile, l'intensité moyenne du courant total sera

$$J = \frac{1}{R}\left(E + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu\omega\right),$$

et la valeur moyenne du moment du couple sera

$$L = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{J\mu}{R}\left(E + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu\omega\right).$$

$\mathfrak{H}$ étant négatif, on voit que cette valeur du moment du couple diminue au fur et à mesure que la vitesse augmente. Au moment où la vitesse angulaire atteint la valeur

$$\omega = -\frac{4\pi E}{\mathfrak{H}},$$

le moment du couple devient nul, et le mouvement du fil devient un mouvement de rotation uniforme.

On peut donner à l'expérience précédente une autre forme sur laquelle il est nécessaire que nous insistions un instant. Dans cette nouvelle forme, l'aimant est mobile et traversé par le courant.

L'aimant, placé verticalement (*fig.* 71), porte à ses extrémités deux pointes P, P', par lesquelles il repose dans de petits godets. Il est ainsi susceptible de se mouvoir autour d'un axe vertical. Le courant, issu de la pile O, entre en M dans une première cuvette annulaire remplie de mercure. Il en ressort en C pour pénétrer dans l'aimant en suivant le chemin CDA. Il ressort de l'aimant en E pour se rendre, par le fil EF, dans une seconde cuvette annulaire pleine de mercure. Il en ressort en M' pour retourner à la pile.

La partie mobile de l'appareil est à la fois l'aimant AB et le segment de conducteur CDEF.

Les actions auxquelles cette partie mobile est soumise sont :

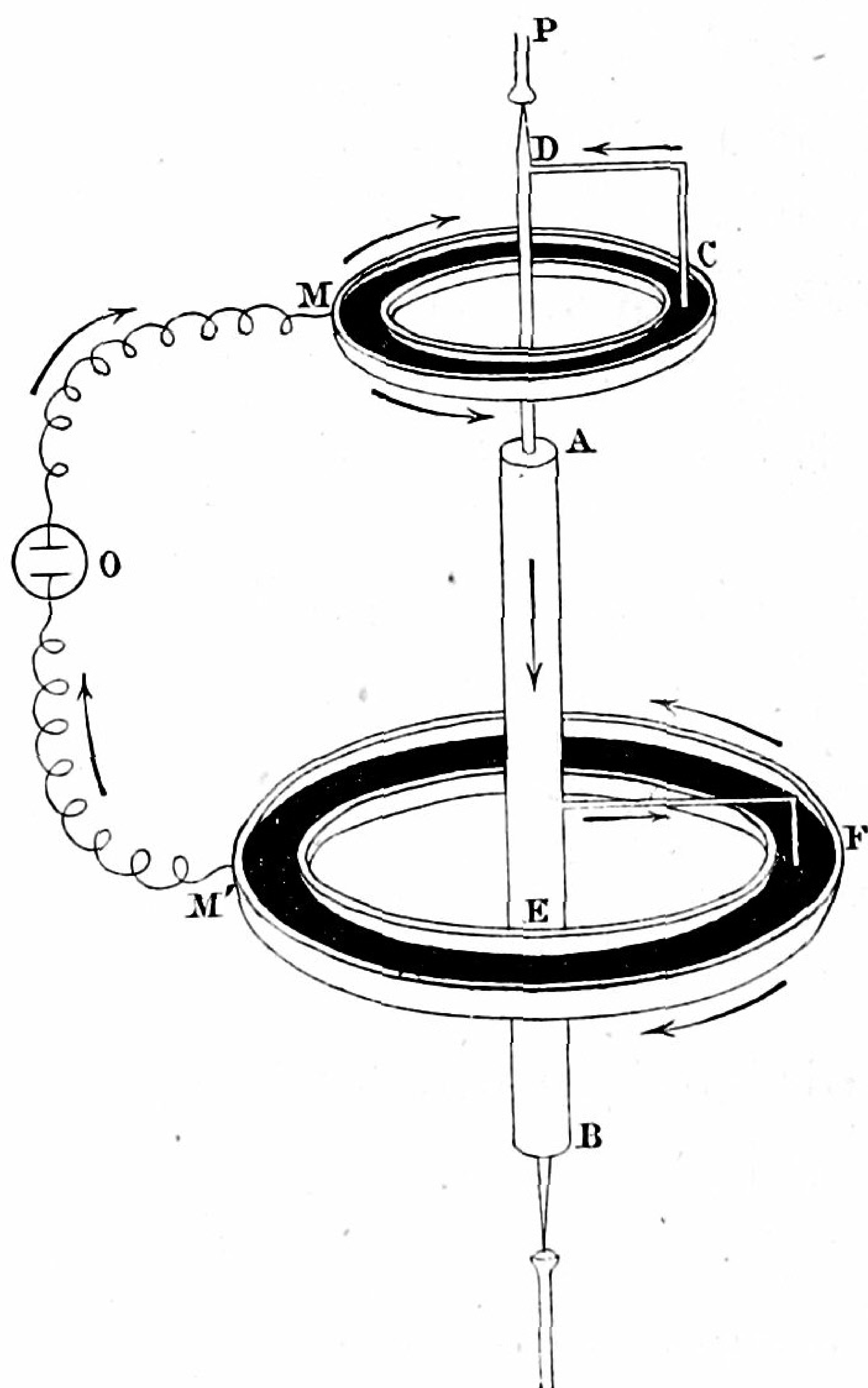
1° Les actions de l'aimant sur lui-même;

2° Les actions du courant fermé et uniforme que renferme l'appareil sur l'aimant;

3° Les actions de l'aimant sur le segment de courant CDEF;

4° Les actions du courant fermé et uniforme que renferme l'appareil sur le segment de courant CDEF.

Fig. 71.



Les premières de ces actions admettent un potentiel, le potentiel magnétique de l'aimant, qui demeure invariable pendant toute la durée du mouvement. Elles n'effectuent donc aucun travail et peuvent être laissées de côté.

Les secondes admettent un potentiel : le potentiel électromagnétique du courant sur l'aimant. A chaque révolution, ce potentiel reprend la même valeur. Le travail moyen effectué par les secondes actions durant une révolution de la partie mobile de l'appareil étant nul, ces actions ne peuvent tendre à imprimer un sens de rotation *uniforme* à la partie mobile de l'appareil. Il en est de même pour les quatrièmes.

Le phénomène de rotation observé est donc dû aux actions de la troisième catégorie, que l'on peut d'ailleurs étudier comme dans l'expérience précédente.

Ainsi l'expérience en question met en évidence, comme la précédente, la rotation d'un segment de courant sous l'action d'un aimant; seulement l'aimant agissant, étant invariablement lié au segment de conducteur mobile, est mis en mouvement avec lui.

Cette expérience de rotation d'un segment de courant sous l'action d'un aimant a reçu le nom de *rotation d'un aimant par un courant*. Cette dénomination impropre se relie à des interprétations inexactes qui ont été données de l'expérience en question. Nous allons dire quelques mots de ces interprétations.

Les actions mutuelles d'un courant fermé et uniforme et d'un aimant, les actions d'un aimant sur un segment de courant, grand ou petit, sont des grandeurs qui existent réellement; elles peuvent être observées et mesurées; au contraire, on ne peut observer l'action d'un élément de courant sur un aimant : une semblable action n'a pas d'existence réelle; c'est seulement une fiction mathématique qui sert d'intermédiaire pour calculer l'action d'un courant fermé et uniforme sur un aimant.

Il en résulte qu'il n'y a pas à discuter pour savoir quelle est la véritable loi de l'action d'un élément de courant uniforme sur un aimant; toutes les lois qui conduiront au même résultat lorsqu'on les appliquera au calcul de l'action d'un courant fermé et uniforme sur un aimant sont aussi justes les unes que les autres.

Cette idée n'était point encore entrée dans les esprits à l'époque d'Ampère et de Biot; elle eût suffi à empêcher une discussion fort vive qui eût lieu entre ces deux physiciens.

Ampère et Biot (¹) admettaient tous deux que l'action d'un élément de conducteur ds, traversé par un courant uniforme d'intensité J, sur un pôle d'aimant μ situé à la distance r, est une force normale à la direction de r et de ds, dirigée à gauche de l'observateur placé suivant l'élément ds et regardant le pôle μ, et ayant pour valeur

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mu J\frac{\sin(r, ds)}{r^2}ds.$$

Mais, tandis que Biot croyait cette force appliquée au pôle de

(¹) AMPÈRE, *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience* (*Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique*, t. III, pp. 132 et suiv.).

l'aimant, Ampère, s'appuyant sur le principe de l'égalité entre l'action et la réaction, qui sert de point de départ à ses recherches d'Électrodynamique, prétendait que le point d'application de cette force coïncidait avec un point de l'élément ds.

Nous avons vu (Livre XIV, Chap. XI) que ces deux lois donnaient le même résultat lorsqu'on les appliquait au calcul de l'action exercée par un courant fermé et uniforme sur un aimant; donc, d'après ce que nous venons de dire, elles sont aussi bonnes l'une que l'autre.

Mais Ampère n'était pas de cet avis.

Il chercha, ce que nous voyons bien aujourd'hui être dépourvu de sens, à décider par l'expérience entre la manière de voir de Biot et la sienne. Il crut avoir trouvé dans les soi-disant phénomènes de rotation d'un aimant par un courant, découverts par Faraday, l'expérience décisive qu'il cherchait.

Les actions du segment de courant extérieur M'OM sur l'aimant ayant, d'après lui, leur point d'application hors de l'aimant, peuvent faire tourner l'aimant autour de son axe, tandis que, d'après Biot, les points d'application se trouvant à l'intérieur même de l'aimant, l'aimant, s'il est mince, ne peut tourner autour de son axe.

Ampère crut, par là, avoir ruiné la manière de voir de Biot, ne s'apercevant pas que, dans toute expérience, l'aimant est soumis à l'action d'un courant fermé et uniforme et que, par conséquent, toute expérience qui s'expliquait par sa loi devait s'expliquer aussi par la loi de Biot et inversement.

Sir W. Thomson a fourni, de son côté, une interprétation inexacte des phénomènes en question. Cette interprétation est reproduite aujourd'hui dans la plupart des Traités d'électricité [1].

Considérons un courant fermé C et un élément magnétique $\mathfrak{M}\,dv$. Leur potentiel électromagnétique est

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\,J\,\mathfrak{M}\,dv\int_C \Delta\,ds.$$

---

[1] MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. par Seligmann-Lui, t. II, pp. 151 et 154. — MASCART et JOUBERT, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 494.

Soient

dl la direction de l'axe magnétique de l'élément;

μ la masse magnétique définie par

$$\mathfrak{M}\, dv = \mu\, dl;$$

$f(x, y, z)$ la fonction non uniforme définie au Chapitre III de l'Introduction;

Le potentiel en question peut s'écrire

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \int \mu\, dl \frac{\partial f}{\partial l}.$$

On voit qu'il a la même valeur que si les actions mutuelles d'un courant fermé et d'une masse magnétique $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ admettaient pour potentiel la quantité

$$= \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \mu \mathrm{J} f(\xi, \eta, \zeta).$$

Cette quantité n'est point une fonction uniforme des coordonnées ξ, η, ζ, de la masse μ.

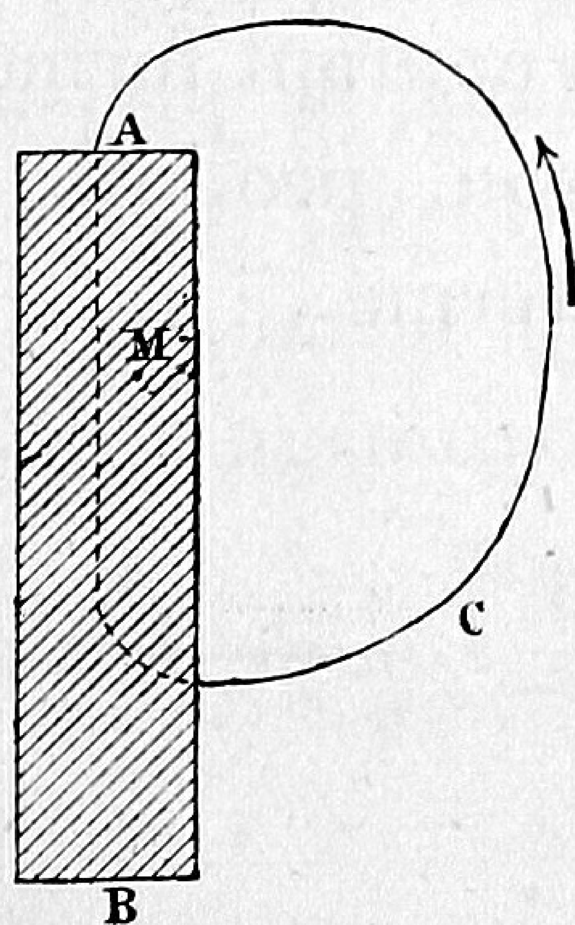
Supposons que l'on fasse décrire à la masse μ un chemin fermé perçant n fois de la face négative à la face positive et n' fois de la face positive à la face négative une aire à deux côtés passant par le contour C. Il aura augmenté de

$$\mathfrak{H}\, \mu \mathrm{J}(n - n').$$

Ce fait est, d'après Sir W. Thomson, l'explication des phénomènes de rotation d'un aimant par un courant.

Soit un aimant AB (*fig.* 72) qui sert en partie de véhicule à un courant fermé C.

Fig. 72.



Considérons une masse magnétique M de cet aimant.

Si l'aimant effectue une révolution de gauche à droite autour

de son axe, cette masse traversera une fois la surface menée par le courant fermé, en passant de la face négative à la face positive. Les actions du courant sur cette masse auront effectué un travail

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{H}\mu J.$$

Elle est donc l'origine d'un couple tendant à faire tourner l'aimant de gauche à droite et ayant pour moment

$$L = \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} = -\frac{\mathfrak{H}}{2\pi}\mu J.$$

Ce sont ces couples qui, d'après Sir W. Thomson, font tourner l'aimant.

Il est vrai que, si un aimant se déplace en présence d'un courant fermé, de manière à revenir à sa position primitive, certaines parties de l'aimant pourront bien, à chaque révolution, traverser une surface à deux côtés menée par le courant; mais Sir W. Thomson oublie que ces parties renfermeront toujours autant de fluide positif que de fluide négatif. Auprès d'une masse de fluide positif, dont le potentiel sur le courant aura crû de

$$\mathfrak{H}\mu J(n-n'),$$

se trouvera une masse égale de fluide négatif dont le potentiel aura crû de

$$-\mathfrak{H}\mu J(n-n');$$

en sorte que le potentiel total de l'aimant sur le courant n'aura pas varié.

Lorsqu'un aimant part d'une certaine position, puis y revient, le travail total des actions d'un courant fermé sur cet aimant est égal à o. Les actions d'un courant fermé ne peuvent donc, comme le voulait Sir W. Thomson, produire un déplacement d'un aimant suivant un chemin fermé.

CHAPITRE XII.

RELATION ENTRE LES DEUX CONSTANTES FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE ET DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME.

Avant la théorie indiquée dans le présent Livre, les lois de l'Électromagnétisme étaient obtenues comme conséquence de l'analogie, admise en principe, des solénoïdes magnétiques et des solénoïdes électrodynamiques. Les expériences d'Œrstedt et de Biot et Savart ont fait connaître seulement l'action d'un courant rectiligne indéfini sur un pôle d'aimant. Comme Ampère l'a si sagacement fait remarquer, et quoi qu'en disent certains Traités, il est impossible de déduire de là la loi de l'action d'un courant fermé quelconque sur un pôle d'aimant, et encore moins l'action d'un pôle d'aimant sur un élément de courant.

La seule méthode qui permît de constituer l'Électromagnétisme était celle d'Ampère : montrer, comme conséquence de l'Électrodynamique, l'analogie qui existe entre les lois de l'action de deux solénoïdes électrodynamiques, et les lois, étudiées par Coulomb, de deux solénoïdes magnétiques; entre les lois de l'action d'un courant rectiligne sur un solénoïde électrodynamique, et les lois, étudiées par Œrstedt, Biot et Savart, de l'action d'un courant rectiligne sur un aimant, puis, inférant de là que les solénoïdes électrodynamiques devaient être en toute circonstance analogues aux solénoïdes magnétiques, transporter à ceux-ci toutes les propositions sur les actions mutuelles des courants et des solénoïdes électrodynamiques que nous enseigne l'Électrodynamique.

Cette méthode est celle qui a servi à établir la théorie des phénomènes électromagnétiques dans les écrits d'Ampère et de Savary.

Tout autre est celle que nous avons suivie dans le présent Ouvrage.

Les lois de l'Électrodynamique d'une part, les lois de l'Électromagnétisme d'autre part, ont été établies indépendamment les unes des autres, par des méthodes semblables, mais dont chacune peut se suffire à elle-même. Le développement de ces théories a mis en complète évidence l'analogie des solénoïdes magnétiques et des solénoïdes électrodynamiques ; des feuillets magnétiques et des courants fermés et uniformes ; mais *nulle part cette analogie n'a été prise pour point de départ de la théorie.*

Résumons les analogies que nous avons ainsi établies :

1° En *Électrodynamique,* nous avons obtenu le résultat suivant :

Soient $\mathfrak{M}\, dv$, $\mathfrak{M}'\, dv'$ les moments de deux éléments magnétiques ; $BA = dl$ et $B'A' = dl'$ les axes de ces deux éléments ; autour de dl et dl' traçons deux petits contours C et C', d'aires Ω et Ω', ayant dl et dl' pour normales positives ; supposons ces petits cercles parcourus par des courants d'intensité J et J' telles que

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Omega J = \mathfrak{M}\, dv,$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Omega J = \mathfrak{M}'\, dv'.$$

Les forces électrodynamiques par lesquelles les deux petits courants C et C' agissent l'un sur l'autre sont identiques aux actions magnétiques mutuelles des deux éléments $\mathfrak{M}\, dv$, $\mathfrak{M}'\, dv'$.

C'est pour rappeler cette analogie que *nous avons dit que le petit courant* C *était équivalent, au point de vue de l'électrodynamique, à l'élément magnétique* $\mathfrak{M}\, dv$, *si l'on avait*

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Omega J = \mathfrak{M}\, dv. \tag{1}$$

2° Toutes les propositions que nous avons établies en *Électromagnétisme* peuvent se résumer de la manière suivante :

Envisageons un élément magnétique $\mathfrak{M}\, dv$ et un petit contour C, construit comme dans le cas précédent, mais parcouru par un courant d'intensité $\mathfrak{J}$ telle que

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \Omega \mathfrak{J} = \mathfrak{M}\, dv.$$

L'élément magnétique $\mathfrak{M}\, dv$ et le courant C :

1° Produiront en toutes circonstances la même force électromotrice d'induction en un conducteur fermé quelconque;

2° Influeront de la même manière sur l'aimantation d'un morceau de fer doux;

3° Exerceront les mêmes actions sur un élément de courant uniforme;

4° Subiront les mêmes actions de la part d'un courant fermé et uniforme quelconque.

Toutes ces analogies peuvent se résumer en disant que le petit courant C *est équivalent, au point de vue de l'Électromagnétisme, à l'élément magnétique* $\mathfrak{M}\, dv$, *si l'on a*

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\Omega\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\, dv. \tag{2}$$

Les deux intensités J et $\mathfrak{J}$ du courant équivalent, au point de vue électrodynamique, et du courant équivalent, au point de vue électromagnétique, sont laissées entièrement indépendantes l'une de l'autre par les théories précédentes.

C'est l'expérience, l'expérience d'Œrstedt par exemple, qui nous enseigne que ces deux intensités sont de même signe, la constante $\mathfrak{H}$ étant négative. Mais ce résultat n'est lui-même qu'un premier acheminement vers cette proposition fondamentale que rien, dans les théories précédentes, ne permettait de prévoir :

Le courant qui est équivalent à un élément magnétique au point de vue de l'Électrodynamique lui est aussi équivalent au point de vue de l'Électromagnétisme.

Cette proposition exige que les égalités (1) et (2) déterminent la même valeur l'une pour J, l'autre pour $\mathfrak{J}$, ce qui entraîne cette autre proposition.

Entre les deux constantes fondamentales de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme existe la relation

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}. \tag{3}$$

Cette relation, nous l'avons dit, ne peut être prévue par la théorie précédente. C'est à l'expérience qu'il faut en demander la

vérification. Voici un moyen d'effectuer cette vérification avec toute la précision désirable.

Lançons un même courant, dont l'intensité J n'a pas besoin de nous être connue, à la fois dans un électrodynamomètre et dans une boussole des tangentes. Les indications de l'électrodynamomètre nous détermineront la quantité

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J^2.$$

Les indications de la boussole des tangentes nous détermineront la quantité

$$\beta = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} J.$$

Si la relation (3) est exacte, nous devrons avoir

$$\alpha = \beta^2.$$

Cette dernière égalité vérifiée, il suffira de se reporter à l'expérience d'Œrstedt, d'après laquelle la quantité $\mathfrak{H}$ est négative, pour être assuré de l'exactitude de la relation (3).

L'expérience que nous venons de décrire n'a jamais été faite explicitement dans le but que nous venons d'indiquer, car les physiciens ont toujours admis, sans même mentionner leur hypothèse [1], l'exactitude de la relation (3).

Mais, si elle n'a jamais été faite explicitement, elle a certainement été faite implicitement un grand nombre de fois; toutes les fois qu'un physicien, admettant *a priori* l'exactitude de la relation (3), s'est servi en même temps d'un électrodynamomètre et d'une boussole des tangentes pour déterminer l'intensité d'un

---

[1] Il faut excepter MM. Mascart et Joubert et M. Paul Le Cordier. MM. Mascart et Joubert s'expriment à cet égard avec la plus grande netteté : « Un courant fermé, disent-ils, et un feuillet, équivalents vis-à-vis d'un système magnétique quelconque, le sont-ils vis-à-vis d'un autre courant? Ainsi, le courant C_1 et le feuillet S_1 de même contour sont équivalents vis-à-vis du système magnétique M_2; supposons que ce système magnétique soit un feuillet S_2; l'action réciproque qui s'exerce entre S_1 et S_2 est identique à celle qui s'exerce entre S_1 et le courant C_2; mais cette dernière est-elle la même que celle qui s'exerce entre les deux courants C_1 et C_2? L'affirmative paraît probable; mais ce n'est là qu'une induction, et il serait facile de trouver des exemples pour lesquels le même mode de raisonnement conduirait à des conséquences manifestement erronées. Ainsi, dans des conditions convenablement choisies, il peut se faire que les actions exercées sur

même courant, et qu'il a constaté l'accord de ces instruments, il a implicitement fait l'expérience en question.

L'exactitude de la relation (3) ne saurait donc être mise en doute. Les deux constantes fondamentales de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme cessent, par cette relation, d'être indépendantes. Ces deux branches de la Physique ne dépendent plus, en réalité, que d'une seule constante fondamentale.

---

un aimant par un aimant et par un morceau de fer doux soient les mêmes; on n'en saurait conclure que le morceau de fer doux et l'aimant seraient encore équivalents vis-à-vis d'un autre morceau de fer doux. C'est donc comme un résultat expérimental et non comme une déduction nécessaire de la théorie, que nous admettrons le théorème suivant d'Ampère : *L'action réciproque de deux courants fermés est identique à celle des deux feuillets magnétiques respectivement équivalents à chacun d'eux* » (MASCART et JOUBERT, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. I, p. 492). M. Le Cordier s'exprime d'une manière analogue (PAUL LE CORDIER, *Actions mécaniques produites par les aimants et par le magnétisme terrestre.* Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 16 avril 1883. *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 3e série, t. X, pp. 113 et 281; 1884).

APPENDICE AU LIVRE XV.

LES UNITÉS ÉLECTRIQUES.

Un exposé des principes qui régissent le choix des unités électriques semblera peut-être quelque peu déplacé dans le présent Ouvrage, tant à cause de son caractère élémentaire que du nombre des exposés analogues que l'on trouve dans les divers Traités ; aussi notre première intention n'était-elle pas de nous arrêter à l'examen de ces principes. Mais la lecture attentive des Traités et des Manuels répandus dans l'enseignement nous a révélé combien ces principes, bien simples en apparence, étaient en général méconnus. Les erreurs les plus graves entachent les pages que plusieurs auteurs consacrent aux unités électriques.

Certains croient que les unités électrostatiques ne peuvent servir qu'en électricité statique et les unités électromagnétiques dans l'étude des courants.

La plupart, conformément à cette idée, écrivent les formules de l'Électrostatique dans le système électrostatique d'unités, en y faisant égale à 1 la constante ε des lois de Coulomb; puis, dans le même livre, sans avertir du grave changement de conventions qu'ils adoptent, ils écrivent les formules de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme dans le système électromagnétique d'unités, en faisant égale à 1 la constante $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ de l'Électrodynamique.

De là des confusions sans nombre; par exemple, celle qui consiste à confondre, dans le système électromagnétique d'unités, une différence de niveau potentiel et une force électromotrice, alors que celle-ci est le produit de la première par la constante ε.

Il y a plus; certains Traités et certains Manuels très répandus enseignent que le système électromagnétique d'unités est défini par le choix de l'unité de pôle magnétique; que, dans ce système seulement, deux pôles magnétiques égaux respectivement à l'unité, séparés par l'unité de distance, se repoussent avec une force égale à l'unité. Et l'on voit, dans les Tableaux où ces Traités consignent les dimensions des principales unités électriques, le pôle magnétique figurer avec des dimensions différentes dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique!

C'est en lisant de pareilles erreurs que nous avons cru nécessaire de joindre à nos Leçons un appendice où seraient brièvement exposés les principes qui déterminent les choix des unités électriques.

§ 1. — Du Magnétisme.

On démontre, en Géométrie élémentaire, le théorème suivant :

Le nombre qui représente le volume d'un prisme est proportionnel au produit du nombre qui représente la surface de la base du prisme par le nombre qui représente sa hauteur.

Ce théorème est indépendant du choix des unités de volume, de surface et de longueur.

Si l'on désigne par V, B, H les trois nombres qui représentent le volume du prisme, la surface de sa base et sa hauteur, on pourra écrire

$$V = kBH,$$

k étant un coefficient positif dont la valeur est parfaitement déterminée lorsque les unités de longueur, de surface et de volume sont choisies, dont la valeur change lorsqu'on change l'une au moins de ces trois unités.

On pourrait exposer la Géométrie tout entière en laissant indépendantes les unités de longueur, de surface et de volume; toutes les formules qui expriment des relations entre ces trois espèces de grandeurs renfermeraient alors le coefficient k.

Les géomètres ont trouvé plus commode de débarrasser leurs formules de la présence de ce coefficient, en établissant entre les unités de longueur, de surface et de volume une relation telle que le coefficient k devînt égal à l'unité; il leur a suffi pour cela de prendre pour unité de volume le volume du prisme qui a pour base l'unité de surface et pour hauteur l'unité de longueur.

Ces principes, qui ont guidé les géomètres dans le choix des unités auxquelles ils rapportent les grandeurs d'espèces différentes qu'ils ont à considérer, sont connus de tout le monde. Ce sont ces mêmes principes qui ont guidé les physiciens dans le choix des unités auxquelles ils rapportent les grandeurs d'espèces différentes qu'ils considèrent dans l'étude de l'électricité. Nous allons examiner, dans le présent Chapitre, comment ils ont appliqué ces principes.

Nous admettrons, dans ce qui va suivre, que l'on ait traité la Géométrie et la Mécanique avant de s'occuper de l'électricité; que l'on ait, par conséquent, fixé les unités auxquelles sont rapportées les grandeurs d'espèces différentes considérées dans ces Sciences; on sait que les diverses conventions admises en Géométrie et en Mécanique ramènent le choix de toutes les unités géométriques et mécaniques au choix des trois unités fondamentales de longueur, de temps et de masse.

Dans l'étude du *magnétisme,* toutes les grandeurs d'espèce différente

que l'on a à considérer sont définies à partir d'une grandeur fondamentale, la *quantité de magnétisme* ou *masse magnétique*. Lorsqu'on connaît, d'une part, les unités de longueur, de masse et de temps; d'autre part, l'unité de quantité de magnétisme, la définition même des diverses grandeurs (intensité d'aimantation, moment magnétique, fonction potentielle magnétique, etc.) que l'on considère dans l'étude du magnétisme détermine l'unité à laquelle chacune de ces grandeurs doit être rapportée.

D'autre part, la manière même dont la quantité de magnétisme a été définie relie immédiatement le choix de l'unité de quantité de magnétisme au choix des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps. Il résulte, en effet, de cette définition que *l'unité de masse magnétique est la masse magnétique qui, placée à l'unité de distance d'une masse qui lui est égale, la repousse avec une force égale à l'unité.*

Cette unité de masse magnétique ne dépend donc que des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps. Il est aisé de voir de quelle manière elle en dépend.

Prenons deux masses magnétiques égales entre elles et bien déterminées, m et m_1, placées à une distance bien déterminée r; elles exercent l'une sur l'autre une action bien déterminée f.

Choisissons un premier système d'unités de longueur, de masse et de temps; les trois grandeurs m, r, f seront mesurées par des nombres bien déterminés μ, ρ, φ entre lesquels, d'après les lois de Coulomb et de Gauss, on aura la relation

$$(1) \qquad \varphi = \frac{\mu^2}{\rho^2}.$$

Prenons un deuxième système d'unités fondamentales, qui se déduise du premier en multipliant la précédente unité de longueur par L, la précédente unité de temps par T, la précédente unité de masse par M. Les trois grandeurs m, r, f seront mesurées par de nouveaux nombres bien déterminés μ', ρ', φ' entre lesquels nous aurons la relation

$$(2) \qquad \varphi' = \frac{\mu'^2}{\rho'^2}.$$

Or nous aurons évidemment

$$\rho = \mathrm{L}\rho'.$$

D'après la définition de la force donnée en Mécanique, on voit sans peine que l'on a

$$\varphi = \mathrm{MLT}^{-2}\varphi'.$$

Les égalités (1) et (2) donnent alors

$$\mathrm{MLT}^{-2} = \frac{\mu^2}{\mu'^2}\mathrm{L}^{-2}$$

ou bien

$$\mu = \mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}\mathrm{T}^{-1}\mu'.$$

Ainsi, lorsqu'on multiplie par M la masse prise pour unité, par L la longueur prise pour unité, par T le temps pris pour unité, le nombre qui représente une masse magnétique déterminée est *divisé* par

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1};$$

en d'autres termes, la nouvelle unité de masse magnétique s'obtient en *multipliant* la précédente unité par ce même nombre

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}.$$

C'est ce qu'on convient d'exprimer en disant que *les dimensions de la quantité de magnétisme sont*

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}.$$

Puisque rien n'est plus arbitraire dans le choix des unités magnétiques lorsqu'on a fixé les unités fondamentales de longueur, de temps et de masse, on ne doit pas s'étonner que les formules du magnétisme ne renferment plus aucun coefficient de proportionnalité que l'on puisse faire varier par le choix des unités.

§ 2. — Il y a, dans l'étude de l'électricité, une grandeur dont l'unité peut être choisie arbitrairement.

Les principales espèces de grandeurs que l'on a à considérer dans l'étude de l'Électrostatique, du galvanisme, de lÉ'lectrodynamique et de l'Électromagnétisme sont : *la quantité d'électricité, la fonction potentielle électrostatique, l'intensité d'un courant, la résistance d'un conducteur, la force électromotrice, la capacité d'un conducteur.*

Rien, dans la définition de la quantité d'électricité n'oblige à prendre pour unité de quantité une charge électrique plutôt qu'une autre. *Le choix de l'unité de quantité d'électricité est donc arbitraire.*

La quantité d'électricité est, d'ailleurs, la seule grandeur électrique dont l'unité soit arbitraire; une fois que l'on a choisi cette unité et les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, les unités auxquelles doivent être rapportées les autres grandeurs électriques sont complètement déterminées.

La fonction potentielle électrostatique en un point M est définie par l'égalité

$$V = \sum \frac{q}{r},$$

q étant la charge électrique qui se trouve au point A de l'espace, r la distance AM, et la sommation s'étendant à toutes les charges agissantes. Il résulte de cette définition qu'*une charge électrique égale à l'unité engendrera au point* M *une fonction potentielle égale à l'unité, si* AM *est l'unité de longueur.*

L'intensité d'un courant linéaire est la quantité d'électricité que le courant transporte pendant l'unité de temps, à travers une section du conducteur, dans le sens choisi comme positif. *L'unité d'intensité est donc l'intensité du courant qui, dans l'unité de temps, transporte au travers de la section du conducteur une quantité d'électricité égale à l'unité.*

La loi de Joule donne immédiatement la définition de l'unité de résistance. Dans un conducteur métallique homogène de résistance R, un courant d'intensité J, passant pendant le temps t, dégage une quantité de chaleur

$$Q = \frac{1}{E} RJ^2 t,$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur. Cet échauffement équivaut à un travail

$$\mathfrak{T} = RJ^2 t.$$

On voit, d'après cette formule, que *l'unité de résistance est la résistance d'un conducteur métallique homogène dans lequel un courant d'intensité égale à l'unité produit, pendant l'unité de temps, un échauffement équivalent à l'unité de travail.*

L'intensité J du courant, qu'une force électromotrice $\mathcal{E}$ engendre dans un circuit de résistance R, a pour valeur, d'après la définition de la force électromotrice,

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

D'après cette formule, *l'unité de force électromotrice est la force électromotrice qui engendre un courant d'intensité égale à l'unité dans un circuit de résistance égale à l'unité.*

La capacité d'un conducteur métallique dans des conditions déterminées est, par définition, la quantité d'électricité qu'il faut distribuer en équilibre sur ce conducteur pour que la force électromotrice qui existe entre ce conducteur ainsi chargé et la terre (c'est-à-dire un corps de même nature que le conducteur, porté au niveau potentiel 0), soit égale à l'unité [1].

D'après cette définition, *un conducteur aura une capacité égale à l'unité, s'il existe une force électromotrice égale à l'unité entre le conducteur et un conducteur et de même nature au niveau potentiel* 0.

---

[1] On donne souvent, dans les Traités, une définition inexacte de la capacité; on dit que la capacité est la quantité d'électricité nécessaire pour porter le conducteur au niveau potentiel 1. En réalité, si V est le niveau potentiel d'un conducteur, la force électromotrice $\mathcal{E}$, qui existe entre ce conducteur et la terre, a pour valeur

$$\mathcal{E} = \varepsilon V,$$

ε étant le coefficient de la loi électrostatique de Coulomb. Ainsi, d'après la défi-

L'énumération que nous venons de faire montre bien que, lorsque l'on connaît, d'une part, les unités de longueur, de temps et de masse, et, d'autre part, l'unité de quantité d'électricité, toutes les autres unités électriques sont déterminées. Il n'y a donc d'arbitraire, dans l'étude de l'électricité, que le choix de l'unité de charge électrique.

§ 3. — Il y a, dans les formules de l'électricité, deux coefficients dépendant du choix des unités fondamentales.

L'action mutuelle de deux particules matérielles, portant des charges électriques q et q' et situées à une distance r l'une de l'autre, est, d'après les lois de Coulomb, une force répulsive ayant pour grandeur

$$F = \varepsilon \frac{qq'}{r^2};$$

ε est un coefficient positif qui dépend des unités fondamentales de longueur, de temps, de masse et de charge électrique.

Ce coefficient se retrouve dans toutes les formules de l'Électrostatique; ainsi le potentiel électrostatique d'un système de conducteurs a pour valeur

$$W = \varepsilon \sum \frac{qq'}{r}, \tag{3}$$

q, q' étant deux charges quelconques du système, r la distance qui les sépare, et le signe $\sum$ s'étendant à toutes les combinaisons telles que $\frac{qq'}{r}$, distinctes les unes des autres. Cette expression du potentiel électrostatique domine toute l'Électrostatique.

Entre deux points d'un conducteur métallique homogène où la fonction potentielle a des valeurs V et V', existe une force électromotrice

$$\mathcal{E} = \varepsilon(V - V').$$

Cette formule est le point de départ de toute l'étude des courants stationnaires.

L'étude de l'induction électrodynamique et des forces électrodyna-

---

nition que nous avons donnée, la capacité est la quantité d'électricité nécessaire pour porter le conducteur au niveau potentiel $\frac{1}{\varepsilon}$, et non pas au niveau potentiel 1. Notre définition ne coïncide donc avec celle des Traités que dans le système électrostatique où $\varepsilon = 1$. La définition des Traités n'aurait aucun inconvénient si l'on s'y tenait. Mais, ordinairement, les Traités, après avoir donné cette définition, raisonnent comme s'ils avaient donné celle que nous adoptons. De là, des erreurs et des contradictions.

miques se ramène entièrement à la considération du potentiel électrodynamique; ce potentiel a pour expression

$$(4) \qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum JJ'\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right) ds\, ds';$$

ds et ds' sont deux éléments conducteurs, traversés par des courants J et J'; r est leur distance; θ, θ', ω sont les trois angles qui fixent leur orientation respective; le signe $\sum$ s'étend à toutes les combinaisons que l'on peut former en prenant deux à deux les éléments du système.

λ est la constante d'Helmholtz; c'est une constante numérique, absolument indépendante du choix des unités fondamentales.

$\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ est un coefficient qui dépend du choix des unités fondamentales de longueur, de temps, de masse et de charge électrique.

Ce coefficient se retrouve dans toutes les formules de l'Électrodynamique; il se retrouve aussi dans toutes les formules de l'Électromagnétisme.

En effet, l'étude de l'induction électromagnétique, de l'aimantation par les courants, des forces électromagnétiques, se déduit tout entière de la considération du potentiel électromagnétique d'un élément magnétique $\mathfrak{M}\, dv$ et d'un courant fermé. Ce potentiel a pour valeur

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\mathfrak{M}\, dv\, J\int \Delta\, ds,$$

Δ ayant une signification que nous avons souvent eu à rappeler dans les Chapitres précédents.

Or, nous avons vu, au Livre XV, Chapitre XII, que l'on avait

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}.$$

Le potentiel électromagnétique peut donc s'écrire

$$(4\ bis) \qquad \mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{M}\, dv\, J\int \Delta\, ds,$$

ce qui introduit le coefficient $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$ dans toutes les formules de l'Électromagnétisme.

L'étude de l'électricité mène donc à la considération de deux coefficients qui dépendent des unités fondamentales de longueur, de temps, de masse et de charge électrique; c'est le coefficient fondamental de l'Électrostatique ε, et le coefficient fondamental de l'Électromagnétisme $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$.

§ 4. — Le rapport du coefficient fondamental de l'Électrodynamique au coefficient fondamental de l'Électrostatique est indépendant des unités de masse et de charge électrique.

Chacun des deux coefficients fondamentaux de l'Électrostatique et de l'Électrodynamique dépend des unités fondamentales de longueur, de temps, de masse et de charge électrique. Cherchons de quelle manière il dépend de ces unités.

Supposons qu'après avoir adopté un premier système d'unités fondamentales, on en adopte un second qui se déduise du premier en multipliant l'unité de longueur par L, l'unité de temps par T, l'unité de masse par M, l'unité de quantité d'électricité par Q.

Ce changement d'unités changera la valeur du nombre qui représente une grandeur concrète déterminée. Nous désignerons par une lettre sans indice le nombre qui représente une grandeur concrète dans le premier système d'unités et par une lettre affectée de l'indice 1 le nombre qui représente la même grandeur concrète dans le second système d'unités.

Considérons, par exemple, le potentiel électrostatique d'un système déterminé. Il sera défini, dans le premier système d'unités par la formule

$$W = \varepsilon \sum \frac{qq'}{r}, \tag{3'}$$

et dans le second système d'unités, par la formule

$$W_1 = \varepsilon_1 \sum \frac{q_1 q'_1}{r_1}. \tag{3''}$$

On aura évidemment

$$\frac{q}{q_1} = \frac{q'}{q'_1} = Q,$$

$$\frac{r}{r_1} = L.$$

Un potentiel étant une grandeur de même espèce qu'un travail, on verra sans peine que l'on a

$$\frac{W}{W_1} = ML^2T^{-2}.$$

Il résulte alors des formules (3′) et (3″) que l'on aura

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = ML^3T^{-2}Q^{-2}. \tag{5}$$

Ainsi, si l'on multiplie l'unité de longueur par L, l'unité de temps par T, l'unité de masse par M, l'unité de charge électrique par Q, le nombre qui représente le coefficient fondamental de l'Électrostatique est divisé par

$$ML^3T^{-2}Q^{-2}.$$

En d'autres termes, *lorsqu'on laisse l'unité de charge électrique indépendante des unités mécaniques, le coefficient fondamental de l'Électrostatique a pour dimensions*

$$ML^3T^{-2}Q^{-2}.$$

Considérons maintenant le potentiel électrodynamique d'un système de courants.

Dans le premier système d'unités, il est représenté par la formule

$$(4') \qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2}\cos\omega\right)\frac{JJ'}{r}\,ds\,ds'.$$

Dans le second système d'unités, il est représenté par la formule

$$(4'') \qquad \Pi_1 = -\frac{\mathfrak{A}_1^2}{2}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2}\cos\omega\right)\frac{J_1J_1'}{r_1}\,ds_1\,ds_1'.$$

On a évidemment

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{ds'}{ds_1'} = \frac{r}{r_1} = L.$$

L'intensité d'un courant étant le rapport d'une quantité d'électricité à un temps, on a évidemment

$$\frac{J}{J_1} = \frac{J'}{J_1'} = QT^{-1}.$$

Enfin on a

$$\frac{\Pi}{\Pi_1} = ML^2T^{-2}.$$

Il résulte alors des formules (4′) et (4″) que l'on a

$$(6) \qquad \frac{\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}}{\dfrac{\mathfrak{A}_1^2}{2}} = LMQ^{-2}.$$

Ainsi, si l'on multiplie l'unité de longueur par L, l'unité de temps par T, l'unité de masse par M, l'unité de charge électrique par Q, le nombre qui représente le coefficient fondamental de l'Électrodynamique est divisé par

$$LMQ^{-2}.$$

En d'autres termes, *lorsqu'on laisse l'unité de charge électrique indépendante des unités mécaniques, le coefficient fondamental de l'Électrodynamique a pour dimensions*

$$LMQ^{-2}.$$

La comparaison des égalités (5) et (6) conduit à un résultat remar-

quable; cette comparaison donne en effet

$$\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}} : \frac{\varepsilon_1}{\frac{\mathfrak{A}_1^2}{2}} = L^2 T^{-2}.$$

Le rapport $\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}}$ *du coefficient fondamental de l'Électrostatique au coefficient fondamental de l'Électrodynamique ne dépend pas du choix des unités de masse et de charge électrique; il dépend seulement du choix des unités de longueur et de temps.*

Posons

$$\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}} = v^2. \tag{7}$$

L'égalité précédente montre que, si, dans un changement d'unités, l'unité de longueur est multipliée par L et l'unité de temps par T, le nombre qui représente v est divisé par LT^{-1}. La grandeur v est donc le rapport d'une longueur à un temps.

La grandeur v est une grandeur de même espèce qu'une vitesse.

M. H. von Helmholtz a donné à cette quantité v le nom de *vitesse caractéristique de l'électricité.*

§ 5. — Les divers systèmes d'unités électriques.

Supposons que les unités mécaniques fondamentales, c'est-à-dire les unités de longueur, de temps et de masse, aient été choisies une fois pour toutes. Le rapport des coefficients fondamentaux de l'Électrostatique et de l'Électromagnétisme a alors une valeur parfaitement déterminée, sur laquelle le choix de l'unité de charge électrique ne peut exercer aucune influence.

Mais, par le choix de l'unité de charge électrique, laissée jusqu'ici arbitraire, on peut faire prendre la valeur positive que l'on veut, soit au coefficient fondamental de l'Électrostatique, soit au coefficient fondamental de l'Électrodynamique. Seulement, comme le rapport de ces deux coefficients a une valeur déterminée, quand on aura donné à l'un de ces deux coefficients une valeur choisie arbitrairement, la valeur de l'autre coefficient n'aura plus rien d'arbitraire; elle sera entièrement déterminée.

Ce sont des raisons de commodité qui font attribuer telle ou telle valeur soit à l'un, soit à l'autre des deux coefficients. De semblables raisons n'ayant rien d'absolu, le choix qu'il s'agit de faire a été fait, au gré des auteurs, de diverses manières, auxquelles correspondent divers systèmes d'unités électriques. On en distingue trois principaux : le *système*

électrostatique, le *système électrodynamique* et le *système électromagnétique*.

1° *Système électrostatique*. — Dans le système électrostatique, on cherche, par un choix convenable de l'unité de charge électrique, à faire disparaître des formules le coefficient ε en lui donnant la valeur 1.

Il est aisé de voir quelle charge électrique on doit prendre pour unité lorsque l'on veut atteindre ce but.

Si, en effet, l'unité de charge électrique a été choisie de manière que ε prenne la valeur 1, si les charges électriques sont rapportées à cette unité, la formule qui exprime l'action répulsive des deux charges électriques s'écrit

$$F = \frac{qq'}{r^2}.$$

Cette formule montre que *l'unité de charge électrique est déterminée, dans le système électrostatique, par la condition de repousser avec l'unité de force une charge égale placée à l'unité de distance.*

Moyennant ce choix de l'unité de charge, le coefficient ε prend la valeur 1, et, d'après l'égalité (7), le coefficient fondamental $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ de l'Électrodynamique prend la valeur $\frac{1}{\varphi^2}$. Le potentiel électrodynamique d'un système de courants devient alors, d'après l'égalité (4),

$$\Pi = -\frac{1}{\varphi^2}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right) JJ'\, ds\, ds'.$$

Le potentiel électromagnétique devient, d'après l'égalité (4 *bis*),

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{\varphi}\,\mathfrak{M}\, dv\, J\int \Delta\, ds.$$

2° *Système électrodynamique*. — D'après la formule d'Ampère, deux éléments de courants uniformes se repoussent avec une force qui a pour valeur, en faisant usage des notations habituelles,

$$R = -\mathfrak{A}^2\frac{JJ'\, ds\, ds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

Ampère voulait que l'action mutuelle de deux éléments de courants parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite qui les joint fût représentée par la formule

$$R = -\frac{JJ'\, ds\, ds'}{r^2}.$$

Comme on a, dans ce cas,

$$\cos\theta = 0, \qquad \cos\theta' = 0, \qquad \cos\omega = 1,$$

on voit que l'on doit prendre

$$\mathfrak{A}^2 = 1,$$

et, par conséquent, en vertu de la relation (7),

$$\varepsilon = 2v^2.$$

La formule qui exprime l'action répulsive de deux charges électriques devient alors

$$F = 2v^2 \frac{qq'}{r^2},$$

en sorte que *l'unité de charge électrique est déterminée, dans le système électrodynamique, par la condition d'exercer sur une charge égale, placée à l'unité de distance, une force représentée par le même nombre que* $2v^2$.

Le système électrodynamique, employé dans les écrits d'Ampère et de ses contemporains, est aujourd'hui entièrement abandonné.

3° *Système électromagnétique.* — Considérons deux solénoïdes; dans le premier, les courants circulaires ont une aire Ω, une intensité J, ils sont séparés par une distance D; dans le second, les courants ont une aire Ω', une intensité J', une distance D'. Ces solénoïdes ont respectivement pour puissance

$$\Phi = \frac{\Omega J}{D}, \quad \Phi' = \frac{\Omega' J'}{D'}.$$

L'action répulsive qui s'exerce entre le pôle austral du premier solénoïde et le pôle austral du second, placés à la distance r l'un de l'autre, est représentée par la formule

$$F = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\Phi\Phi'}{r^2}.$$

Dans le système électromagnétique, on se propose de choisir l'unité de charge électrique, de manière que cette formule prenne la même forme que celle qui donne l'action de deux pôles d'aimants, c'est-à-dire la forme

$$F = \frac{\Phi\Phi'}{r^2}.$$

On prend donc arbitrairement, dans ce système, la valeur 1 pour valeur du coefficient fondamental $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ de l'Électrodynamique, ce qui fait disparaître ce coefficient de toutes les formules de l'Électrodynamique.

Le coefficient fondamental de l'Électrodynamique ayant la valeur 1, le coefficient fondamental de l'Électrostatique est déterminé; il a, d'après l'égalité (7), la valeur

$$\varepsilon = v^2.$$

La formule qui donne l'action répulsive de deux charges électriques q et q', placées à la distance r l'une de l'autre, devient, dans ce système,

$$F = v^2 \frac{qq'}{r^2}.$$

Ainsi *l'unité de charge électrique est déterminée, dans le système électromagnétique, par la condition d'exercer sur une charge égale, placée à l'unité de distance, une force représentée par le même nombre que* v^2.

Dans ce système, le potentiel électrostatique a pour expression, d'après l'égalité (3),

$$W = v^2 \sum \frac{qq'}{r}.$$

Le potentiel électrodynamique a pour expression, d'après l'égalité (4),

$$\Pi = -\sum JJ'\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right) ds\, ds'.$$

Le potentiel électromagnétique a pour expression, d'après l'égalité (4 *bis*),

$$\mathfrak{P} = -\mathfrak{M}\, dv\, J \int \Delta\, ds.$$

§ 6. — Rapport des unités correspondantes dans les deux systèmes électrostatique et électromagnétique.

Prenons une certaine unité arbitraire de charge électrique correspondant à une certaine valeur ε du coefficient fondamental de l'Électrostatique. Deux charges qui, mesurées avec cette unité, sont représentées par les nombres q et q', placées à la distance r, exerceront l'une sur l'autre une force répulsive représentée par la formule

$$(\alpha) \qquad F = \varepsilon \frac{qq'}{r^2}.$$

Soit c le nombre qui mesure, au moyen de cette unité arbitraire, la charge servant d'unité dans le système électrostatique. Deux telles charges, placées à l'unité de distance, doivent se repousser avec l'unité de force. Si donc, dans la formule (α), on fait

$$q = c, \qquad q' = c, \qquad r = 1$$

on doit trouver

$$F = 1,$$

ce qui donne

$$(\beta) \qquad 1 = \varepsilon c^2.$$

Soit C le nombre qui mesure, au moyen de la même unité arbitraire, la charge servant d'unité dans le système électromagnétique. Deux telles charges, placées à l'unité de distance, doivent se repousser avec une force représentée par le nombre v^2. Si donc, dans la formule (α), on fait

$$q = C, \qquad q' = C, \qquad r = 1.$$

on doit trouver

$$F = v^2,$$

ce qui donne

$$(\gamma) \qquad v^2 = \varepsilon C^2.$$

La comparaison des formules (β) et (γ) donne

$$\frac{C}{c} = v.$$

Ainsi *la charge qui sert d'unité dans le système électromagnétique est v fois plus grande que la charge qui sert d'unité dans le système électrostatique.*

Il en résulte qu'une même charge électrique est représentée par un nombre v fois plus petit dans le système électromagnétique que dans le système électrostatique.

Ce premier résultat obtenu, des raisonnements, trop aisés pour qu'il soit nécessaire de les développer, conduisent aux propositions suivantes :

La fonction potentielle qui sert d'unité dans le système électromagnétique est v fois plus grande que la fonction potentielle qui sert d'unité dans le système électrostatique.

L'intensité qui sert d'unité dans le système électromagnétique est v fois plus grande que l'intensité qui sert d'unité dans le système électrostatique.

La résistance qui sert d'unité dans le système électromagnétique est v^2 fois plus petite que la résistance qui sert d'unité dans le système électrostatique.

La force électromotrice qui sert d'unité dans le système électromagnétique est v fois plus petite que la force électromotrice qui sert d'unité dans le système électrostatique.

La capacité qui sert d'unité dans le système électromagnétique est v^2 fois plus grande que la capacité qui sert d'unité dans le système électrostatique.

On voit que la connaissance de la quantité v suffit pour déterminer le nombre qui mesure une certaine grandeur électrique dans l'un des deux systèmes, lorsqu'on connaît le nombre qui mesure cette même grandeur dans l'autre système.

§ 7. — Détermination de la vitesse caractéristique de l'électricité; elle se ramène à la détermination de l'ohm.

Supposons que l'on ait fait choix d'un système quelconque d'unités électriques : soit le système électrostatique, soit le système électromagnétique, soit tout autre système que l'on aura jugé commode.

Pour pouvoir traduire en nombre toutes les formules de l'électricité, il faudra connaître deux constantes fondamentales : la constante d'Helmholtz,

λ, et la vitesse de l'électricité v. La première de ces deux constantes disparaît de toutes les formules qui se rapportent seulement aux courants fermés et uniformes. Lors donc qu'on ne veut pas traiter des courants non uniformes, la constante v est la seule dont on ait besoin de connaître la valeur.

La détermination expérimentale de la vitesse caractéristique de l'électricité se présente donc comme un problème ayant, en Physique, une importance capitale.

Voici une des méthodes, celle de Sir W. Thomson (¹), qui permettent de déterminer v.

Imaginons une partie homogène et métallique AB d'un circuit que traverse un courant dont l'intensité, évaluée dans un système quelconque d'unités, ait pour valeur J; la résistance de cette portion de fil AB a pour valeur R dans le même système d'unités; un électromètre absolu fait connaître le nombre

$$\alpha = \varepsilon(V_A - V_B)^2,$$

V_A et V_B étant les niveaux potentiels en A et B (*voir* Livre III, Chap. IV, § 5).

D'autre part, une partie du fil AB forme soit le cadre d'une boussole des tangentes, soit les bobines d'un électrodynamomètre. Si l'instrument employé est une boussole des tangentes, ses indications font connaître le nombre

$$\beta = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} J = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J.$$

Si l'instrument employé est un électrodynamomètre, ses indications font connaître le nombre

$$\beta^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J^2.$$

Les égalités que nous venons d'écrire donnent

$$v^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}} = \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{J^2}{(V_A - V\ )^2}.$$

Mais la loi d'Ohm donne

$$J = \frac{\varepsilon(V_A - V_B)}{R},$$

ou bien

$$\frac{J^2}{(V_A - V_B)^2} = \frac{\varepsilon^2}{R^2} = \frac{\frac{\mathfrak{A}^4}{4}}{R^2} v^4.$$

(¹) Sir W. Thomson, *Report of the British Association for* 1869, p. 434.

On a donc, finalement,

$$v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha}\left(\frac{R}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}}\right)^2.$$

Les deux nombres β et α étant donnés directement par les instruments employés, on voit que la détermination de v est ramenée à la détermination du nombre qui représente, dans le système d'unités employé, la valeur de

$$\frac{R}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}}$$

pour le fil AB.

Les méthodes de comparaison des résistances donneront aisément la valeur de $\frac{2R}{\mathfrak{A}^2}$ pour le fil AB, lorsqu'on connaîtra la valeur de la même quantité pour un autre fil quelconque. La détermination de la vitesse caractéristique de l'électricité est donc ramenée au problème suivant :

Déterminer pour un fil métallique homogène, choisi arbitrairement, la valeur du rapport $\frac{R}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}}$ *dans le système d'unités adopté.*

Si le système d'unités adopté est le système électromagnétique $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ est égal à l'unité, et le problème précédent peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Déterminer, en unités électromagnétiques, la résistance d'un fil métallique arbitrairement choisi.

Le problème auquel la détermination de la vitesse caractéristique de l'électricité est ainsi ramenée se nomme le problème de la *détermination de l'ohm.*

§ 8. — Détermination de l'ohm.

La première méthode permettant de déterminer le rapport $\frac{R}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}}$ pour un fil métallique est due à G. Kirchhoff [1]. On en a donné depuis un grand nombre d'autres, que l'on trouvera exposées dans les Traités. Notre intention étant seulement d'indiquer comment il est possible de résoudre le

[1] G. Kirchhoff, *Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität elektrischer Ströme abhängt* (*Poggendorff's Annalen*, t. LXXVI; 1849. — *G. Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 118).

problème de la détermination de l'ohm, nous indiquerons ici une seule méthode, due à Weber, permettant d'atteindre cette détermination.

Prenons, comme au Chapitre III, un cadre plan, mobile autour d'un axe vertical situé dans son plan et relié à une boussole des tangentes. Supposons le plan du cadre d'abord perpendiculaire au plan du méridien magnétique, et prenons pour face positive celle qui regarde le nord. Faisons tourner le cadre d'un angle droit.

L'induction terrestre met en mouvement, dans le circuit, une quantité d'électricité [Livre XIII, Chap. III, égalité (16)]

$$Q = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{H\Omega}{R},$$

Ω étant l'aire du cadre, H la composante horizontale du magnétisme terrestre et R la résistance totale du circuit.

La boussole des tangentes agit ici comme galvanomètre balistique; l'aiguille est déviée d'un angle d'impulsion θ.

On a [Livre XV, Chap. X, égalité (4)]

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} Q = -\frac{\rho}{\pi} \sin\frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{H}{M}} I,$$

ρ étant le rayon du cadre de la boussole des tangentes, I le moment d'inertie de l'aiguille et M son moment magnétique.

On tire de là

$$\frac{R}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}} = \frac{\pi\Omega}{\rho \sin\frac{\theta}{2}} \sqrt{\frac{MH}{I}}.$$

Les quantités qui figurent au second membre sont toutes mesurables. L'expérience en question permet donc de déterminer la valeur de $\frac{R}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}}$ pour le fil qui forme le cadre tournant, le cadre de la boussole et la ligne de jonction.

§ 9. — Sur la valeur de v.

Si l'on prend, d'une part, les résultats de l'une des nombreuses méthodes de détermination de l'ohm; d'autre part, les résultats obtenus soit par la méthode indiquée par W. Thomson pour déterminer v, soit par l'une des méthodes qu'ont indiquées MM. Weber, Kohlrausch et Maxwell, on obtiendra la vitesse caractéristique de l'électricité.

Les diverses méthodes que nous venons de citer ont donné pour v les valeurs suivantes, qui sont évaluées en centimètres par seconde :

Méthode de Weber et Kohlrausch......... $v = 310740.10^5$
Méthode de Maxwell...................... $v = 288000.10^5$
Méthode de Sir W. Thomson............. $v = 282000.10^5$

Maxwell a fait cette remarque importante que *la différence entre les valeurs trouvées pour la vitesse caractéristique de l'électricité et les valeurs trouvées pour la vitesse de la lumière dans le vide est de l'ordre des erreurs d'expérience.*

Voici, en effet, les valeurs trouvées pour la vitesse V de la lumière dans le vide :

Méthode de M. Fizeau.................... $V = 314000.10^5$
Méthodes astronomiques.................. $V = 308000.10^5$
Méthode de Foucault..................... $V = 298360.10^5$

On peut donc regarder comme *probable* la proposition suivante :

La vitesse caractéristique de l'électricité est égale à la vitesse de la lumière dans le vide.

§ 10. — Dimensions des unités électriques — Système C.G.S. Système pratique.

Dans chacun des systèmes d'unités qui ont été définis au § 5, l'unité de charge électrique, et, par conséquent, toutes les autres unités électriques, dépendent exclusivement des unités fondamentales de longueur, de temps et de masse; mais elles n'en dépendent pas de la même manière dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique. En d'autres termes, elles n'ont pas les mêmes dimensions dans les deux systèmes.

Nous allons déterminer ici ces dimensions :

1° *Système électrostatique.*

La définition de l'unité de charge électrique dans le système électrostatique est exactement la même que la définition de l'unité de quantité de magnétisme. Les dimensions de la quantité de magnétisme, trouvées au § 1, sont donc les dimensions de la charge électrique dans le système électrostatique.

Ainsi la *charge électrique* a pour dimensions, dans le système électrostatique,

$$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

On trouvera sans peine que, dans ce système, la *fonction potentielle* et la *force électromotrice* ont les mêmes dimensions

$$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

L'*intensité,* rapport d'une quantité d'électricité à un temps, a pour dimensions

$$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}.$$

La *résistance,* rapport d'une force électromotrice à une intensité, a pour dimensions

$$L^{-1}T.$$

La *capacité,* rapport d'une quantité d'électricité à une force électromotrice, a pour dimensions

$$L.$$

2° *Système électromagnétique.*

Dans le système électromagnétique, l'action mutuelle de deux charges électriques s'écrit

$$F = v^2 \frac{qq'}{r^2}.$$

Multiplions l'unité de longueur par L, l'unité de temps par T, l'unité de masse par M. Les grandeurs qui étaient représentées par les nombres F, v, q, q', r sont maintenant représentées par les nombres F_1, v_1, q_1, q'_1, r_1, et l'on a

$$F_1 = v_1^2 \frac{q_1 q'_1}{r_1^2},$$

formule qui, comparée à la précédente, donne

$$\frac{F}{F_1} = \frac{v^2}{v_1^2} \frac{q}{q_1} \frac{q'}{q'_1} \frac{r_1^2}{r^2}.$$

Or on a

$$\frac{r_1}{r} = L^{-1},$$

$$\frac{v}{v_1} = LT^{-1},$$

$$\frac{F}{F_1} = MLT^{-2}.$$

La formule précédente devient donc

$$\frac{q}{q_1} \frac{q'}{q'_1} = ML$$

et, par conséquent,

$$\frac{q}{q_1} = \frac{q'}{q'_1} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, si l'on multiplie l'unité de longueur par L, l'unité de temps par T, l'unité de masse par M, le nombre qui représente une charge électrique dans le système électromagnétique est divisé par $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$.

En d'autres termes, les dimensions de la *charge électrique* dans le système électromagnétique sont

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}.$$

La *fonction potentielle,* rapport d'une charge électrique à une longueur, a pour dimensions

$$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}.$$

L'*intensité,* rapport d'une charge électrique à un temps, a pour dimensions

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Pour connaître les dimensions de la résistance, il suffit de se souvenir que le produit d'une résistance par le carré d'une intensité et par un temps représente un travail. On trouve alors aisément que la *résistance* a pour dimensions

$$LT^{-1}.$$

La *force électromotrice,* produit d'une résistance par une intensité, a pour dimensions

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

La *capacité,* rapport d'une charge électrique à une force électromotrice, a pour dimensions

$$L^{-1} T^{2}.$$

Ces formules précisent la manière dont les diverses unités, soit électrostatiques, soit électromagnétiques, dépendent des unités fondamentales de longueur, de temps et de masse.

On sait que les physiciens sont convenus d'adopter un système d'unités fondamentales dit *système* C.G.S.; dans ce système, l'unité de longueur est le *centimètre,* c'est-à-dire la centième partie de la longueur du mètre des Archives placé dans la glace fondante; l'unité de temps est la *seconde* sexagésimale de temps moyen; l'unité de masse est le *gramme,* c'est-à-dire la millième partie de la masse du kilogramme des Archives.

A ce système correspond un système C.G.S. d'unités électriques, soit électrostatiques, soit électromagnétiques.

Les unités électromagnétiques ainsi déterminées ne sont pas d'une grandeur commode dans la pratique; aussi les physiciens ont-ils substitué au système C.G.S. un autre système d'unités fondamentales dit *système pratique.* Les unités fondamentales pratiques s'obtiennent en multipliant les unités fondamentales C.G.S. par certaines puissances de 10.

L'unité de longueur pratique vaut 10^{9} unités C.G.S.; c'est environ le quart du méridien terrestre.

L'unité de temps pratique est encore la seconde.

L'unité de masse pratique vaut 10^{-11} unités C.G.S., c'est la cent-millionième partie d'un milligramme.

D'après les dimensions des diverses grandeurs électriques dans le système électromagnétique, on arrive sans peine aux résultats suivants :

Dans le système électromagnétique, l'unité pratique de *charge électrique* vaut 10^{-1} unités C.G.S. On lui donne le nom de *coulomb.*

L'unité pratique de *fonction potentielle* vaut 10^{-10} unités C.G.S. On ne lui a pas donné de nom particulier.

L'unité pratique d'*intensité* vaut 10^{-1} unités C.G.S. On lui donne le nom d'*ampère*.

L'unité pratique de *résistance* vaut 10^9 unités C.G.S. On lui donne le nom d'*ohm*. C'est la résistance qu'offre, dans la glace fondante, une colonne de mercure d'un millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur environ.

L'unité pratique de *force électromotrice* vaut 10^8 unités C.G.S. On lui donne le nom de *volt*, abréviation de Volta. C'est sensiblement la force électromotrice d'un élément Daniell.

L'unité pratique de *capacité* vaut 10^{-9} unités C.G.S. On lui donne le nom de *farad*, abréviation de Faraday.



LIVRE XVI.

ACTIONS QUI S'EXERCENT ENTRE LES AIMANTS ET LES COURANTS QUELCONQUES.

CHAPITRE PREMIER.

L'INDUCTION D'UN ÉLÉMENT MAGNÉTIQUE SUR UN ÉLÉMENT CONDUCTEUR NE PEUT ÊTRE REGARDÉE COMME ÉMANANT DE SES DEUX POLES.

Nous avons fait au Chapitre I du Livre XV l'hypothèse suivante :

La force électromotrice d'induction électromagnétique $\mathfrak{E}\,ds$, *engendrée par un certain nombre d'éléments magnétiques* dv, dv', ... *dans un élément conducteur* ds, *est donnée par l'égalité*

$$\mathfrak{E}\,ds\,dt = \delta\nu + \delta\nu' + \ldots,$$

$\delta\nu^{(k)}$ *dépendant seulement des paramètres qui fixent l'état relatif des deux éléments* ds, $dv^{(k)}$ *et des variations que ces paramètres éprouvent pendant le temps* dt.

Cette hypothèse entraîne, en vertu des raisonnements exposés au Chapitre I du Livre XV, l'expression suivante de $\delta\nu$:

$$\delta\nu = \delta \left\{ M[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\mathfrak{M}\,dv\,ds \right\} \tag{1}$$

[Livre XV, Chap. I, égalité (1)].

Dans cette égalité, $\mathfrak{M}$ est l'intensité d'aimantation en un point de l'élément dv; dl est la direction de cette aimantation; M est

une fonction finie (sauf pour $r = 0$), continue et uniforme des paramètres mis en évidence.

Au Chapitre II, nous avons fait une nouvelle hypothèse, qui est la suivante :

Lorsqu'un élément magnétique variable est placé en présence d'un conducteur fermé et que ces deux corps se déplacent l'un par rapport à l'autre de manière que le conducteur induit soit traversé par un courant uniforme, l'action électromotrice produite par l'élément magnétique peut être remplacée par des actions électromotrices émanant de ses deux pôles.

Cette hypothèse, dont nous avons précisé le sens, entraîne le résultat suivant (Livre XV, Chap. II)

$$\text{M}[r, (r, ds), (r, dl), e] = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\Delta + \frac{\partial^2 \text{F}(r)}{\partial s\, \partial l}, \tag{2}$$

$\mathfrak{H}$ étant une constante ; Δ étant défini par l'égalité

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\begin{vmatrix} \frac{x-\xi}{r} & \frac{y-\eta}{r} & \frac{z-\zeta}{r} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d\xi}{dl} & \frac{d\eta}{dl} & \frac{d\zeta}{dl} \end{vmatrix} \tag{3}$$

et $\text{F}(r)$ étant une fonction uniforme, finie et continue de la distance r des deux éléments ds, dl, sauf pour $r = 0$.

Nous avons vu que cette expression de M suffisait à l'étude des actions qui s'exercent dans un système composé d'aimants et de courants linéaires, fermés et uniformes. Il s'agit maintenant de pousser plus loin notre étude et d'examiner les propriétés des systèmes formés par des aimants et par des courants quelconques, en commençant par les systèmes formés d'aimants et de courants linéaires quelconques.

Nous sommes portés, par les habitudes qui ont régné jusqu'ici dans l'étude du magnétisme et de l'électromagnétisme, à admettre cette hypothèse fondamentale :

L'action électromotrice $\delta\nu$ exercée par un élément magné-

tique quelconque dv sur un élément de conducteur quelconque ds peut être regardée comme la différence de deux actions électromotrices émanées de ses deux pôles.

Cette proposition, dont le sens précis résulte de ce qui a été dit au début du Chapitre II du Livre XV, se traduirait analytiquement de la manière suivante :

On doit avoir une égalité de la forme

$$\mathrm{M}[r, (r, ds), (r, dl), e] = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial l}, \tag{4}$$

$\mathfrak{P}$ étant une fonction définie sans ambiguïté lorsqu'on connaît la situation relative de l'élément conducteur ds et d'un pôle de l'élément dl.

De ce que la situation relative de l'élément conducteur ds et d'un point de l'élément dl dépend uniquement des deux paramètres r et (r, ds), il en résulte que $\mathfrak{P}$ est une fonction uniforme de r et de $\frac{\partial r}{\partial s}$.

Les égalités (2) et (4) donnent

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\Delta = \frac{\partial}{\partial l}\left[\mathfrak{P}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right) - \frac{\partial \mathrm{F}(r)}{\partial s}\right].$$

Remplaçons Δ par sa valeur et exprimons que le produit du premier membre par dl est la différentielle totale d'une fonction de ξ, η, ζ ; nous trouverons les égalités

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{x-\xi}{r^3}\frac{dy}{ds} - \frac{y-\eta}{r^3}\frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{z-\zeta}{r^3}\frac{dx}{ds} - \frac{x-\xi}{r^3}\frac{dz}{ds}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{y-\eta}{r^3}\frac{dz}{ds} - \frac{z-\zeta}{r^3}\frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{x-\xi}{r^3}\frac{dy}{ds} - \frac{y-\eta}{r^3}\frac{dx}{ds}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{z-\zeta}{r^3}\frac{dx}{ds} - \frac{x-\xi}{r^3}\frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{y-\eta}{r^3}\frac{dz}{ds} - \frac{z-\zeta}{r^3}\frac{dy}{ds}\right)\right] = 0.$$

Ces relations doivent avoir lieu quelle que soit l'orientation de l'élément ds. Si l'on fait

$$\frac{dx}{ds} = 1, \qquad \frac{dy}{ds} = 0, \qquad \frac{dz}{ds} = 0,$$

on a

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{x-\xi}{r^3}=0,$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\eta}{r^3}=0,$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{z-\zeta}{r^3}=0.$$

Les trois quantités

$$\frac{x-\xi}{r^3},\quad \frac{y-\eta}{r^3},\quad \frac{z-\zeta}{r^3}$$

dépendent évidemment de ξ. On ne peut donc avoir aucune des trois identités

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{x-\xi}{r^3}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{y-\eta}{r^3}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{z-\zeta}{r^3}=0,$$

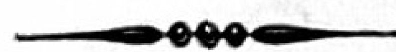
et les égalités précédentes exigeraient que l'on eût

$$\mathfrak{H}=0.$$

Or les expériences faites avec des aimants et des courants fermés et uniformes nous apprennent que la constante $\mathfrak{H}$ n'est pas égale à 0. Cette conséquence est donc inacceptable.

Ainsi, si l'on admet que l'induction électromagnétique existe, si l'on admet que les lois de cette induction doivent concorder avec les hypothèses très simples qui ont été faites aux Chapitres I et II du Livre précédent, hypothèses que, d'ailleurs, il semble bien difficile de ne pas faire, on est obligé d'accorder que la force électromotrice d'induction, engendrée dans un élément conducteur quelconque par un élément magnétique quelconque, ne peut être regardée comme la différence de deux forces électromotrices engendrées par deux masses magnétiques égales et de signes contraires concentrées aux deux pôles de l'élément magnétique, chacune de ces forces étant proportionnelle en grandeur à la masse dont elle émane et dépendant seulement de la position de cette masse par rapport à l'élément conducteur et des variations de cette position.

En d'autres termes, *l'action d'un élément magnétique ne peut, en général, équivaloir à l'action de deux masses magnétiques égales et de signe contraire.*



CHAPITRE II.

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LES CONDUCTEURS LINÉAIRES. AIMANTATION PAR LES COURANTS LINÉAIRES.

§ 1. — Induction électromagnétique dans les conducteurs linéaires.

Le Chapitre précédent nous a montré qu'il était impossible d'étendre à l'induction électromagnétique, exercée dans des conducteurs quelconques, l'hypothèse qui nous a servi à établir les lois de l'induction électromagnétique dans les conducteurs fermés traversés par des courants uniformes.

Mais l'étude de ces dernières lois nous conduit à une conséquence susceptible de s'étendre à l'induction exercée par des aimants dans des conducteurs quelconques, et l'extension de cette conséquence va devenir l'hypothèse fondamentale sur laquelle reposera la théorie générale de l'induction électromagnétique.

Considérons un élément magnétique de moment $\mathfrak{M}\,dv$. Soit BA ou dl son axe magnétique. Menons un plan perpendiculaire à l'axe dl; dans ce plan, traçons un petit circuit C embrassant une aire Ω dont la normale positive est dl. Supposons ce circuit parcouru par un courant dont l'intensité J′ est donnée par la relation

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J'\Omega = \mathfrak{M}\,dv.$$

Par extension de ce que nous avons vu dans l'étude des courants fermés et uniformes, nous admettrons que *cet élément magnétique et ce petit courant engendrent, en toutes circonstances, la même force électromotrice d'induction dans un courant linéaire quelconque.*

Cette hypothèse ramène immédiatement l'étude de la loi élémentaire de l'induction électromagnétique à un problème d'induction électrodynamique.

Soit $\Pi(C, ds)$ le potentiel électrodynamique du courant C sur l'élément ds parcouru par un courant égal à l'unité. Nous aurons

$$\delta\nu = \delta\,\Pi(C, ds). \tag{2}$$

Calculons le second membre. Comme le circuit C est parcouru par un courant uniforme, si nous désignons par ds un élément de ce circuit, nous pourrons écrire

$$\Pi(C, ds) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} J' ds \int_C \frac{\cos(ds, ds')}{r}\, ds'. \tag{3}$$

Or on a

$$\int_C \frac{\cos(ds, ds')}{r}\, ds' = \int_C \frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) ds'.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de l'aire Ω, ou, ce qui revient au même, d'un point de l'élément magnétique. Le théorème de Stokes donnera

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} &\int_C \frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) ds' \\ &= \Omega\left[\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dz}{ds}\right)\cos(dl, x)\right. \\ &\qquad + \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dx}{ds}\right)\cos(dl, y) \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dy}{ds}\right)\cos(dl, z)\right]. \end{aligned} \right.$$

Moyennant les relations (1) et (4), l'égalité (3) devient

$$\begin{aligned} \Pi(C, ds) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\, dv\, ds &\left[\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dz}{ds}\right)\cos(dl, x)\right. \\ &+ \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dx}{ds}\right)\cos(dl, y) \\ &\left. + \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dy}{ds}\right)\cos(dl, z)\right]. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont les composantes de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$, on aura

$$\mathcal{A} = \mathfrak{M}\cos(dl, x),$$
$$\mathcal{B} = \mathfrak{M}\cos(dl, y),$$
$$\mathcal{C} = \mathfrak{M}\cos(dl, z),$$

et le potentiel précédent, auquel nous donnerons le nom, qui sera justifié plus tard, de *potentiel électromagnétique* de l'élément magnétique dv sur l'élément conducteur ds traversé par un courant égal à l'unité, prendra la forme

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \Pi(C, ds) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, dv\, ds \Bigg\{ & \mathcal{A}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dz}{ds}\right) \\ & + \mathcal{B}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dx}{ds}\right) \\ & + \mathcal{C}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dy}{ds}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

On peut encore lui donner une autre forme. Si l'on pose

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\begin{vmatrix} \frac{x-\xi}{r} & \frac{y-\eta}{r} & \frac{z-\zeta}{r} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d\xi}{dl} & \frac{d\eta}{dl} & \frac{d\zeta}{dl} \end{vmatrix},$$

on aura

$$(6)\quad \Pi(C, ds) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\Delta\,\mathfrak{M}\, dv\, ds.$$

En vertu de cette dernière expression, on aura

$$(7)\quad \delta\mathrm{v} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\delta(\Delta\,\mathfrak{M}\, dv\, ds).$$

Cette égalité donne la loi élémentaire de l'induction électromagnétique. Elle rentre bien, ainsi qu'il devait arriver, dans la forme donnée au Livre XV, Chapitre II,

$$\delta\mathrm{v} = \delta\left\{\mathfrak{M}\, dv\, ds\left[\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\Delta + \frac{\partial^2 F(r)}{\partial s\,\partial l}\right]\right\}.$$

Il suffit, pour faire coïncider ces deux formes, de prendre

$$F(r) = \text{const.},$$

et de remarquer que

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}.$$

§ 2. — Énergie interne d'un système d'aimants et de courants linéaires.

Nous avons vu [Livre XV, Chap. IV, égalités (4), (5), (6), (7)] que l'énergie interne d'un système de courants linéaires quelconques et d'aimants était de la forme suivante

$$\begin{aligned} EU = E\Upsilon + \mathcal{J} + W + \sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q \\ + \int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T) - T\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right]dv \\ + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)JJ'\,ds\,ds' \\ + \sum\Psi[r,\ (r, ds),\ (r, dl),\ e]\,J\,ds\,\mathfrak{M}\,dv. \end{aligned}$$

Nous continuerons à admettre, dans des systèmes renfermant des courants quelconques, la définition des corps parfaitement doux que nous avons donnée au Livre XV, Chapitre IV, § 4. Nous allons en faire usage pour déterminer la fonction Ψ.

Imaginons un élément magnétique $\mathfrak{M}\,dv$ invariable de position et d'aimantation placé en présence d'un conducteur invariable de forme et de position, traversé par un courant non uniforme d'intensité variable.

Soient $e\,ds$ la force électromotrice ordinaire; e' la force électromotrice d'induction électrodynamique qui agissent dans l'élément ds; comme il n'y a pas d'induction électromagnétique, comme il n'y a pas dans le système de variation d'aimantation, la proposition qui sert de définition aux corps parfaitement doux donne

$$-E\frac{dU}{dt} = \sum\left(e - T\frac{\partial e}{\partial T}\right)J\,ds + \sum e'\,J\,ds.$$

Or on a

$$\sum e\,J\,ds = -\left[E\frac{d(\Upsilon - T\Sigma)}{dt} + \frac{dW}{dt} + \sum\Theta\frac{dq}{dt}\right],$$

$$\sum e'\,J\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)J\,ds\,J'\,ds'.$$

Enfin, suivant l'usage, nous négligeons la quantité

$$\frac{d}{dt}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right).$$

L'égalité précédente se réduit donc à

$$\mathfrak{M}\, dv \int \Psi[r, (r, ds), (r, dl), e]\,\frac{dJ}{dt}\,ds = 0.$$

Or J est seulement assujetti à varier d'une manière continue le long du conducteur et à s'annuler à ses deux extrémités s'il est ouvert; ces restrictions sont aussi les seules qui pèsent sur $\frac{dJ}{dt}$. L'égalité précédente ne saurait donc avoir lieu en général, si l'on n'avait

$$\Psi[r, (r, ds), (r, dl), e] = 0.$$

L'énergie interne d'un système renfermant des courants quelconques et des aimants est alors donnée par l'égalité

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} EU = {} & E\Upsilon + \mathcal{J} + W + \sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q \\ & + \int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T) - T\frac{\partial\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right]dv \\ & + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)JJ'\,ds\,ds'. \end{aligned}\right.$$

§ 3. — Aimantation par des courants linéaires quelconques.

Nous allons faire usage de cette égalité pour déterminer les lois de l'aimantation du fer doux par des courants linéaires quelconques.

Supposons un système qui renferme :

1° Un aimant permanent 1;

2° Un morceau de fer doux 2;

3° Un conducteur quelconque C, traversé par un courant quelconque.

Nous supposons tous ces corps immobiles; l'aimantation du fer doux varie.

Chaque élément ds du conducteur renferme une force électro-

motrice ordinaire $e\,ds$; une force électromotrice d'induction électromagnétique $e''\,ds$.

D'après la définition électromagnétique des corps parfaitement doux, nous devrons avoir

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} &= dt\int \mathrm{J}\left[\left(e - \mathrm{T}\frac{\partial e}{\partial \mathrm{T}}\right) + e' + e''\right] ds \\ &\quad + \mathrm{T}\int \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2\, \partial \mathrm{T}}\, \delta\mathfrak{M}_2\, dv_2. \end{aligned} \right.$$

Or on a

$$(10)\quad dt\int e\mathrm{J}\,ds = -\mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) - \delta\mathrm{W} - \sum \Theta\,\delta q,$$

$$(11)\quad dt\int e'\mathrm{J}\,ds = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\sum\left(\frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta' + \frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega\right)\mathrm{J}\mathrm{J}'\,ds\,ds'.$$

D'après l'égalité (5),

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} dt\int e''\mathrm{J}\,ds = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int \Bigg\{ & \delta\mathcal{A}_2 \int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta_2}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta_2}\frac{dz}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds \\ & + \delta\mathcal{B}_2 \int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi_2}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta_2}\frac{dx}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds \\ & + \delta\mathcal{C}_2 \int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta_2}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi_2}\frac{dy}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds \Bigg\}\, dv_2. \end{aligned} \right.$$

Enfin, suivant l'usage, on néglige

$$\delta\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right).$$

D'autre part, si l'on pose

$$\frac{1}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)} = \frac{1}{\mathfrak{M}_2}\,\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{\partial \mathfrak{M}_2},$$

on aura

$$\delta\int \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)\,dv_2 = \int (\mathcal{A}_2\,\delta\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2\,\delta\mathcal{B}_2 + \mathcal{C}_2\,\delta\mathcal{C}_2)\,\frac{1}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}\,dv_2.$$

Soient $\mathcal{V}_1(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, $\mathcal{V}_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2,)$ les fonctions potentielles

magnétiques des corps 1 et 2 au point (ξ_2, η_2, ζ_2); l'égalité (8) donnera

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} = \mathrm{E}\,\delta\Upsilon + \delta\mathrm{W} + \delta\sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q - \mathrm{T}\int\frac{\partial^2\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2,\mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}_2\,\partial\mathrm{T}}\,\partial\mathfrak{M}_2\,dv_2 \\ +\int\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\xi_2}\,\delta\mathcal{A}_2 + \frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\eta_2}\,\delta\mathcal{B}_2 + \frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\zeta_2}\,\delta\mathcal{C}_2\right]dv_2 \\ +\int(\mathcal{A}_2\,\delta\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2\,\delta\mathcal{B}_2 + \mathcal{C}_2\,\delta\mathcal{C}_2)\,\frac{1}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}\,dv_2. \end{aligned}\right.$$

Moyennant les égalités (10), (11), (12) et (13), l'égalité (9) devient

$$\begin{aligned} \int\Bigg\{&\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\xi_2} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta_2}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta_2}\frac{dz}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds + \frac{\mathcal{A}_2}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}\right]\delta\mathcal{A}_2 \\ &+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\eta_2} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi_2}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta_2}\frac{dx}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds + \frac{\mathcal{B}_2}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}\right]\delta\mathcal{B}_2 \\ &+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\zeta_2} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta_2}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi_2}\frac{dy}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds + \frac{\mathcal{C}_2}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}\right]\delta\mathcal{C}_2\Bigg\}\,dv_2 = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient les variations $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$, des composantes de l'aimantation au point ξ_2, η_2, ζ_2, du corps parfaitement doux; on voit donc que l'on doit avoir (en supprimant les indices inutiles) en tout point (ξ, η, ζ) d'un corps parfaitement doux

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\xi} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dz}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds\right], \\ \mathcal{B} &= -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\eta} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dx}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds\right], \\ \mathcal{C} &= -\mathrm{F}(\mathfrak{M})\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial\zeta} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dy}{ds}\right)\mathrm{J}\,ds\right]. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les lois fondamentales de l'aimantation d'un morceau de fer doux sous l'action d'un courant linéaire quelconque qui n'a avec lui aucun point commun.

Posons

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \displaystyle\int \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \dfrac{dy}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \dfrac{dz}{ds} \right) \mathrm{J}\, ds, \\ \mathfrak{Q} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \displaystyle\int \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \dfrac{dz}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \dfrac{dx}{ds} \right) \mathrm{J}\, ds, \\ \mathfrak{R} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \displaystyle\int \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \dfrac{dx}{ds} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \dfrac{dy}{ds} \right) \mathrm{J}\, ds, \end{cases}$$

et écrivons-les

$$(16)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M}) \left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial \xi} + \mathfrak{P} \right], \\ \mathcal{B} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M}) \left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial \eta} + \mathfrak{Q} \right], \\ \mathcal{C} = -\mathrm{F}(\mathfrak{M}) \left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial \zeta} + \mathfrak{R} \right]. \end{cases}$$

Les trois quantités $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ ne sont pas, en général, les trois dérivées partielles d'une même fonction de ξ, η, ζ. Pour qu'il en fût ainsi, en effet, il faudrait que l'on eût

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned}$$

Moyennant la relation

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta^2} = 0,$$

ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} &\int \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial \eta} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial \zeta} \frac{dz}{ds} \right) \mathrm{J}\, ds = 0, \\ &\int \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta\, \partial \xi} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta\, \partial \zeta} \frac{dz}{ds} \right) \mathrm{J}\, ds = 0, \\ &\int \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta\, \partial \xi} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta\, \partial \eta} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta^2} \frac{dz}{ds} \right) \mathrm{J}\, ds = 0, \end{aligned}$$

ou encore

$$\int \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} J\, ds = 0,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} J\, ds = 0,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} J\, ds = 0.$$

Lorsque J est constant, c'est-à-dire lorsque le courant est fermé et uniforme, ces équations sont satisfaites, comme nous le faisaient prévoir les propriétés des courants fermés et uniformes. Nous allons voir qu'elles ne peuvent l'être en général.

J étant seulement assujetti à varier d'une manière continue le long du conducteur, on peut définir une fonction $J(x, y, z)$, continue dans tout l'espace et prendre la valeur de cette fonction pour valeur de J en tout point d'un conducteur quelconque. On voit alors aisément que la première des équations précédentes exige que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial y}\frac{\partial J}{\partial z} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial z}\frac{\partial J}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial z}\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial x}\frac{\partial J}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial x}\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial y}\frac{\partial J}{\partial x} = 0.$$

Ces équations ne peuvent être vérifiées que si l'on a, en tout point de l'espace,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire, en tout point d'un conducteur quelconque,

$$\frac{dJ}{ds} = 0,$$

ce qui exprime que le courant est uniforme.

On arrive donc à la proposition suivante :

Contrairement à ce qui arrive dans l'aimantation par les

aimants ou par les courants uniformes dans un morceau de fer doux aimanté par des courants non uniformes, les lignes d'aimantation, dont la tangente a pour cosinus directeurs $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}}$, $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}}$, $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{M}}$, *ne sont pas les trajectoires orthogonales d'une même famille de surfaces.*

Sauf en ce point, la théorie de l'aimantation par des courants quelconques présente la plus grande analogie avec la théorie de l'aimantation par les aimants.

Prenons, par exemple, le cas où la fonction magnétisante $F(\mathcal{M})$ se réduit à un coefficient d'aimantation constant k.

Moyennant la relation fondamentale, bien facile à vérifier sur les égalités (15),

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \zeta} = 0, \tag{17}$$

les égalités (16) donnent

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \zeta} = -k(\Delta \mathcal{V}_1 + \Delta \mathcal{V}_2).$$

Mais on sait qu'en tout point du fer doux

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{V}_1 &= 0, \\ \Delta \mathcal{V}_2 &= -4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \zeta}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

On a donc, en tout point du fer doux,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \zeta} = 0. \tag{19}$$

Ainsi, *lorsqu'un corps parfaitement doux à coefficient d'aimantation constant est soumis à l'action de courants quelconques, il prend une aimantation qui est, à chaque instant, solénoïdale.*

Les égalités (18) et (19) montrent que la fonction $\mathcal{V}_2$ vérifie l'équation de Laplace aussi bien à l'intérieur du fer doux qu'à l'extérieur. Il reste à trouver à quelle condition elle est assujettie à la surface du fer doux.

Or les équations (16) donnent

$$\mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z)$$
$$= -k\left[\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_i} + \mathcal{P}\cos(N_i, x) + \mathcal{Q}\cos(N_i, y) + \mathcal{R}\cos(N_i, z)\right].$$

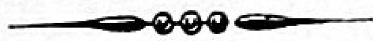
Mais on a

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_e} = 4\pi\,[\mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z)].$$

On a donc

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &4\pi k\left[\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_i} + \mathcal{P}\cos(N_i, x) + \mathcal{Q}\cos(N_i, y) + \mathcal{R}\cos(N_i, z)\right] \\ &\qquad\qquad + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_e} + (1 + 4\pi k)\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_i} = 0, \end{aligned}\right.$$

ce qui est la condition cherchée.



CHAPITRE III.

FORCES QUI S'EXERCENT ENTRE UN COURANT LINÉAIRE ET UN AIMANT.

§ 1. — Action d'un courant linéaire sur un aimant.

Étant données la loi de l'induction électromagnétique et l'expression de l'énergie interne d'un système qui renferme des courants linéaires quelconques et des aimants, il suffira de reproduire à peu près textuellement les raisonnements exposés au Livre XV, Chapitre VIII, pour arriver au résultat suivant :

Lorsqu'on déplace en présence l'un de l'autre un courant linéaire quelconque et un aimant, les actions mutuelles de ces deux corps effectuent un travail égal au signe près à

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sum \mathfrak{M}\, dv\, J\, \delta(\Delta\, ds);$$

la variation est prise en supposant l'aimantation invariable de grandeur et invariablement liée, comme direction, à la substance qui forme l'aimant.

La quantité

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sum \Delta\, \mathfrak{M}\, dv\, J\, ds$$

représente donc la forme générale du potentiel électromagnétique d'un aimant et d'un conducteur linéaire quelconque.

La forme de ce potentiel nous apprend immédiatement que les actions mutuelles d'un élément magnétique et d'un courant quelconque sont les mêmes que les actions mutuelles de ce courant et

du petit courant équivalent, par hypothèse, à l'élément magnétique dans l'étude des phénomènes d'induction.

Cherchons l'action qu'un courant quelconque exerce, d'après la loi précédente, sur un élément magnétique.

Cette action se réduit à une force, de composantes X, Y, Z, appliquée au milieu $m(\xi, \eta, \zeta)$ de l'élément magnétique et d'un couple dont l'axe a pour composantes L, M, N. Calculons ces quantités X, Y, Z, L, M, N.

Pour déterminer X, donnons à l'élément magnétique une translation $\delta\xi$. Le potentiel électromagnétique du courant sur l'élément subira une variation $\delta\Pi$, et nous aurons

$$X\,\delta x = -\,\delta\Pi.$$

Tout revient donc à calculer $\delta\Pi$.

Or, nous avons

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\,\delta\int J\,\Delta\,ds.$$

Nous avons aussi

$$-\Delta = \left(\frac{dy}{ds}\frac{d\zeta}{dl} - \frac{dz}{ds}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + \left(\frac{dz}{ds}\frac{d\xi}{dl} - \frac{dx}{ds}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + \left(\frac{dx}{ds}\frac{d\eta}{dl} - \frac{dy}{ds}\frac{d\xi}{dl}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}.$$

On voit alors que si ξ augmente de $\delta\xi$, tous les autres paramètres demeurant constants, on aura

$$\delta\Delta = \left[\left(\frac{dz}{ds}\frac{d\eta}{dl} - \frac{dy}{ds}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2} + \left(\frac{dx}{ds}\frac{d\zeta}{dl} - \frac{dz}{ds}\frac{d\xi}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \left(\frac{dy}{ds}\frac{d\xi}{dl} - \frac{dx}{ds}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right]\delta\xi.$$

Ce résultat nous donne la première des trois égalités

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{M}\,dv\int\Bigg[\left(\frac{dz}{ds}\frac{d\eta}{dl}-\frac{dy}{ds}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2}\\
&\qquad+\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\zeta}{dl}-\frac{dz}{ds}\frac{d\xi}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta}+\left(\frac{dy}{ds}\frac{d\xi}{dl}-\frac{dx}{ds}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\Bigg]J\,ds,\\
Y &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{M}\,dv\int\Bigg[\left(\frac{dz}{ds}\frac{d\eta}{dl}-\frac{dy}{ds}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\,\partial\xi}\\
&\qquad+\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\zeta}{dl}-\frac{dz}{ds}\frac{d\xi}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}+\left(\frac{dy}{ds}\frac{d\xi}{dl}-\frac{dx}{ds}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\,\partial\zeta}\Bigg]J\,ds,\\
Z &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{M}\,dv\int\Bigg[\left(\frac{dz}{ds}\frac{d\eta}{dl}-\frac{dy}{ds}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\xi}\\
&\qquad+\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\zeta}{dl}-\frac{dz}{ds}\frac{d\xi}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\eta}+\left(\frac{dy}{ds}\frac{d\xi}{dl}-\frac{dx}{ds}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\Bigg]J\,ds;
\end{aligned}\right.$$

les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Calculons maintenant les trois quantités L, M, N. Supposons que l'élément dl subisse une rotation $\delta\nu$ autour de mZ. Les sept quantités

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi},\quad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta},\quad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta},$$

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds};$$

$$\frac{d\zeta}{dl}$$

demeurent invariables. On a alors

$$\begin{aligned}
\delta\Delta = {}& \frac{dz}{ds}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,\delta\frac{d\eta}{dl}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\,\delta\frac{d\xi}{dl}\right)\\
&+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\left(\frac{dy}{ds}\,\delta\frac{d\xi}{dl}-\frac{dx}{ds}\,\delta\frac{d\eta}{dl}\right).
\end{aligned}$$

Or il est aisé de voir que l'on a

$$\delta \frac{d\xi}{dl} = -\frac{d\eta}{dl}\,\delta\nu,$$

$$\delta \frac{d\eta}{dl} = \frac{d\xi}{dl}\,\delta\nu.$$

On a alors

$$\delta\Delta = \frac{dz}{ds}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dl} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dl}\right)\delta\nu - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\left(\frac{dy}{ds}\,\delta\frac{d\eta}{dl} + \frac{dx}{ds}\,\delta\frac{d\xi}{dl}\right)\delta\nu.$$

On obtient ainsi la dernière des trois égalités

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{L} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv \displaystyle\int \left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\left(\frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{dl} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{dl}\right) - \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dl} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{dx}{ds}\right] \mathrm{J}\,ds. \\ \mathrm{M} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv \displaystyle\int \left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\left(\frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{dl} + \frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{dl}\right) - \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dl} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dl}\right)\frac{dy}{ds}\right] \mathrm{J}\,ds, \\ \mathrm{N} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv \displaystyle\int \left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{dl} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{dl}\right) - \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dl} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{dz}{ds}\right] \mathrm{J}\,ds. \end{cases}$$

Les deux premières s'établissent d'une manière analogue.

§ 2. — Action d'un élément magnétique sur un élément de courant quelconque.

L'action d'un élément magnétique AB sur un élément de conducteur quelconque $\mathrm{MN} = ds$, traversé de M en N par un courant dont l'intensité est J en M et $\left(\mathrm{J} + \frac{d\mathrm{J}}{ds}\,ds\right)$ en N, se définit comme l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque. D'après cette définition, le travail des actions en question, dans un déplacement qui amène l'élément MN en M'N', est égal au potentiel électromagnétique de l'élément AB sur un courant parcourant le circuit MNN'M'M dans le sens des lettres, et ayant :

En MN, une intensité qui varie de J à $\left(\mathrm{J} + \frac{d\mathrm{J}}{ds}\,ds\right)$;

En NN', une intensité $\left(\mathrm{J} + \frac{d\mathrm{J}}{ds}\,ds\right)$;

En N′M′, une intensité qui varie de $\left(J + \frac{dJ}{ds} ds\right)$;

En M′M, une intensité J.

On démontrera aisément que cette action se réduit à une force appliquée au milieu $O(x, y, z)$ de l'élément MN. Nous allons nous proposer de calculer les composantes X, Y, Z de cette force.

Soit $\Delta(d\sigma)$ la valeur de la quantité Δ pour le système formé par l'élément AB et un élément conducteur quelconque $d\sigma$.

Pour calculer X, nous donnons à l'élément MN une translation δx parallèle à Ox. Les deux lignes MM′, NN′ sont alors parallèles à Ox, de même sens, et égales à δx.

D'après la définition précédente, on a

$$X\delta x = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{M}\,dv\Big[\Delta(MN)\,J\,ds + \Delta(NN')\left(J + \frac{dJ}{ds}ds\right)\delta x + \Delta(N'M')\,J\,ds + \Delta(M'M)\,J\,\delta x\Big].$$

Si l'on remarque que l'on a sensiblement

$$\Delta(NN') + \Delta(M'M) = 0,$$

on voit que cette égalité peut s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} X\delta x = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{M}\,dv\,J\,[\Delta(MN)ds + \Delta(NN')\delta x + \Delta(N'M')ds + \Delta(M'M)\delta x] \\ \qquad\quad -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{M}\,dv\,\dfrac{dJ}{ds}\,\Delta(NN')\,ds. \end{cases}$$

Nous désignerons par σ l'angle sous lequel, du milieu m de l'élément magnétique AB, on voit la face positive du circuit MNN′M′M. Nous aurons

$$(4)\quad \frac{d\sigma}{dl} = \Delta(MN)\,ds + \Delta(NN')\,\delta x + \Delta(N'M')\,ds + \Delta(M'M)\,\delta x.$$

Soit N la normale à la face positive en question. Soit r la direction Om. Nous aurons

$$\sigma = \frac{\cos(N, r)\sin(ds, \delta x)}{r^2}\,ds\,\delta x.$$

Or on a

$$\cos(\text{N}, r) = \cos(\text{N}, x)\cos(r, x) + \cos(\text{N}, y)\cos(r, y) + \cos(\text{N}, z)\cos(r, z).$$

D'autre part, on voit bien aisément que

$$\cos(\text{N}, x) = 0,$$

$$\cos(\text{N}, y) = \frac{\cos(ds, \text{OZ})}{\sin(ds, \text{OX})} = \frac{\frac{dz}{ds}}{\sin(ds, \text{OX})},$$

$$\cos(\text{N}, z) = -\frac{\cos(ds, \text{OY})}{\sin(ds, \text{OX})} = -\frac{\frac{dy}{ds}}{\sin(ds, \text{OX})}.$$

On a donc

$$\cos(\text{N}, r) = \frac{1}{\sin(ds, \text{OX})}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial r}{\partial z}\frac{dy}{ds}\right)$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\sigma}{dl} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz}{ds}\right) ds\,\delta x. \tag{5}$$

D'un autre côté, on a

$$\Delta(\text{NN}') = \begin{vmatrix} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} & \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} & \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \\ \frac{d\xi}{dl} & \frac{d\eta}{dl} & \frac{d\zeta}{dl} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\Delta(\text{NN}') = \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{d\zeta}{dl} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{d\eta}{dl}\right). \tag{6}$$

Si donc on pose

$$\left\{\begin{aligned} \text{X} &= \text{X}_1 + \text{X}_2, \\ \text{Y} &= \text{Y}_1 + \text{Y}_2, \\ \text{Z} &= \text{Z}_1 + \text{Z}_2, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

les égalités (3), (4), (5) et (6) démontreront les premières for-

mules de chacun des deux groupes :

$$
(8) \quad \begin{cases}
X_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\,J\,ds\,\dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\dfrac{dz}{ds}\right), \\
Y_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\,J\,ds\,\dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\dfrac{dz}{ds} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\dfrac{dx}{ds}\right), \\
Z_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\,J\,ds\,\dfrac{\partial}{\partial l}\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\dfrac{dx}{ds} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\dfrac{dy}{ds}\right),
\end{cases}
$$

$$
(9) \quad \begin{cases}
X_2 = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\,\dfrac{dJ}{ds}\,ds\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\dfrac{d\zeta}{dl} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\dfrac{d\eta}{dl}\right), \\
Y_2 = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\,\dfrac{dJ}{ds}\,ds\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\dfrac{d\xi}{dl} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\dfrac{d\zeta}{dl}\right), \\
Z_2 = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\,\dfrac{dJ}{ds}\,ds\left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\dfrac{d\eta}{dl} - \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\dfrac{d\xi}{dl}\right).
\end{cases}
$$

§ 3. — Transformation des formules précédentes. — Comparaison de la loi trouvée avec les lois d'Ampère et de Biot.

Examinons la loi de l'action d'un élément magnétique sur un élément de courant uniforme, loi exprimée par les formules (8) et (9).

La force qui a pour composantes X_1, Y_1, Z_1 garde la même valeur, que l'élément de conducteur sur lequel elle s'exerce soit traversé par un courant uniforme ou par un courant non uniforme. Elle peut être décomposée en deux forces, dont chacune est émanée de l'un des pôles de l'élément magnétique. Chacune de ces deux forces est d'ailleurs donnée par la loi d'Ampère [Livre XV, Chap. VI, égalité (1)].

La force qui a pour composantes X_2, Y_2, Z_2 n'est différente de o que si l'élément de conducteur sur lequel elle agit est traversé par un courant non uniforme. Elle ne peut être regardée comme la résultante d'actions exercées séparément par les pôles de l'élément.

Les deux identités

$$X_2 \frac{d\xi}{dl} + Y_2 \frac{d\eta}{dl} + Z_2 \frac{d\zeta}{dl} = 0,$$

$$X_2 \frac{x-\xi}{r} + Y_2 \frac{y-\eta}{r} + Z_2 \frac{z-\zeta}{r} = 0,$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude, montrent que cette force est à angle droit avec l'axe de l'élément magnétique et avec la droite qui joint l'élément magnétique à l'élément conducteur.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x-\xi & y-\eta & z-\zeta \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \frac{d\xi}{dl} & \frac{d\eta}{dl} & \frac{d\zeta}{dl} \end{vmatrix}$$

se réduit, tout calcul fait, à

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{M}\, dv \frac{dJ}{ds} ds \frac{1}{r^3} \left\{ \left[(y-\eta)\frac{d\zeta}{dl} - (z-\zeta)\frac{d\eta}{dl}\right]^2 + \left[(z-\zeta)\frac{d\xi}{dl} - (x-\xi)\frac{d\zeta}{dl}\right]^2 + \left[(x-\xi)\frac{d\eta}{dl} - (y-\eta)\frac{d\xi}{dl}\right]^2 \right\}.$$

Son signe est celui de

$$-\frac{dJ}{ds}.$$

La force en question a donc, par rapport à l'axe de l'élément magnétique (Introduction, Chap. II), un sens de rotation de même signe que $\frac{dJ}{ds}$.

Pour trouver la grandeur de la force dont la direction est ainsi parfaitement déterminée, nous prendrons pour origine le milieu O de ds; pour axe des x la droite r; pour axe des z la normale à r située dans le plan de r et de dl, et du même côté de r que dl. Il est facile de voir que, dans ce cas, la force cherchée se réduit à sa composante Y_2.

Mais, dans ce cas,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{1}{r^2}, \qquad \frac{d\zeta}{dl} = \sin(dl, r).$$

La grandeur de la force est donc

$$\mathrm{F} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{M}\, dv \frac{d\mathrm{J}}{ds}\, ds \frac{\sin(r, dl)}{r^2}.$$

Ainsi, *l'action d'un élément magnétique sur un élément de courant quelconque se compose :*

1° *De deux forces, émanées de chacun des deux pôles de l'élément magnétique; ces forces sont données par la loi d'Ampère;*

2° *D'une force, normale à l'axe magnétique de l'élément, à la ligne de jonction de l'élément magnétique et de l'élément de courant, dirigée vers la gauche d'un observateur situé suivant l'axe de l'élément magnétique et regardant l'élément de courant; cette force a pour grandeur*

$$\mathrm{F} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\sin(r, dl)}{r^2} \mathfrak{M}\, dv \frac{d\mathrm{J}}{ds}\, ds. \tag{10}$$

Toutes ces forces sont appliquées au milieu de l'élément de courant.

Examinons maintenant la loi, donnée par les formules (1) et (2), pour l'action d'un courant quelconque sur un élément magnétique, et comparons-la aux lois qui ont été proposées, pour la même action, par Ampère d'une part et par Biot d'autre part.

D'après Ampère, un élément de courant ds, dont le milieu a pour coordonnées (x, y, z), exerce sur une masse magnétique μ, située au point (ξ, η, ζ), une force dont le point d'application est en (x, y, z), et dont les composantes ont pour valeur [Livre XV, Chap. X, égalité (1)]

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{X} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mu \mathrm{J}\, ds \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \frac{dz}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \frac{dy}{ds} \right), \\ \mathcal{Y} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mu \mathrm{J}\, ds \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \frac{dz}{ds} \right), \\ \mathcal{Z} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mu \mathrm{J}\, ds \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \frac{dx}{ds} \right). \end{aligned} \right.$$

Transportons cette force de manière que son point d'applica-

tion vienne en (ξ, η, ζ). Il faudra alors adjoindre à cette force un couple dont l'axe aura pour composantes

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -[\mathcal{Y}(\zeta - z) - \mathcal{Z}(\eta - y)], \\ \mathcal{M} &= -[\mathcal{Z}(\xi - x) - \mathcal{X}(\zeta - z)], \\ \mathcal{N} &= -[\mathcal{X}(\eta - y) - \mathcal{Y}(\xi - x)], \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ par leurs valeurs

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mu \mathrm{J}\, ds \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \xi}, \\ \mathcal{M} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mu \mathrm{J}\, ds \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \eta}, \\ \mathcal{N} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mu \mathrm{J}\, ds \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right.$$

Chaque élément magnétique est soumis à l'action de deux forces telles que celle qui est donnée par les égalités (11), appliquées en ses deux pôles, et de deux couples tels que celui qui est déterminé par les égalités (12).

En composant entre elles ces actions, on pourra les réduire à une force appliquée au milieu de l'élément magnétique et à un couple.

La force a pour composantes

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}\, ds &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \frac{dz}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \frac{dy}{ds} \right), \\ \mathfrak{Y}\, ds &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \frac{dz}{ds} \right), \\ \mathfrak{Z}\, ds &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \frac{dx}{ds} \right). \end{aligned} \right.$$

Quant au couple, son axe aura pour composantes

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{L}\, ds &= (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)\, ds, \\ \mathfrak{M}\, ds &= (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\, ds, \\ \mathfrak{N}\, ds &= (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2)\, ds, \end{aligned} \right.$$

$\mathfrak{L}_1\, ds$, $\mathfrak{M}_1\, ds$, $\mathfrak{N}_1\, ds$ étant les composantes de l'axe du couple obtenu dans la composition des forces représentées par les éga-

lités (11), et $\mathfrak{L}_2 ds$, $\mathfrak{M}_2 ds$, $\mathfrak{N}_2 ds$ étant les composantes de l'axe du couple obtenu par la composition des couples donnés par les égalités (12).

On aura

$$\mathfrak{L}_1 ds = -\left(\mathcal{Y}\frac{d\zeta}{dl} - \mathcal{Z}\frac{d\eta}{dl}\right) dl,$$

$$\mathfrak{M}_1 ds = -\left(\mathcal{Z}\frac{d\xi}{dl} - \mathcal{X}\frac{d\zeta}{dl}\right) dl,$$

$$\mathfrak{N}_1 ds = -\left(\mathcal{X}\frac{d\eta}{dl} - \mathcal{Y}\frac{d\xi}{dl}\right) dl,$$

ou bien, en remplaçant $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ par leurs valeurs tirées des égalités (11),

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_1\, ds = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds\left[\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\left(\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d\eta}{dl} + \dfrac{dz}{ds}\dfrac{d\zeta}{dl}\right) - \left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\dfrac{d\eta}{dl} + \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\dfrac{d\zeta}{dl}\right)\dfrac{dx}{ds}\right], \\[2ex] \mathfrak{M}_1\, ds = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds\left[\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\left(\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d\zeta}{dl} + \dfrac{dx}{ds}\dfrac{d\xi}{dl}\right) - \left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\dfrac{d\zeta}{dl} + \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\dfrac{d\xi}{dl}\right)\dfrac{dy}{ds}\right], \\[2ex] \mathfrak{N}_1\, ds = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds\left[\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\left(\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d\xi}{dl} + \dfrac{dy}{ds}\dfrac{d\eta}{ds}\right) - \left(\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\dfrac{d\xi}{dl} + \dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\dfrac{d\eta}{dl}\right)\dfrac{dz}{ds}\right]. \end{cases}$$

D'autre part, des formules (12) on déduit aisément

$$(16)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_2 ds = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds\, \dfrac{\partial^2}{\partial s\,\partial l}\dfrac{\partial r}{\partial\xi}, \\[2ex] \mathfrak{M}_2 ds = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds\, \dfrac{\partial^2}{\partial s\,\partial l}\dfrac{\partial r}{\partial\eta}, \\[2ex] \mathfrak{N}_2 ds = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{M}\, dv\, \mathrm{J}\, ds\, \dfrac{\partial^2}{\partial s\,\partial l}\dfrac{\partial r}{\partial\zeta}. \end{cases}$$

Les égalités (13), (14), (15), (16) expriment, d'après la loi d'Ampère, l'action d'un élément de courant quelconque sur un élément magnétique. Comparons-les avec les égalités (1) et (2) qui expriment la véritable loi de cette action.

L'égalité

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2} = 0$$

permet de donner à la première des égalités (1) la forme

$$\begin{aligned}
X = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{M}\, dv \int J \Bigg[& \frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta} \frac{d\xi}{dl} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\,\partial\zeta} \frac{d\eta}{dl} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta^2} \frac{d\zeta}{dl} \right) \\
& - \frac{dz}{ds}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta} \frac{d\xi}{dl} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta^2} \frac{d\eta}{dl} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\eta} \frac{d\zeta}{dl} \right) \\
& + \frac{d\zeta}{dl}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\,\partial\xi} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\eta\,\partial\zeta} \frac{dz}{ds} \right) \\
& - \frac{d\eta}{dl}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\xi} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\eta} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\zeta^2} \frac{dz}{ds} \right) \Bigg] ds.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

L'égalité précédente peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
X = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{M}\, dv \int J \Bigg[& \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\zeta} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\eta} \frac{dz}{ds} \right) \\
& - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{d\eta}{dl} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{d\zeta}{dl} \right) \Bigg] ds.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& \int J \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{d\eta}{dl} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{d\zeta}{dl} \right) ds \\
& = \left[J \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{d\eta}{dl} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{d\zeta}{dl} \right) \right]_0^1 - \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{d\eta}{dl} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{d\zeta}{dl} \right) \frac{dJ}{ds} ds.
\end{aligned}$$

Or, ou bien le courant est fermé; ou bien, s'il est ouvert, l'intensité est égale à 0 en ses deux extrémités. On a donc

$$\left[J \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{d\eta}{dl} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{d\zeta}{dl} \right) \right]_0^1 = 0,$$

et les relations précédentes fournissent la première des égalités

$$(17)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\left[\displaystyle\int J\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dz}{ds}\right)ds-\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{d\eta}{dl}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{dJ}{ds}\,ds\right], \\ Y = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\left[\displaystyle\int J\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dz}{ds}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{dx}{ds}\right)ds-\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dl}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial l}\right)\frac{dJ}{ds}\,ds\right], \\ Z = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\left[\displaystyle\int J\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{dy}{ds}\right)ds-\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{d\xi}{dl}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{dJ}{ds}\,ds\right]. \end{cases}$$

Ces égalités (17) peuvent s'écrire

$$(18)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\displaystyle\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{d\zeta}{dl}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{d\eta}{dl}\right)\frac{dJ}{ds}\,ds+\int\mathfrak{X}\,ds, \\ Y = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\displaystyle\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{d\xi}{dl}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dl}\right)\frac{dJ}{ds}\,ds+\int\mathfrak{Y}\,ds, \\ Z = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{M}\,dv\displaystyle\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{d\eta}{dl}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{d\xi}{dl}\right)\frac{dJ}{ds}\,ds+\int\mathfrak{Z}\,ds. \end{cases}$$

Ces égalités (18) montrent que *la force qu'un courant quelconque exerce sur un élément magnétique coïncide avec la force donnée par la loi d'Ampère dans le cas où le courant est fermé et uniforme et seulement dans ce cas.*

Si l'on compare les formules (2) et (15), on voit que

$$(19)\quad \begin{cases} L = \displaystyle\int \mathfrak{L}_1\,ds, \\ M = \displaystyle\int \mathfrak{M}_1\,ds, \\ N = \displaystyle\int \mathfrak{N}_1\,ds. \end{cases}$$

Donc, pour que le couple qu'un courant exerce sur un élément magnétique coïncide avec le couple donné par la loi d'Ampère, il faut et il suffit que l'on ait

$$(20)\qquad \int\mathfrak{L}_2\,ds = 0,\qquad \int\mathfrak{M}_2\,ds = 0,\qquad \int\mathfrak{N}_2\,ds = 0.$$

Or on a, d'après les égalités (16),

$$-\int \mathfrak{L}_2\, ds = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{M}\, dv \left(J \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_0^1 - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{M}\, dv \int \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right) \frac{dJ}{ds}\, ds.$$

D'ailleurs, en toutes circonstances,

$$\left(J \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_0^1 = 0.$$

Les égalités (20) deviennent donc

$$\int \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right) \frac{dJ}{ds}\, ds = 0,$$
$$\int \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right) \frac{dJ}{ds}\, ds = 0,$$
$$\int \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right) \frac{dJ}{ds}\, ds = 0.$$

Elles nous apprennent que *le couple engendré par l'action d'un courant quelconque sur un élément magnétique est donné par la loi d'Ampère lorsque le courant est fermé et uniforme et seulement dans ce cas.*

La loi d'Ampère est donc exclusivement applicable à l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément magnétique.

Biot a donné une loi qui diffère de celle d'Ampère en ce que la force $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, donnée par les égalités (11), est appliquée au point (ξ, η, ζ) et non au point (x, y, z). Dans la loi de Biot, l'action d'un élément de courant sur un élément magnétique se réduit à une force appliquée au milieu de l'élément magnétique et à un couple. Comme dans la loi d'Ampère, la force a pour composantes les quantités $\mathfrak{X}\, ds$, $\mathfrak{Y}\, ds$, $\mathfrak{Z}\, ds$, données par les égalités (13), mais les composantes de l'axe du couple se réduisent aux quantités $\mathfrak{L}_1\, ds$, $\mathfrak{M}_1\, ds$, $\mathfrak{N}_1\, ds$, données par les égalités (15).

Les égalités (19) nous apprennent alors ce résultat :

Le couple exercé par un courant quelconque sur un élément magnétique est toujours donné exactement par la loi de Biot.

L'égalité (18) nous apprend que *la force qu'un courant quelconque exerce sur un élément magnétique ne se réduit à la*

force donnée par la loi de Biot que dans le cas où le courant est fermé et uniforme.

L'ensemble des égalités (18) et (19) nous montre que, pour obtenir l'action qu'un courant quelconque exerce sur un élément magnétique, il faut adjoindre aux forces données par la loi de Biot une force exercée par chaque élément de courant au milieu de chaque élément magnétique et ayant pour composantes

$$(21)\quad \begin{cases} \Xi\, ds = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \dfrac{dJ}{ds}\, ds \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \dfrac{d\zeta}{dl} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \dfrac{d\eta}{dl} \right), \\[2ex] \mathrm{H}\, ds = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \dfrac{dJ}{ds}\, ds \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \dfrac{d\xi}{dl} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \dfrac{d\zeta}{dl} \right), \\[2ex] \mathrm{Z}\, ds = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \dfrac{dJ}{ds}\, ds \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \dfrac{d\eta}{dl} - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \dfrac{d\xi}{dl} \right). \end{cases}$$

Cette force a même grandeur que la force dont les composantes sont données par les égalités (9), mais elle lui est opposée en direction.

Nous pouvons donc énoncer la loi suivante :

L'action d'un courant quelconque sur un aimant quelconque peut toujours être regardée comme résultant :

1° *De forces que chaque élément de courant ds exerce sur chaque masse magnétique* μ. *Chacune de ces forces, comme le voulait Biot, est appliquée à la masse magnétique* μ, *normale au plan de r et de ds, dirigée vers la gauche d'un observateur situé dans l'élément ds et regardant la masse magnétique; elle a pour grandeur*

$$(22)\quad \mathrm{F} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\sin(r, ds)}{r^2} \mu \mathrm{J}\, ds.$$

2° *De forces que chaque élément de courant ds exerce sur chaque élément magnétique* $\mathfrak{M}\, dv$. *Chacune de ces forces est appliquée au milieu de l'élément* $\mathfrak{M}\, dv$, *normale au plan de r et de dl, dirigée à droite de ce plan pour un observateur situé suivant dl et regardant l'élément ds; elle a pour grandeur*

$$(23)\quad \mathrm{G} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\sin(r, dl)}{r^2} \mathfrak{M}\, dv \frac{dJ}{ds}\, ds.$$

Cette dernière force ne peut se décomposer en actions exercées séparément sur chaque pôle.

Ainsi, dans cette loi, comme dans la loi énoncée par Biot pour les courants fermés et uniformes, les actions exercées par un élément de courant sur un élément magnétique se réduisent à trois forces qui sont respectivement égales et de direction contraire aux trois forces auxquelles est réductible l'action de l'élément magnétique sur l'élément de courant. Mais ces forces, tout en étant respectivement égales et de sens contraires, n'ont pas les mêmes points d'application. Les forces exercées sur l'élément magnétique ont, pour points d'application, les pôles de cet élément et son milieu ; les forces exercées sur l'élément de courant sont appliquées au milieu de cet élément. L'ensemble des six forces en question forme donc *trois couples élémentaires,* selon l'expression de Biot et d'Ampère.

Peut-on, comme il arrive dans la loi d'Ampère relative aux courants fermés et uniformes, décomposer l'action d'un courant quelconque sur un élément magnétique en actions exercées par chaque élément de courant ds sur l'élément magnétique, de telle façon que ces actions soient égales et *directement opposées* aux actions de l'élément magnétique sur l'élément de courant? En d'autres termes, peut-on dans l'énoncé de la loi précédente, supposer que toutes les forces exercées par l'élément ds aient pour point d'application le milieu de l'élément ds?

Faisons cette hypothèse. Nous trouverons aisément que l'action d'un courant quelconque sur un élément magnétique se réduira à une force appliquée au milieu de l'élément magnétique et ayant pour composantes les quantités X, Y, Z, données par les égalités (1), et à un couple dont l'axe aura pour composantes

$$L + \int \mathfrak{L}_2\, ds + \int \mathfrak{L}_3\, ds,$$

$$M + \int \mathfrak{M}_2\, ds + \int \mathfrak{M}_3\, ds,$$

$$N + \int \mathfrak{N}_2\, ds + \int \mathfrak{N}_3\, ds,$$

L, M, N étant définis par les égalités (2); $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_2$ par les

égalités (16) et $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{N}_3$ par les égalités suivantes

$$(24)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_3\, ds = [\mathrm{H}(z-\zeta) - \mathrm{Z}(y-\eta)]\, ds, \\ \mathfrak{M}_3\, ds = [\mathrm{Z}(x-\xi) - \Xi(z-\zeta)]\, ds, \\ \mathfrak{N}_3\, ds = [\Xi(y-\eta) - \mathrm{H}(x-\xi)]\, ds. \end{cases}$$

L'hypothèse faite ne peut donc conduire à des résultats exacts que si l'on a

$$(25)\quad \begin{cases} \displaystyle\int (\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3)\, ds = 0, \\ \displaystyle\int (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3)\, ds = 0, \\ \displaystyle\int (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3)\, ds = 0. \end{cases}$$

Les égalités (21) et (24) donnent

$$\int \mathfrak{L}_3\, ds = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \int \frac{dJ}{ds} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \xi}\, ds,$$

$$\int \mathfrak{M}_3\, ds = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \int \frac{dJ}{ds} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \eta}\, ds,$$

$$\int \mathfrak{N}_3\, ds = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \int \frac{dJ}{ds} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \zeta}\, ds.$$

Mais on a

$$\int \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \xi}\, ds = \left[\mathrm{J} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \xi}\right]_0^1 - \int \frac{\partial^2}{\partial l\, \partial s} \frac{\partial r}{\partial \xi}\, ds.$$

D'ailleurs, en toutes circonstances,

$$\left[\mathrm{J} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial \xi}\right]_0^1 = 0.$$

On a donc

$$(26)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \mathfrak{L}_3\, ds = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \int \mathrm{J} \frac{\partial^2}{\partial l\, \partial s} \frac{\partial r}{\partial \xi}\, ds, \\ \displaystyle\int \mathfrak{M}_3\, ds = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \int \mathrm{J} \frac{\partial^2}{\partial l\, \partial s} \frac{\partial r}{\partial \eta}\, ds, \\ \displaystyle\int \mathfrak{N}_3\, ds = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, \mathfrak{M}\, dv \int \mathrm{J} \frac{\partial^2}{\partial l\, \partial s} \frac{\partial r}{\partial \zeta}\, ds. \end{cases}$$

En comparant ces égalités (26) aux égalités (16), on voit aisément que les égalités (25) sont toujours satisfaites.

Par conséquent, *l'action d'un courant quelconque sur un*

aimant quelconque peut toujours être regardée comme résultant :

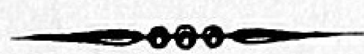
1° *De forces que chaque élément de courant ds exerce sur chaque masse magnétique* μ. *Chacune de ces forces, comme le voulait Ampère, est appliquée en un point qui coïncide avec le milieu de l'élément ds, normale au plan de r et de ds, dirigée vers la gauche d'un observateur situé dans l'élément ds et regardant la masse* μ; *elle a pour grandeur*

$$F = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\sin(r, ds)}{r^2} \mu J \, ds;$$

2° *De forces que chaque élément de courant ds exerce sur chaque élément magnétique* $\mathfrak{M}\, dv$. *Chacune de ces forces est, elle aussi, appliquée en un point qui coïncide avec le milieu de l'élément ds, normale au plan de r et de dl, dirigée vers la droite d'un observateur situé suivant dl et regardant l'élément ds; elle a pour grandeur*

$$G = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\sin(r, dl)}{r^2} \mathfrak{M} \, dv \frac{dJ}{ds} ds.$$

D'après cet énoncé, *l'action d'un courant quelconque sur un élément magnétique est la même que si l'action de chaque élément de courant sur l'élément magnétique se réduisait à une force égale et directement opposée à l'action de l'élément magnétique sur l'élément de courant.*



NOTES.

NOTE A.

SUR L'APPLICATION DE LA LOI D'OHM AUX COURANTS LINÉAIRES.

Les considérations exposées à la page 411 du Tome I doivent être complétées de la manière suivante :

On a (*loc. cit.*, ligne 3)

$$J = -\frac{\varepsilon}{\mathfrak{R}} \mathbf{S} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) \right] dA$$

ou bien

$$J = -\frac{\varepsilon}{\mathfrak{R}} \mathbf{S} \frac{\partial V}{\partial s} dA.$$

Mais l'égalité (7) (t. I, p. 403) montre qu'*en tout point de la surface d'un conducteur parcouru par un courant uniforme, les lignes de flux sont tangentes à la surface.*

D'autre part, on peut démontrer (t. I, p. 415) qu'*en tout point d'un conducteur homogène, les lignes de flux coïncident avec les trajectoires orthogonales aux surfaces d'égal niveau potentiel.*

On voit donc que les *surfaces d'égal niveau, tracées à l'intérieur d'un conducteur homogène parcouru par des courants uniformes, coupent normalement la surface du conducteur.*

De là cette première conséquence :

La section droite A *est une surface de niveau.*

Les diverses sections droites infiniment voisines étant sensiblement parallèles, on trouve cette seconde conséquence :

La quantité $\frac{\partial V}{\partial s}$ *a sensiblement la même valeur en tous les points de l'aire* A. L'égalité précédente devient donc

$$J = -\varepsilon \frac{A}{\mathfrak{R}} \frac{\partial V}{\partial s}.$$

La quantité $\frac{\partial V}{\partial s}$ se rapporte à un point du plan A, quelconque, mais intérieur au conducteur. La ligne *s* étant tangente à la surface du conducteur, cette quantité a la même valeur (t. I, p. 91), en un point du plan A

extérieur au conducteur et infiniment voisin de sa surface; c'est le sens qu'il faut lui attribuer dans la formule (3) (t. I, p. 411).

NOTE B.

SUR LA THÉORIE DES COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

Si l'on veut appliquer les équations générales de l'équilibre électrique [t. I, p. 489, équations (4)] à un conducteur dont la température varie d'un point à l'autre, mais qui est, en tout point, formé du même métal, on devra poser

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0.$$

Si l'on observe en outre que l'on a [t. I, p. 363, égalité (16)]

$$H = -\frac{\partial\Theta}{\partial T},$$

les équations citées deviennent

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Ainsi, *entre les diverses parties inégalement chaudes d'un même métal, il ne s'établit aucune différence de niveau potentiel.*

Cette proposition, conforme à certaines idées de Clausius [1], semble contredite par l'expérience. En effet, M. Pellat a montré qu'il existe une différence de niveau potentiel entre deux plateaux formés du même métal et portés à des températures différentes [2].

« Ce phénomène, dit M. Pellat, n'avait jamais été observé à ma connaissance, car il ne faut pas le confondre avec celui qu'avait prévu Sir W. Thomson et dont il a montré l'existence par l'expérience. L'effet Thomson n'est autre que l'effet Peltier entre deux parties inégalement chaudes d'un même métal rendues dissemblables par une inégalité de température. Il existe la même différence entre l'effet Thomson et le phénomène qui nous occupe qu'entre l'effet Peltier et le phénomène étudié jusqu'ici entre deux métaux dissemblables. »

Dans un récent Ouvrage [3], M. H. Poincaré oppose cette contradiction

---

[1] R. Clausius, *Sur l'application de la Théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes thermo-électriques* (*Mémoires sur la Théorie mécanique de la chaleur*, trad. par F. Folie, t. II. p. 152).

[2] H. Pellat, *Différence de potentiel des couches électriques qui recouvrent deux métaux en contact* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXIV, p. 83; 1881).

[3] H. Poincaré, *Thermodynamique*, pp. 381 et suiv. Paris, 1892.

à la théorie des phénomènes thermo-électriques que nous avons développée. On pourrait cependant, et M. Poincaré signale lui-même cette échappatoire, éviter cette objection en observant que la proposition précédente affirme que les valeurs prises, pour un même métal, *à une distance* $(\lambda + \mu)$ *des surfaces terminales,* par les quantités $\Theta(T)$ et $\Theta(T')$, sont égales entre elles. L'expérience de M. Pellat prouve, au contraire, que les valeurs prises par les mêmes quantités *sur les surfaces terminales* sont inégales. Entre ces deux conclusions, il n'y a pas contradiction.

Mais une autre observation capitale doit intervenir dans l'explication de l'expérience de M. Pellat.

Qu'entendons-nous dire lorsque nous parlons de deux conducteurs formés par un même métal porté à des températures différentes? Nous entendons dire que les paramètres qui définissent la matière formant un conducteur ont tous la même valeur pour ces deux conducteurs, sauf la température, qui n'a pas, pour chacun d'eux, la même valeur.

Or les paramètres qui définissent la nature et l'état d'un conducteur ne sont pas choisis d'une manière arbitraire. La plupart des propriétés du potentiel thermodynamique interne, et, en particulier, celles sur lesquelles repose la démonstration de l'équation fondamentale

$$H = -\frac{\partial\Theta}{\partial T},$$

supposent le choix de ces paramètres assujetti à une certaine loi [1].

Ces paramètres sont choisis de telle manière que, s'ils demeurent constants pendant que la température éprouve une certaine variation, aucun travail extérieur n'est effectué et aucune force vive n'est prise par le système.

Si, par exemple, il s'agit de définir un corps de nature chimique déterminée, pris dans un état moléculaire déterminé, il faudra adjoindre à la température, comme paramètre variable, son volume spécifique.

Dès lors que signifiera cette expression : deux conducteurs formés du même métal et portés à une température différente? Elle signifiera que ces deux conducteurs sont non seulement formés d'un métal de même nature, pris sous le même état moléculaire, mais encore qu'en chacun d'eux ce métal a *la même densité*. En d'autres termes, elle signifie que la dilatation accompagnant les variations de température du métal a lieu *sous volume constant.*

Si, au contraire, les divers conducteurs sont soumis à une pression constante et uniforme, deux conducteurs formés d'un métal de *même nature,* portés à des températures différentes, ne pourront être dits *du même métal.*

Si un conducteur est formé en tous ses points d'un métal de même

---

(1) *Voir* Tome I, p. 341. *Voir* aussi P. DUHEM, *Sur les équations générales de la Thermodynamique* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. VII, p. 231; 1891).

nature, s'il est porté à une température variable d'un point à l'autre et *s'il est soumis à une pression uniforme et constante* P, il ne faudra plus, dans les équations (4) et (5) (t. I, pp. 489-490) poser

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0;$$

mais, en désignant par $v(P, T)$ le volume spécifique du métal sous la pression P, à la température T,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}$$

ou bien, en désignant par v_0 le volume spécifique du métal sous la pression P, à la température de la glace fondante; par $\alpha(P, T)$ le coefficient de dilatation du métal sous la pression constante P, à la température T,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = v_0 \frac{\partial \Theta}{\partial v} \alpha(P, T) \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = v_0 \frac{\partial \Theta}{\partial v} \alpha(P, T) \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = v_0 \frac{\partial \Theta}{\partial v} \alpha(P, T) \frac{\partial T}{\partial z}.$$

On voit alors qu'en deux points de ce conducteur où la température a des valeurs différentes T et T′ la fonction potentielle aura des valeurs différentes V et V′, liées par la relation

$$(1) \qquad \varepsilon(V' - V) + v_0 \int_T^{T'} \frac{\partial \Theta[v(P, T), T]}{\partial v} \alpha(P, T)\, dT = 0.$$

Dans les théories que renferment les Chapitres VIII, IX et X du Livre V, nous avons toujours entendu le mot *un même métal* dans le sens que nous venons de préciser. Si donc on veut appliquer ces théories aux expériences faites sous une pression constante et uniforme, on devra convenir de négliger la dilatation des métaux.

Si l'on ne veut point faire une semblable approximation, il faut reprendre ces théories sur nouveaux frais, ce qui, d'ailleurs, se fait sans aucune difficulté, comme nous allons le voir.

A l'intérieur d'un métal dont la nature demeure la même, mais dont la température varie d'un point à l'autre, les deux fonctions que nous avons désignées (t. I, p. 491) par $H(x, y, z, t)$ et $\mathfrak{H}(x, y, z, t)$ deviennent de simples fonctions de v et de T. Si la pression extérieure est maintenue uniforme et constante, v devient une simple fonction de T et il en est de même des fonctions $H(x, y, z, T)$ et $\mathfrak{H}(x, y, z, T)$, que nous pouvons désigner alors par $h'(T)$ et $\mathfrak{H}'(T)$. De ce point de départ, on peut développer une théorie des courants thermo-électriques en tout semblable à celle que nous avons exposée. Les deux fonctions $h'(T)$, $\mathfrak{H}'(T)$ joueront dans la

première théorie le même rôle que les deux fonctions $h(\mathrm{T})$, $\mathfrak{H}(\mathrm{T})$ dans la seconde.

Le coefficient de l'*effet Peltier* à la soudure de deux métaux a et b aura pour valeur

$$\mathrm{P}'^{b}_{a} = \frac{[h'_a(\mathrm{T}) - h'_b(\mathrm{T})]\mathrm{T}}{\mathrm{E}}. \tag{2}$$

Rien ne sera donc changé aux relations qui lient l'effet Peltier et les courants thermo-électriques.

Nous aurons [t. I, p. 363, égalité (16)]

$$h'_a(\mathrm{T}) = \frac{\partial\Theta_a(v_a, \mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}, \qquad h'_b(\mathrm{T}) = \frac{\partial\Theta_b(v_b, \mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}$$

ou bien

$$h'_a(\mathrm{T}) = \frac{d\Theta_a}{d\mathrm{T}} - \frac{\partial\Theta_a}{\partial v_a}\frac{\partial v_a}{\partial\mathrm{T}},$$

$$h'_b(\mathrm{T}) = \frac{d\Theta_b}{d\mathrm{T}} - \frac{\partial\Theta_b}{\partial v_b}\frac{\partial v_b}{\partial\mathrm{T}},$$

ou enfin, en désignant par w_0, $\beta(\mathrm{P}, \mathrm{T})$ les quantités analogues à v_0 et $\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{T})$, relatives au métal b,

$$h'_a(\mathrm{T}) = \frac{d\Theta_a}{d\mathrm{T}} - v_0\frac{\partial\Theta_a}{\partial v_a}\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{T}),$$

$$h'_b(\mathrm{T}) = \frac{d\Theta_b}{d\mathrm{T}} - w_0\frac{\partial\Theta_b}{\partial v_b}\beta(\mathrm{P}, \mathrm{T}).$$

Or, on a [t. I, p. 486, égalité (13)]

$$\mathrm{D}^b_a = -\frac{\Theta_a - \Theta_b}{\varepsilon}, \tag{3}$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\mathrm{D}^b_a}{d\mathrm{T}} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d\Theta_a}{d\mathrm{T}} - \frac{d\Theta_b}{d\mathrm{T}}\right). \tag{4}$$

La comparaison des égalités (2) et (4) donne

$$\mathrm{P}'^{b}_{a}(\mathrm{T}) = -\frac{\varepsilon\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\frac{d\mathrm{D}^b_a(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\left[v_0\frac{\partial\Theta_a}{\partial v_a}\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{T}) - w_0\frac{\partial\Theta_b}{\partial v_b}\beta(\mathrm{P}, \mathrm{T})\right]. \tag{5}$$

Telle est la relation qui doit remplacer la relation de M. Lorentz [t. I, p. 486, égalité (14)].

Cette modification apportée à la relation de M. Lorentz modifiera la relation (18) (t. I, p. 510) qui deviendra

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E} &= \varepsilon[\mathrm{D}^b_a(\mathrm{T}_1) - \mathrm{D}^b_a(\mathrm{T}_0)] \\ &\quad - v_0\int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}_1}\frac{\partial\Theta_a}{\partial v_a}\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{T})\,d\mathrm{T} + w_0\int_{\mathrm{T}_0}^{\mathrm{T}_1}\frac{\partial\Theta_b}{\partial v_b}\beta(\mathrm{P}, \mathrm{T})\,d\mathrm{T}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

L'égalité (2) (t. I, p. 517) est générale. Au sein d'un métal de même nature en tous ses points et soumis à une pression uniforme, on doit poser non plus

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 0,$$

mais

$$\frac{\partial H}{\partial x} = v_0 \frac{\partial H}{\partial v} \alpha(P, T) \frac{\partial T}{\partial x},$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = v_0 \frac{\partial H}{\partial v} \alpha(P, T) \frac{\partial T}{\partial y},$$
$$\frac{\partial H}{\partial z} = v_0 \frac{\partial H}{\partial v} \alpha(P, T) \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Nous aurons alors, pour le coefficient de l'effet calorifique qui s'ajoute à l'effet Joule, la valeur

$$\mu'(T) = T\left[\frac{\partial H}{\partial T} + v_0 \frac{\partial H}{\partial v} \alpha(P, T)\right]$$

ou

$$\mu'(T) = T \frac{dh'(T)}{dT}. \tag{4}$$

Le coefficient de l'*effet Thomson* ainsi défini gardera, dans la nouvelle théorie des courants thermo-électriques les relations qu'avait, dans l'ancienne théorie, le coefficient de l'effet Thomson autrement défini.

On voit ainsi de quelle manière on pourra reprendre toute la théorie des courants thermo-électriques, en tenant compte de la dilatation des métaux. Seules, les propositions où figurent les différences de niveau potentiel au contact seront altérées.

Une dernière remarque : M. Poincaré [1] objecte à la théorie que nous avons exposée les difficultés que soulève la considération de courants *ouverts*.

Comme, dans toute cette théorie, nous n'avons jamais considéré que des conducteurs *en équilibre électrique,* ou des conducteurs parcourus par des courants *fermés et uniformes,* nous ne pensons pas que cette objection soit fondée.

NOTE C.

SUR UNE EXPÉRIENCE D'ANTOINE-CÉSAR BECQUEREL.

Les principes développés dans la Note précédente permettent de résoudre une autre difficulté présentée par la théorie des courants thermo-électriques. Nous allons exposer brièvement cette solution.

---

(1) H. Poincaré, *Thermodynamique,* p. 390.

Une démonstration, semblable à celle que nous avons exposée au Tome I, page 490, nous permettra d'énoncer la loi suivante :

Si un conducteur métallique, partout de même nature, est soumis à une pression uniforme, ce conducteur ne peut être le siège de courants permanents sensibles, quelle que soit la distribution des températures sur ce système.

Nous avons rapporté (t. I, p. 492) une expérience célèbre d'Antoine-César Becquerel qui contredit cette loi, et nous avons indiqué que, d'après M. Magnus, cette expérience devait s'expliquer par l'écrouissage du fil de platine qui sert à la réaliser.

Gaugain (¹) et M. Leroux (²) ont montré, par une série d'expériences, que cette interprétation de M. Magnus ne pouvait être acceptée. Ils ont prouvé :

1° Qu'en recuisant la partie nouée du fil de platine de manière à détruire l'écrouissage s'il s'était produit, on n'empêchait pas la production du phénomène;

2° Qu'en défaisant le nœud sans recuire le métal, ce qui ne pouvait qu'augmenter l'écrouissage, on faisait disparaître l'effet thermo-électrique;

3° Que la formation d'une spirale ne suffisait jamais à la production du phénomène, pourvu qu'il n'y ait pas contact entre deux spires différentes;

4° Que l'effet observé par A.-C. Becquerel se produisait toutes les fois que l'on mettait en contact deux régions très inégalement chaudes du circuit.

Il faut donc bien reconnaître que les expériences d'A.-C. Becquerel sont en contradiction avec la loi précédente.

Si nous nous reportons aux hypothèses sur lesquelles repose la démonstration de la loi précédente, nous trouverons sans peine l'explication de ce désaccord. Nous nous sommes appuyé sur cette proposition que les deux fonctions $H(x, y, z, T)$ et $\mathfrak{H}(x, y, z, T)$ étaient, à l'intérieur du métal, de simples fonctions de T, $h'(T)$ et $\mathfrak{H}'(T)$. Cette proposition elle-même était subordonnée à cette autre : il règne, en tout point à l'intérieur du métal, une même pression P. Il suffirait d'ailleurs que la pression P, sans être constante, fût une simple fonction de T, pour que la démonstration subsiste. Mais cette dernière proposition deviendra fausse en général si le métal, gêné par des obstacles, subit une dilatation inégale. C'est ce qui ne peut manquer d'arriver lorsque, comme dans l'expérience d'A.-C. Becquerel, deux parties du circuit, portées à des températures notablement inégales, sont directement au contact.

(¹) Gaugain, *Mémoire sur les courants thermo-électriques* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXVI, p. 81; 1862).

(²) Leroux, *Recherches sur les courants thermo-électriques* (*Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. X, p. 201; 1867).

NOTE D.

SUR LA VARIATION DE LA FORCE ÉLECTROMOTRICE D'UNE PILE AVEC LA PRESSION QU'ELLE SUPPORTE.

Cette variation est liée à l'accroissement de volume δv que subit la pile par l'effet de la réaction qui s'y produit, tandis qu'elle est traversée par la quantité d'électricité J dt. Cette relation est exprimée par l'égalité [t. I, p. 548, égalité (15)]

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} J\, dt = -\delta v.$$

Nous pensons avoir, le premier, indiqué cette relation. Elle a été d'abord publiée dans notre Ouvrage sur le potentiel thermodynamique (¹).

Récemment, M. H. Gilbault (²) s'est proposé de soumettre cette relation au contrôle de l'expérience. Voici le Tableau qui résume les résultats de ses recherches. Les forces électromotrices sont évaluées en dix-millièmes de volt; les pressions en centaines d'atmosphères :

	Piles.	$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P}$ calculé.	$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P}$ observé.
I.	Daniell (8 % $ZnSO^4$; 24 % $CuSO^4$)	+ 7,18	+ 6,84
II.	Daniell (20 % $ZnSO^4$; $CuSO^4$ à saturation) ..	+ 5,17	+ 5
III.	Daniell (27,56 % $ZnSO^4$; $CuSO^4$ à saturation).	+ 2,2	+ 2
IV.	Warren de la Rue (1 % $ZnCl^2$)	+ 6,62	+ 7
V.	Warren de la Rue (40 % $ZnCl^2$)	— 5,04	— 5
VI.	Accumulateur Planté (8,8 % SO^4H^2)..	— 12,7	— 12
VII.	Volta	—586	—600
VIII.	Bunsen	—383	—405
IX.	Pile à gaz	+865	+845

Les expériences de M. Gilbault fournissent, on le voit, une belle confirmation de la théorie thermodynamique de la pile.

NOTE E.

SUR LA THÉORIE DU CONDENSATEUR A LAME DIÉLECTRIQUE.

M. H. Lorberg, professeur à l'Université de Bonn, a eu l'obligeance de nous signaler une erreur et une omission qui se sont glissées dans la

---

(¹) P. Duhem, *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, p. 117. Paris; 1886.

(²) H. Gilbault, *Variation de la force électromotrice des piles avec la pression* (*Comptes rendus*, t. CXIII, p. 465; 1891). — *Étude sur la variation de la force électromotrice des piles avec la pression* (*La lumière électrique*, t. XLII, pp. 7 et 63; 1891).

théorie du condensateur à lame diélectrique (t. II, pp. 355-362). Nous allons ici réparer l'une et l'autre.

Les deux constantes $\mathfrak{V}_1$ et V_1, introduites par les égalités (11) (p. 358), sont liées par l'égalité (9 *bis*) (p. 359). Il n'est pas possible, en général, de disposer du rapport de ces constantes de manière que l'égalité (10 *bis*) soit vérifiée en tout point des surfaces S_2, S_3. La solution proposée est donc, *en général,* inacceptable. Mais elle devient acceptable si le rapport

$$\frac{\left(\dfrac{\partial w}{\partial N_3}\right)_P}{\left(\dfrac{\partial v}{\partial N_3}\right)_P}$$

a la même valeur en tout point P des surfaces S_2, S_3. C'est ce qui arrive dans les deux cas particuliers traités aux pages 359 et suivantes.

Au Tome II, page 361, ligne 4 ; la formule

$$S \frac{\partial W}{\partial N_2} dS_1 = -4\pi$$

doit être remplacée par celle-ci

$$S \frac{\partial W}{\partial N_2} dS_1 = -4\pi\gamma,$$

γ étant la charge qui, répartie sur le conducteur 1, le porte au niveau potentiel 1. Si l'on désigne par C la capacité de ce conducteur, on a

$$\varepsilon C = \gamma.$$

Les trois formules qui suivent celle dont nous venons de parler doivent aussi être rectifiées par l'introduction du facteur γ au second membre.

Une correction analogue doit être faite à quelques formules des pages 364 et 365. Elle est si aisée, que le lecteur n'aura point de peine à la trouver.

FIN DU TOME TROISIÈME.

TABLE DES MATIÈRES
DU TOME III.

LIVRE XIV.

Les forces électrodynamiques entre courants linéaires.

LIVRE XV.

Actions électromagnétiques exercées par les courants uniformes.

LIVRE XVI.

Actions qui s'exercent entre les aimants et les courants quelconques.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

17773 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.